

非連続モデルのき裂問題への適用性*

(第1報, 連続分布転位弾塑性き裂モデルとの対応)

渡辺勝彦*¹, 佐藤 裕*¹, 吉川暢宏*²

On an Applicability of Discontinuous Model to Crack Problems (1st Report, Relation with Elastic-Plastic Crack Models Using Continuous Distribution of Dislocations)

Katsuhiko WATANABE, Yutaka SATO, and Nobuhiro YOSHIKAWA

The discontinuous model is a model in which the discontinuities inside of the continuum are taking into consideration. In this paper, we try to apply the discontinuous model to crack problems and investigate its applicability through the analyses of the specialized case of this model; that is elastic-plastic crack models in which the continuous distribution of dislocations are assumed. The contents are as follows; (1) In order to correspond with the Dugdale and BCS models and inclined strip yield model a constitutive relation of discontinuous plane is devised. (2) Finite element analyses of discontinuous model corresponding with these models are carried out, and an applicability of this model to analyses of crack model with dislocation arrays are confirmed.

Key Words: Fracture, Discontinuous Model, Dugdale Model, B. C. S. Model, Elastic-Plastic Crack, Dislocation

1. 緒 言

通常き裂問題の解析は, その解法における一般性から連続体モデルにより行われる場合が多いが, 一方ではき裂端の状況の本質をよりとらえているとする, き裂端の非連続性を考慮したモデルも種々考案され, 解析可能な問題に対してはその解析も行われて, き裂挙動の解明に用いられている^{(1)~(3)}. ところで, 著者らは先の論文において物体内の非連続性を一般的な形で取り入れることのできるモデルの提案を行い(非連続モデル), 非連続面に対する一般的構成式の与え方と, 有限要素法を用いてこれを解析する際の定式化を示した⁽⁴⁾⁽⁵⁾. このモデルは現象との対応から本来非連続性を考慮すべきであると考えられる種々の問題に対してその適用が期待されるが, 本研究では特にき裂問題解析に対し非連続モデルを用いた場合におけるその適用性についての基礎的検討を行った. 第1報では, 連続分布転位論を応用した弾塑性き裂モデルが, この非連続モデルをき裂問題に適用した場合の特殊なケースと

して位置づけられることを示し, その対応関係を明らかにするとともに, これらの連続分布転位弾塑性き裂モデルを, 非連続モデルの立場からはじめて可能となる弾塑性有限要素法により解析し, 非連続モデルの連続分布転位き裂モデル解析への適用性を考察した.

2. 非連続モデル

ここでは本論文において非連続モデルと呼ぶものの定義と, 非連続面に対する一般的構成関係の与え方⁽⁵⁾について簡単に述べる.

非連続モデルは変形に際し物体の一部に変位の非連続性を考える面を有するモデルであり, この非連続面に対して他の連続体と考える領域の構成則と矛盾しない適当な構成関係を与えることで定式化される. すなわち図1は連続体内のひとつの面に非連続性を考える場合を例として示したものであるが, 図1(a)のように初期には完全な面であったものが負荷を受けた後, 図1(b)のように引き伸ばされると考える. ここで (x_1, x_2, x_3) は全体座標系, また (X_1, X_2, X_3) は X_1, X_3 軸が面内に含まれる局所直交座標系である. そしてこのような非連続面に対して, 図1(c)を参照し, (X_1, X_2, X_3) 座標系において, 面外方向の相対変位 $\llcorner \delta_n \llcorner = \llcorner \delta_{22} \delta_{23} \delta_{21} \llcorner$ また非連続面においても変位 $u_i(X_1,$

* 昭和63年7月15日 東海支部浜松地方講演会において講演, 原稿受付 昭和62年9月25日.

*¹ 正員, 東京大学生産技術研究所 (〒106 東京都港区六本木7-22-1).

*² 学生員, 東京大学大学院.

0, X_3) は定義されるので面内方向のひずみ $\lfloor \epsilon_t \rfloor = \lfloor \epsilon_{11} \ \epsilon_{33} \ \gamma_{31} \rfloor = \lfloor \partial u_1 / \partial X_1 \ \partial u_3 / \partial X_3 \ \partial u_3 / \partial X_1 + \partial u_1 / \partial X_3 \rfloor$ さらに面外方向の応力 $\lfloor \sigma_n \rfloor = \lfloor \sigma_{22} \ \tau_{23} \ \tau_{12} \rfloor$, 面内方向の応力 $\lfloor \sigma_t \rfloor = \lfloor \sigma_{11} \ \sigma_{33} \ \tau_{31} \rfloor$ を定義し, これらの間の関係として構成則を与える. その際通常の連続体と考える領域と矛盾なくかつ形式的に対応する形でこれを与えるために面外方向相対変位を直接構成式に用いるのではなく, 特性長さ $\lfloor h_n^M \rfloor = \lfloor h_{22}^M \ h_{23}^M \ h_{21}^M \rfloor$ を考え, ひずみ相当量を

$$\begin{aligned} \lfloor \bar{\epsilon}_n \rfloor &= \lfloor \bar{\epsilon}_{22} \ \bar{\gamma}_{23} \ \bar{\gamma}_{12} \rfloor \\ &= \lfloor \frac{\delta_{22}^p}{h_{22}^p} + \frac{\delta_{22}^p}{h_{22}^p} \frac{\delta p_3}{h_{23}^p} + \frac{\delta_{23}^p}{h_{23}^p} + \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ &\quad \frac{\delta_{21}^p}{h_{21}^p} + \frac{\delta_{21}^p}{h_{21}^p} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \rfloor \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

のように定義して, これを用い $\lfloor \sigma_t \rfloor \lfloor \sigma_n \rfloor$, $\lfloor \epsilon^M \rfloor \lfloor \bar{\epsilon}_n^M \rfloor$ の間に通常の連続体の構成式を適用する. ただしここで上付きの M は, e または p を表し, それらはそれぞれ弾性, 塑性の各変形に対応した量であることを表すものである. このようにすると, 実際の応力と相対変位間の関係はパラメータ $\lfloor h_n^M \rfloor$ の値を調整することで得ることができる. 例えば連続体と考える領域の構成関係が弾塑性体としてのものであり, 応力増分とひずみ増分の関係が弾塑性マトリックス $[D^p]$ を介して

$$\{d\sigma\} = [D^p] \{d\epsilon\} \dots \dots \dots (2)$$

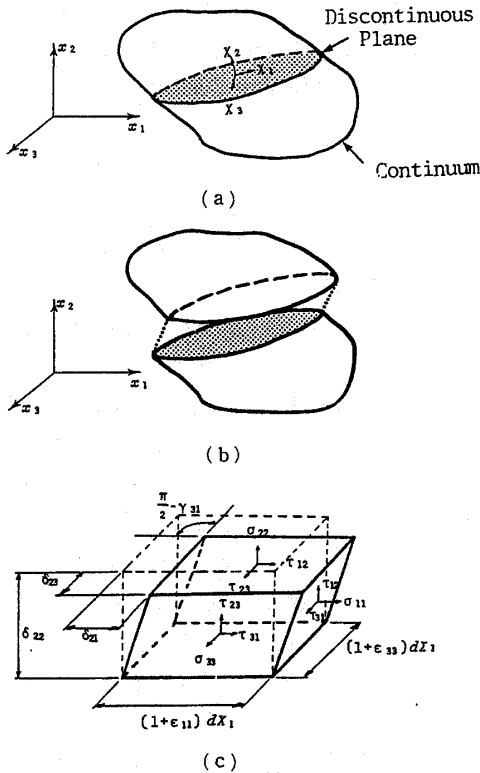


図1 非連続モデル

のように表されるとき, 非連続面の構成則は一般には弾性挙動に関する特性長さ $\lfloor h_n^e \rfloor$ と塑性挙動に関する特性長さ $\lfloor h_n^p \rfloor$ を個々に与えることによって考えることができるが⁽⁵⁾, $\lfloor h_n \rfloor = \lfloor h_n^e \rfloor = \lfloor h_n^p \rfloor$ の特別な場合では, 式(2)の面外方向ひずみ増分 $\lfloor d\bar{\epsilon}_n \rfloor$ をひずみ相当量の増分 $\lfloor d\bar{\epsilon}_n \rfloor = \lfloor d\bar{\epsilon}_{22} \ d\bar{\gamma}_{23} \ d\bar{\gamma}_{12} \rfloor$ で置き換えることにより,

$$\left\{ \frac{d\sigma_t}{d\sigma_n} \right\} = [D^p] \left\{ \frac{d\epsilon_t}{d\bar{\epsilon}_n} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

と書くことができる.

3. 連続分布転位弾塑性き裂モデルとの対応

転位の連続分布を仮定したき裂の解析は数多くなされているが, その中で弾塑性き裂のモデル化とその解析手法としてこれを用いたものとしては, Bilby らによるいわゆる B. C. S. モデル⁽¹⁾ が有名であり, この解析により彼らは先に行われた Dugdale による解析⁽²⁾ と等価な結果を導いた. B. C. S. モデルと Dugdale モデル (以後モード I および II, III に対するこれら連続分布転位弾塑性き裂モデルをまとめて DBCS モデルと略記する) がき裂の両端前方に塑性域を考えるき裂モデルであるのに対し, 現実のき裂, 特に平面ひずみ状態にあるき裂において生じる塑性すべりを表現するためにき裂に対してある角度を持った面に転位の連続分布を仮定するモデルも提案され解析が行われているが⁽³⁾, その解を得るためには数値解析を含む複雑な計算が必要であり汎用性があるとはいいがたい. 本章では, 非連続モデルをき裂問題に対して適用し, 非連続モデルが, 非連続面に与える構成則を特殊化することによって, これら連続分布転位論を応用した弾塑性き裂モデルに厳密に対応づけることが可能であることを示す.

3.1 DBCS モデルと非連続モデル

DBCS モデルは, 線形弾性体と考える連続体中のき裂およびき裂先端前方の面に仮定された塑性域を変位の非連続な面と考え, この面における非連続性を各々の変形モードに応じた転位の連続分布という形で与えたモデルであると考えることができる. 転位の分布関数は, 外力および転位によって生じる応力と転位の移動抵抗応力間の釣合条件, また塑性域の終端に応力の特異性が生じないという条件のもとに決定される. モード I, II に対応した図 2 (a) および (b) に示す刃状転位, またモード III に対応した図 2 (c) に示すようならせん転位の堆積によって生じる非連続量はそれぞれ 2 章で定義した相対変位 δ_{22} , δ_{21} および δ_{23} と関係づけることができる. すなわち図 2 の座標系において, 各変形モード

に対応した転位密度分布関数をそれぞれ $B_I(X_1)$, $B_{II}(X_1)$, $B_{III}(X_1)$ により表すこととすれば, X_1 軸上の任意の場所における相対変位は各モードごとに次のように与えられる.

$$\delta_{22}(X_1) = \int_{x_1}^{a+d} B_I(X_1) dX_1 \quad (\text{モード I}) \quad \dots (4)$$

$$\delta_{21}(X_1) = \int_{x_1}^{a+d} B_{II}(X_1) dX_1 \quad (\text{モード II}) \quad \dots (5)$$

$$\delta_{23}(X_1) = \int_{x_1}^{a+d} B_{III}(X_1) dX_1 \quad (\text{モード III}) \quad \dots (6)$$

さらにこれらの転位の移動抵抗応力を図1(c)の非連続面に関する応力により表現することとすれば, 転位が連続的に分布する面を2章で述べた非連続面で表現することができる. すなわちき裂面および塑性を考慮するき裂先端前方の面にあらかじめ非連続面を想定し, き裂面における非連続面には転位の移動抵抗がないことから剛性を与えず(非連続面は不用), また塑性域を考慮する非連続面では通常行われるように転位の移動抵抗応力を材料の降伏応力と結び付けるものとすれば, 応力と面外相対変位の間の関係が剛塑性体となるような構成関係を与えればよい(通常のDBCSモデルでは転位の移動抵抗応力が一定であるとしているので剛完全塑性体としての構成関係を与えていることになる). ただし非連続モデルでは一般性を持たせるため非連続面に関しても連続体と同じくすべての応力成分が関与するような構成則を考えているのに対して, DBCSモデルではもともと単純な負荷様式を想定しているの

で, そのひとつの成分だけが考慮されており, そのため, 非連続モデルをDBCSモデルと厳密に対応づけるためには配慮が必要であり, 特にモードIの場合には次のような構成関係の特殊化が必要となる.

モードIではき裂先端近傍の非連続面に関する応力として σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} (平面応力を考える場合には $\sigma_{33}=0$) が生じるため, 式(3)のような一般的な降伏条件を考えた塑性体(例えばMisesの降伏条件に従うような場合)の構成則を適用した場合, 転位の移動抵抗応力を $\sigma_{22}=\sigma_Y$ (σ_Y :材料の引張降伏応力)により与えるDBCSモデルとの対応がとれなくなる. しかしこの場合非連続面の構成則として次のような特殊なものを考えることでDBCSモデルとの厳密な対応が図れる. すなわち非連続面におけるひずみおよびひずみ相当量の成分のうち塑性変形を生じるのは $\bar{\epsilon}_{22}$ のみであるとし, 降伏条件は $\sigma_{22}=\sigma_Y$ によって与え, σ_{22} と $\bar{\epsilon}_{22}$ の間の構成関係を硬化則として与えればよい. また弾性挙動については, 連続体部分との適合を保つように応力成分とひずみおよびひずみ相当量成分の間に連続体と考える領域と同様の線形弾性の構成関係を与えるものとし, さらに応力と面外相対変位の間の関係が剛塑性体のそれになるためには $\delta_{22}^e=0$ となっていなければならないが, ひずみ相当量については $\bar{\epsilon}_{22}^e=\delta_{22}^e/h_{22}^e \neq 0$ となるのが自然であることからこれに対応するものとして $h_{22}^e \rightarrow 0$ とする極限を考えることにすればよい. 以上のような仮定のもと, $\llcorner h_n \llcorner = \llcorner h_n^e \llcorner = \llcorner h_n^p \llcorner$ の場合の平面応力状態の非連続面の弾塑性構成則は次のように与えられる(付録参照).

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} = [D_{aug}^e] \begin{Bmatrix} d\epsilon_{11} \\ d\bar{\epsilon}_{22} \\ d\bar{\gamma}_{12} \end{Bmatrix} \quad \dots (7)$$

ここで

$$[D_{aug}^e] = [D^e] - \frac{E^2}{(1-\nu^2)(E+H'(1-\nu^2))} \begin{bmatrix} \nu^2 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[D^e] = E \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\nu^2} & \frac{\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu^2} & \frac{1}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}$$

であり, また E はヤング率, ν はポアソン比である. 硬化率 H' は

$$H' = \frac{d\sigma_{22}}{d\bar{\epsilon}_{22}^e} = h_{22}^e \frac{d\sigma_{22}}{d\delta_{22}^e} \quad \dots (8)$$

によって定義されるものである. 硬化を考えない特殊な場合は $H' \rightarrow 0$ の極限に相当し(本来のDugdaleモ

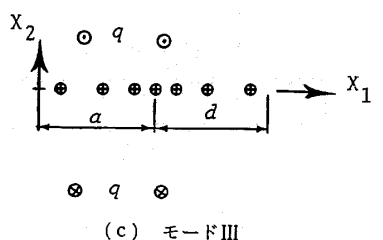
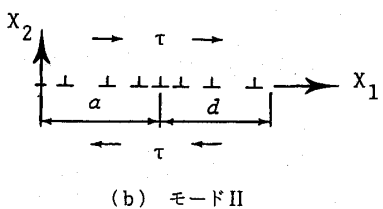
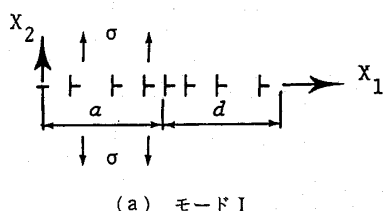


図2 DBCSモデル

デルはこの場合を考えている), この場合 $d\delta_{22}$ が有限の値であれば $d\sigma_{22} \rightarrow 0$ となることから h_{22} の値によらず非連続面の塑性挙動は同一となる。しかし $H' \neq 0$ の場合には H' が同一の値であれば h_{22} の値により $d\delta_{22}$ と $d\sigma_{22}$ の間の関係としての硬化特性は変化することになる。

モデルIIおよびモードIIIに対しては、塑性域内の転位の移動抵抗応力として材料のせん断降伏応力 τ_y がとられる。この場合には非連続面内に生じる応力はそれぞれ τ_{12} , τ_{23} のみである点がモードIの場合と異なっており、そのために一般的な塑性体の構成関係を適用した場合でも、塑性変形はそれぞれ γ_{12} , γ_{23} だけに生じる。また降伏条件も一般の連続体と同様に、例えば相当応力 $\bar{\sigma}$ を用いて与えても結果として τ_{12} , τ_{23} のみによって降伏条件を与えたのと等しいことになる。よってモードIの場合に行ったような構成関係の特殊化はあえて考慮する必要はない。弾性挙動についてはそれぞれ $\delta_{21}^e = 0$, $\delta_{23}^e = 0$ であることが求められるが、一方では $\bar{\gamma}_{12} = \delta_{21}^e/h_{21} \neq 0$, $\bar{\gamma}_{23} = \delta_{23}^e/h_{23} \neq 0$ (この場合 $\partial u_2/\partial X_1 = 0$, $\partial u_2/\partial X_3 = 0$) であることから $h_{21} \rightarrow 0$, $h_{23} \rightarrow 0$ の場合を考えればよい。

3.2 傾斜した塑性域を持つき裂モデル 平面ひずみ状態にあるき裂がき裂面に垂直な一様引張応力 σ を受ける場合、図3のようにき裂に対してある角度を持った面で塑性すべりが観察される。このような状況を想定し、この塑性すべりを刃状転位の連続分布で表現したモデルが提案され解析が行われている。このき裂モデルではモードIIにおけるDBCSモデルと同様に塑性すべり面においては転位の移動抵抗応力が材料のせん断降伏応力 τ_y に等しいとし、転位の分布関数は応力の釣合い式より決定することができ、これによって求められる解は、DBCSモデルと同じように塑性域の終端 (この場合き裂の片側に2箇所ずつある) における応力の特異性を打ち消すようなものになっていなければならない。しかしこのモデルに対する解析解を得ることは難しく数値的評価が行われているのみである。このモデルも塑性すべりを仮定する面に非連続面をあらかじめ想定し、刃状転位の堆積によって生じた非連続量を δ_{21} と考えることによって非連続モデルに対応させることができる。すなわち図3のような座標系においてすべり面に沿った任意の位置における非連続量は転位分布密度 $B_{II}(X_1)$ により

$$\delta_{21}(X_1) = \int_{X_1}^s B_{II}(X_1) dX_1 \dots\dots\dots (9)$$

のように表すことができる。またき裂先端における開口変位量 δ は

$$\delta = 2\delta_{21}(0) \sin \alpha \dots\dots\dots (10)$$

によって与えられることになる。しかしこの場合にもモードIIのDBCSモデルの場合とは異なり、非連続面内ではすべての応力成分が生じることになるので、転位モデルにおけるそれに対応するようにモードIの場合に行ったのと類似の構成則の特殊化が必要である。すなわち、非連続面におけるひずみおよびひずみ相当量の成分のうち塑性変形を生じるのは $\bar{\gamma}_{12}$ のみであるとし、降伏条件は $\tau_{12} = \tau_y$ によって与える。そして τ_{12} と $\bar{\gamma}_{12}$ の間の関係を硬化則として与える。弾性挙動については、連続体と考える領域と同様の応力成分とひずみおよびひずみ相当量成分間の線形弾性の構成関係を与える。このとき $\delta_{21}^e = 0$ 、さらに非連続面ではすべりだけが許されることに対応して $\delta_{22}^e = 0$ であることが求められるが、 $\bar{\gamma}_{12} = \delta_{21}^e/h_{21} \neq 0$, $\bar{\epsilon}_{22}^e = \delta_{22}^e/h_{22} = 0$ となるのが自然であることから、 $h_{21} \rightarrow 0$, $h_{22} \rightarrow 0$ とすればよい。いま $\llcorner h_n \llcorner = \llcorner h_n^e \llcorner = \llcorner h_n^p \llcorner$ とし平面ひずみ状態を仮定した場合の弾塑性マトリックスを求めると次のようになる (付録参照)。

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{12} \end{Bmatrix} = [D_{incl}^p] \begin{Bmatrix} d\epsilon_{11} \\ d\bar{\epsilon}_{22} \\ d\bar{\gamma}_{12} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (11)$$

ここで

$$[D_{incl}^p] = [D^e] - \frac{3E^2}{2(1+\nu)\{3E+2H'(1+\nu)\}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[D^e] = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

であり、硬化率 H' は

$$H' = 3 \cdot \frac{d\tau_{12}}{d\bar{\gamma}_{12}} \dots\dots\dots (12)$$

によって定義されるものであり、硬化を考えない場合

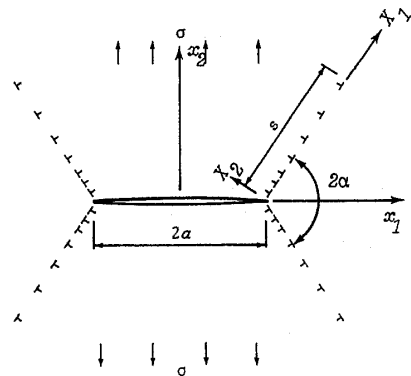


図3 傾斜した塑性域を持つき裂モデル

には $H'=0$ とすればよい。

4. 連続分布転位き裂モデルの有限要素解析

前章において連続分布転位論を応用した弾塑性き裂モデルが非連続面の構成関係を特殊化することにより非連続モデルと対応づけられることを示したが、一方非連続モデルは非連続面に対して非連続面要素とも呼ぶべき特殊な要素を導入することにより、増分理論に基づく弾塑性有限要素法により解析することが可能である⁽⁵⁾。本論文における有限要素解析では、新たにアイソパラメトリック要素により非連続面を定式化し、それをを用いた解析を行ったがその詳細は続報で触れることにして、本章では連続分布転位き裂モデルの解析を行う際に留意する点とその解析結果について述べる。

4.1 有限要素解析における留意点 非連続モデルにより連続分布転位き裂モデルを有限要素解析するには転位分布を考える非連続面以外は通常の連続体要素を用い、線形弾性体としての構成関係を与え、非連続面に非連続面要素を導入して3章で述べたような弾完全塑性体としての構成関係を与えればよい。しかし数値計算上安定した解を得るには硬化率を零とした完全塑性体としての構成則を与えるよりも、ある程度硬化率を持たせたほうが良い。例えばモード I の DBCS モデルの場合についていえば硬化特性を式(8)によって与え、 $H'/E \ll 1$ とすることにより近似的に完全塑性体としたものを用いるのが望ましいと考えられる。ただしこのときには式(8)により $d\sigma_{22}$ と $d\delta_{22}$ の間の関係としての硬化特性は h_{22} の値によって変化するので注意が必要である。また同じ例についていえば、 $\delta_{22} \rightarrow 0$ とするために h_{22} の値をできるだけ小さな値としなければならないが、あまり小さな値とすると全体剛性マトリックスが擬特異となるので、使用する要素の大きさも考慮のうえ、降伏後において δ_{22} に対して δ_{22} が無視できる程度のものとなるような h_{22} を用いれば実用上差支えないものと思われる。DBCS モデルにおけるその他のモード、また3.2節で述べた傾斜した塑性域を仮定したモデルについても同様のことが言える。

4.2 DBCS モデルの有限要素解析 本節では非連続モデルによりモード I, II について DBCS モデルに対応した有限要素解析を行い、結果をこれらに対する解析解と比較した。

解析対象は図4に示すように板幅に対するき裂長さの比を0.1とした中央き裂材であり、このき裂材が一樣引張応力 σ 、単純せん断応力 τ をそれぞれ受ける場合についての解析を行った。リガメント面には4節点

のアイソパラメトリック非連続面要素を採用し、それ以外の連続体領域はこれに適合する通常の4節点アイソパラメトリック要素を用い、図4の全領域を連続体要素156、非連続面要素22の要素に分割し、総節点数は204である。またき裂先端近傍の最小要素寸法はき裂半長 a の1/100とした。連続体領域はヤング率： $E=210.7$ GPa、ポアソン比： $\nu=0.3$ の線形弾性体であり、非連続面には前章で述べた弾塑性体としての構成則を適用し、 E, ν は連続体と同じ値を用い、降伏応力は $\sigma_Y=392$ MPa ($\tau_Y=226$ MPa)、硬化率は完全塑性体を模すために $H'=E/10^5$ (モード I では $H'=E/10^3$) とした。また非連続面の材料定数である、 h_n については $h_n = h_{22} = h_{21}$ と仮定し、さらに $h = h_{22} = h_{21}$ としてこれを0.1および1.0 mm と変化させて結果を比較した。

図5および図6は平面応力状態におけるモード I (Dugdale モデル)、平面ひずみにおけるモード II でのき裂先端変位 $\delta_{22}(a), \delta_{21}(a)$ の変化を応力に対して表したものであり、それぞれ無限板に対する解析解(実線)との比較が示されている。図中↓印はき裂先端要素の降伏開始点を示している。これらの図からわかるようにき裂先端変位はほぼ解析解に一致しているといえる。非連続面における弾性成分の影響は h の値を零に近づけることによって排除することができるが、ここでの結果はそれを裏付けるものとなっている。すなわち、図5において $h=1.0$ mm では解析解に対して、特にき裂先端要素が降伏した直後で高めの値となっており、き裂先端変位に対して弾性成分の影響が現れているが、 $h=0.1$ mm においてはこれが改善されているのがわかる。図6についても全く同様のことがいえる。これらの図からこの場合 $h=0.1$ mm 程度の値を用いれば、実用上問題ない精度でき裂先端変位の評価が可能であるといえる。

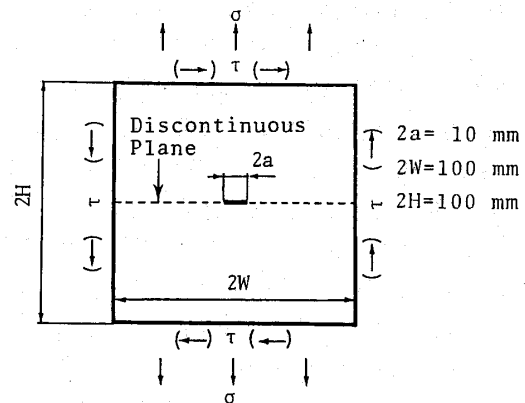


図4 単純引張りあるいは単純せん断を受けるき裂材

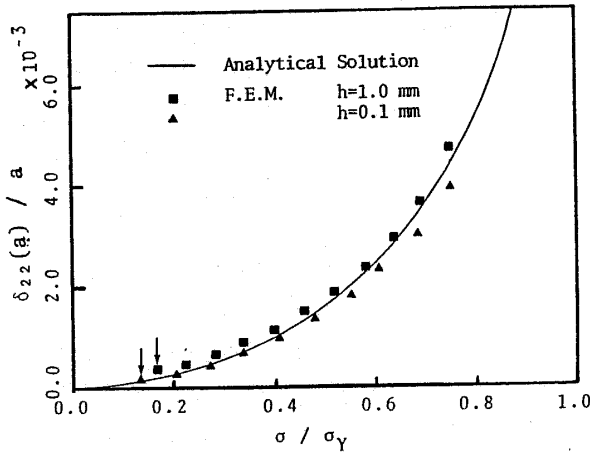


図5 DugdaleモデルにおけるC.T.O.Dの本解析と解析解との比較

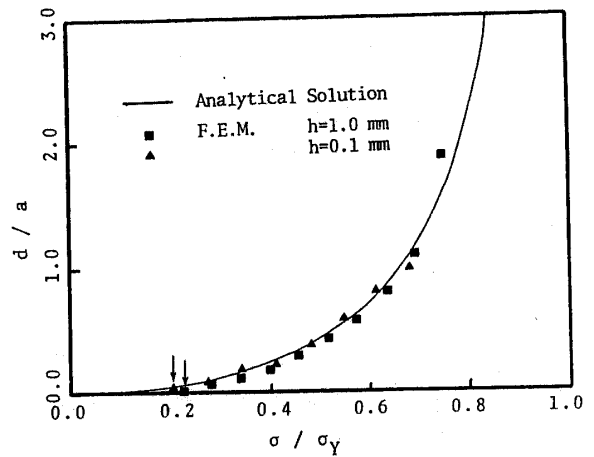


図7 Dugdaleモデルにおける塑性域長さの本解析と解析解との比較

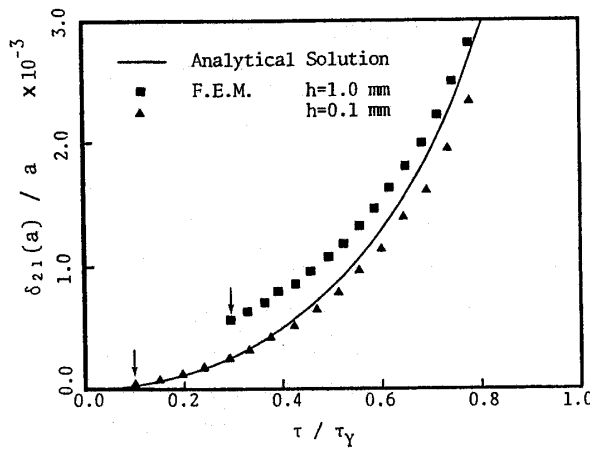


図6 B.C.SモデルにおけるC.T.O.Dの本解析と解析解との比較

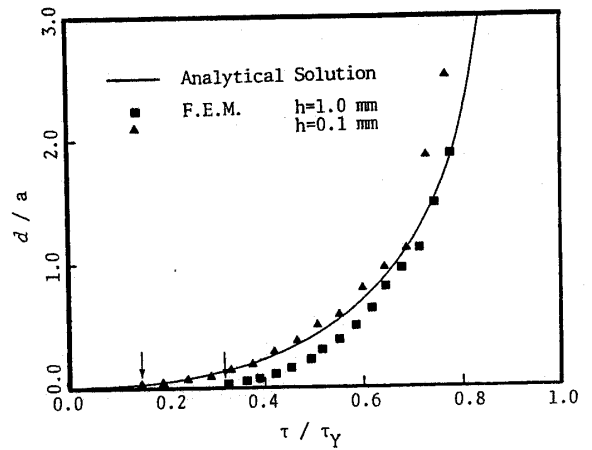


図8 B.C.S.モデルにおける塑性域長さの本解析と解析解との比較

図7, 8にはこれに対応した塑性域の長さの変化がやはり解析解とともに示されている。この場合にもほぼ解析解と一致した値が得られている。かなり塑性域が発達したところでは少し高めめの値をとる傾向にあるが、これは有限板の効果として理解できる。

4.3 傾斜した塑性域をもつき裂モデルの解析

ここでは式(11)の構成関係に基づき、図9に示すような中央き裂材が一様引張応力 σ を受ける場合について、非連続面をき裂先端よりき裂面に対し $\alpha=20^\circ, 40^\circ, 60^\circ$ および 80° の角度を持つように挿入した各場合についての解析を行った。連続体領域は、 $E=210.7$ GPa, $\nu=1/3$ の線形弾性体であり、非連続面はせん断降伏応力 $\tau_Y=226$ MPa, 硬化率 $H'=E/1000$ とし、また h_n については $h_n = L h_n^0 = L h_n^0$ を仮定し $h_{22}=0.001$ mm, $h_{21}=0.1$ mmとした。図10は解析に用いた要素分割を示しており、対称性を考慮して1/4の領域を、連続体要素(4節点アイソパラメトリッ

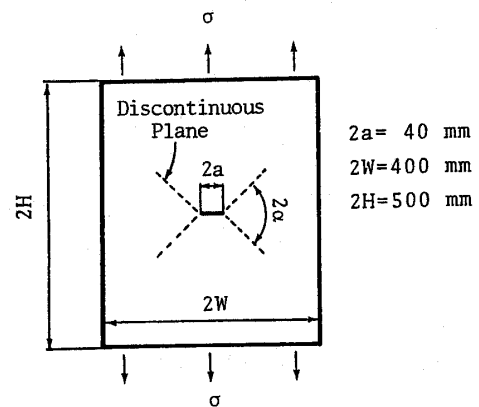


図9 解析に用いた試験片形状と負荷様式

ク要素) 439, 非連続面要素(4節点アイソパラメトリック非連続面要素) 35~37 (α によって異なる)に分割し、節点数は520~522である。また便宜上非連続面は試験片の外境界まで挿入してある。

図11は式(10)によって定義されたき裂先端開口変位の応力に対する変化を文献(3)に示されている数値解析から求められた近似式によるものと比較したものである。解析結果は $\alpha=20^\circ, 40^\circ$ および 60° に対しては近似式による値とほぼ一致しているのがわかる。 $\alpha=80^\circ$ では大きめの値となっているがこれは主に近似式に含まれる誤差の影響であると考えられる。

また図12は図3における塑性域長さ s の応力に対する変化をやはり同文献の近似式によるものと比較したものであり、この場合も $\alpha=80^\circ$ の場合以外はほぼ一致している。

これらの結果から非連続モデルにより連続分布転位論を応用した弾塑性き裂モデルに対応した解析を行えることがほぼ確かめられたものと思われる。

5. 結 言

非連続モデルのき裂問題への適用例として、非連続モデルとの連続分布転位論を応用した弾塑性き裂モデルとの対応関係を明らかにし、これを非連続面要素を導入した有限要素法により解析することによりその適用性を確認した。有限要素法により解析が行えるという利点を有しており、これにより、連続分布転位モデルを弾塑性き裂モデルとして広く活用していくための道が開かれたものと考えられる。

付 録

Dugdaleモデルでは塑性変形を生じるのは $\bar{\epsilon}_{22}$ のみであるので、応力・ひずみの構成関係は増分形で、

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} = [D^e] \begin{Bmatrix} d\epsilon_{11} \\ d\bar{\epsilon}_{22} \\ d\tilde{\gamma}_{12} \end{Bmatrix} - [D^e] \begin{Bmatrix} 0 \\ d\bar{\epsilon}_{22}^p \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (13)$$

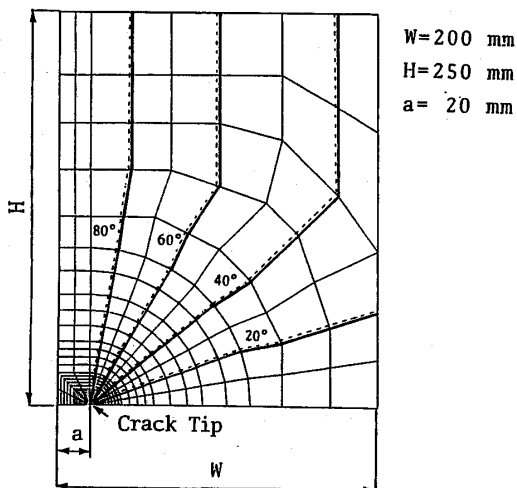


図10 解析に用いた要素分割 (1/4の領域)

のように与えられる。ここで $[D^e]$ は弾性構成マトリックスである。また降伏条件が $\sigma_{22}=\sigma_Y$ で与えられるので、塑性ポテンシャル： f は、

$$f^2 = \sigma_{22}^2 \dots\dots\dots (14)$$

とおける。このとき硬化率： H' は

$$H' = \frac{d\sigma_{22}}{d\bar{\epsilon}_{22}^p} \dots\dots\dots (15)$$

で定義され、式(13)は

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} = [D^e] \begin{Bmatrix} d\epsilon_{11} \\ d\bar{\epsilon}_{22} \\ d\tilde{\gamma}_{12} \end{Bmatrix} - \frac{1}{H'} [D^e] \begin{Bmatrix} 0 \\ d\sigma_{22} \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots (16)$$

となる。平面応力の場合、

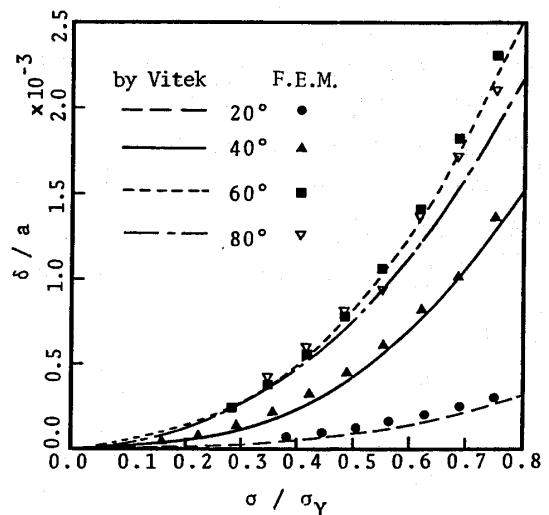


図11 CTODの本解析とVitekによる結果の比較

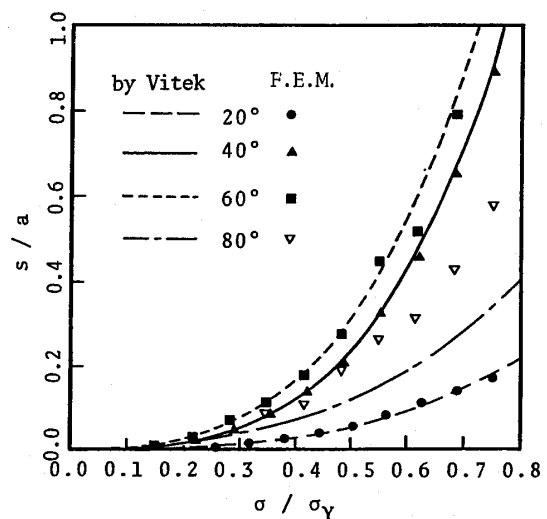


図12 塑性域長さの本解析とVitekによる結果の比較

$$[D^e] = E \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\nu^2} & \frac{\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu^2} & \frac{1}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (17)$$

であるので式(16)を応力増分について解くと、

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} = [D_{aug}^p] \begin{Bmatrix} d\epsilon_{11} \\ d\bar{\epsilon}_{22} \\ d\bar{\gamma}_{12} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (18)$$

$$[D_{aug}^p] = [D^e] - \frac{E^2}{(1-\nu^2)(E+H'(1-\nu^2))} \times \begin{bmatrix} \nu^2 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる。

せん断力のみにより塑性変形が生じる場合、その構成関係は増分形で次式のように与えられる。

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} = [D^e] \begin{Bmatrix} d\epsilon_{11} \\ d\bar{\epsilon}_{22} \\ d\bar{\gamma}_{12} \end{Bmatrix} - [D^e] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ d\bar{\gamma}_{12} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (19)$$

塑性ポテンシャルを Mises の降伏条件に対応して、

$$f^2 = 3\tau_{12}^2 \dots\dots\dots (20)$$

とすると、硬化率：H' は

$$H' = 3 \cdot \frac{d\tau_{12}}{d\bar{\gamma}_{12}} \dots\dots\dots (21)$$

となり式(19)は、

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} = [D^e] \begin{Bmatrix} d\epsilon_{11} \\ d\bar{\epsilon}_{22} \\ d\bar{\gamma}_{12} \end{Bmatrix} - \frac{3}{H'} [D^e] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (22)$$

となる。平面ひずみの場合、

$$[D^e] = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (23)$$

であるので、式(22)を応力増分について解くと

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{12} \end{Bmatrix} = [D_{incl}^p] \begin{Bmatrix} d\epsilon_{11} \\ d\bar{\epsilon}_{22} \\ d\bar{\gamma}_{12} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (24)$$

$$[D_{incl}^p] = [D^e] - \frac{3E^2}{2(1+\nu)(3E+2H'(1+\nu))}$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる。

文 献

- (1) Bilby, B. A., Cottrell, A. H. and Swinden, K. H., *Proc. R. Soc., Ser. A*, 272 (1963), 304.
- (2) Dugdale, D. S., *J. Mech. Phys. Solids*, 8 (1960), 100.
- (3) Vitek, V., *J. Mech. Phys. Solids*, 24 (1976), 263.
- (4) 渡辺・畔上, 機論, 51-469, A (昭60), 2154.
- (5) 渡辺・佐藤, 機論, 53-488, A (昭62), 786.