细环壳钱伟长方程的精确解

孙博华 1)

(开普半岛技术大学机械工程系，开普敦，南非)

摘要 1979 年钱伟长对细环壳进行了非常系统的研究，推导出一个细环壳复变量方程, 并给出了一个用连分式表达的级数精确解，但没有提及这个级数解是否可以化成为已知的特殊函数. 本文利用一个线性变换，把细环壳的钱伟长方程变换成 Mathieu 方程，用 Mathieu 函数表示了问题的解，这样就把钱伟长的连分式解与 Mathieu 函数联系了起来. 由于 Mathieu 函数是已知的特殊函数，这里的工作可为今后有关的细环壳具体计算带来方便.

关键词 环壳，细环壳，钱伟长方程，Mathieu 方程，Mathieu 函数

中图分类号：O343　**文献标识码**：A

doi：10.6052/1000-0879-15-262

环壳是中国现代力学的主要奠基人 —— 钱伟长和张维两人都曾做过关于壳体的系统研究工作. 圆环壳 (图 1) 形如救生圈或汽车轮胎，是一种形状比较复杂的旋转壳. 环壳是壳体理论中难度比较大的问题之一，钱伟长曾说 “环壳理论有两个特点：方程复杂和求解不易”[1].

环壳问题难于求解的数学原因是环壳的基本方程是变系数的高阶偏微分方程，其系数是分数型的且分母在环壳的二个几何顶点 “零点” 有奇异性，顶点两边的高斯曲率的变号还会使方程变性. 它是壳体理论中较复杂的问题之一 [2-5].

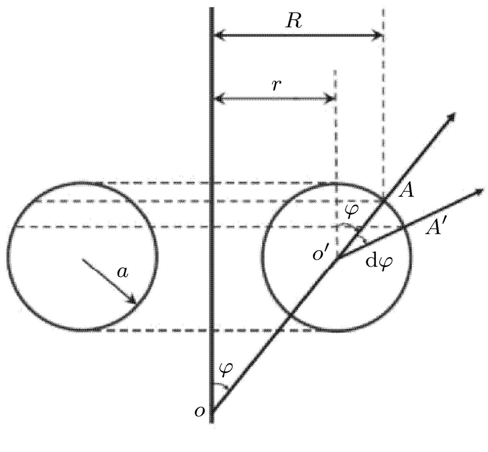

图 1 环壳的几何图形

有关环壳的研究是从德国亚琛工业大学开始的, 开创环壳研究的是 Hans Reissner. 从 Wissler[4] 的博士论文得知 Reissner 指导的博士生 Weihs[5] 在 1911 年完成其有关环壳的博士论文 (但我们至今没有找到 Weihs 的博士论文). 德国学者 Weihs[5] 在 1911 年分析薄轮胎在承受旋转对称和非旋转对称载荷的应力状态时，第一次用级数解对环壳的应力状态进行了分析. 瑞士苏黎世联邦高等工业大学的 Hans Wissler 在 1916 年利用 Reissner–Meissner 的旋转对称壳体微分方程以级数的形式系统地给出了在旋转对称载荷作用下环壳的弯曲应力状态解 [4]. 他得到的级数解对于细环壳收敛较快，但对于粗环壳收敛极慢，当时由于没有计算机, 不便在工程中应用. 求取对于粗环壳全域一致收敛的渐进解就变成了一个壳体理论难题，1944 年张维 (韦氏拼音 Chang Wei, 汉语拼音 Zhang Wei) 在国际上第一次求得了粗环壳一致收敛的渐进解 [6]，部分结果发表于 1949 年 [7].

由于环壳非常复杂，所以通常都使用复变量方程简化降低微分方程的阶数来研究. 对于细环壳的情况，Sun[8] 另辟途径，使用环壳的位移型方程系统地研究了细环壳的弯曲、振动和屈曲，第一次得到这个问题的位移场的封闭解；但非对称环壳问题的位移型方程的解至今还没有得到.

如果使用复变量方法，在 Love–Kirchhoff 薄壳假设下，一般圆环壳体的变形控制方程可以写成

$$(1+\alpha\sin\varphi)\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\varphi^2}-\alpha\cos\varphi\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi}+(2\mu\mathrm{i}\sin\varphi)V=2\mu P\cos\varphi \tag{1}$$

2015–10–09 收到第 1 稿，2015–12–02 收到修改稿.

1) 孙博华，南非科学院院士，主要研究领域为应用数学与力学. E-mail: sunb@cput.ac.za

引用格式： 孙博华. 细环壳钱伟长方程的精确解. 力学与实践, 2016, 38(5): 567-569

Sun Bohua. Exact solution of Qian’s equation of slender toroidal shells. *Mechanics in Engineering*, 2016, 38(5): 567-569

其中 $V=V(\varphi)$ 是复变量函数，P 是与载荷有关的量，α 为环壳的截面半径 a 和环的整体半径 R 的比值, $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 是复数单位, $\mu=\sqrt{3(1-\nu^2)}\dfrac{a^2}{Rh}$, 其中 ν 为泊松比，h 为壳体厚度.

方程 (1) 也称为 Novozhilov 环壳方程，Novozhilov[9] 曾给出了其渐进解. 钱伟长 [1] 也给出过方程 (1) 的级数解，Zhang 等 [10] 给出过方程 (1) 的一致收敛的渐进解.

1 细环壳钱伟长方程及其精确解

钱伟长 [1] 指出，多数实际问题如波纹管及热膨胀补偿器等问题都有一个共同特点，$\alpha=a/R$ 比 1 小得多，即

$$\alpha=\frac{a}{R}\ll 1 \tag{2}$$

如果略去 α 在方程 (1) 中的作用，就相当于把环壳作为细薄壁曲杆问题处理，这类问题被称为细环壳问题. 这种简化从文献上看，是由钱伟长首次提出并进行细致研究计算的.

在方程 (1) 中略去 α 的作用后，方程 (1) 简化成细环壳的方程

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\varphi^2}+(2\mu\mathrm{i}\sin\varphi)V=2\mu P\cos\varphi \tag{3}$$

这个方程是 1979 年钱伟长在细环壳的研究过程中得到的，为表达敬意称这个细环壳复变量方程为 “钱伟长方程”. 钱伟长对这个方程进行了非常细致的研究，给出了用连分式级数表达的精确解，并利用大量的篇幅对这个级数进行了分析和计算 [1].

虽然钱伟长给出了方程 (3) 用连分式表示的精确解，但对于 “方程 (3) 的解是否可以利用已知特殊函数来表示” 钱伟长没有提及. 现在的问题是能否把方程 (3) 转换成已知的方程并用已知特殊函数来表示其解.

本文的研究表明，方程 (3) 是可以转换成已知的 Mathieu 方程并可以用 Mathieu 函数表达其解.

具体思路是：利用一个自变量的线性变换，将细环壳的方程 (3) 变成 Mathieu 方程，进而用 Mathieu 函数表示方程的解，从而给这个问题一个肯定的回答. 这里的解 Sun[11] 曾于 2015 年在意大利的一个会议上报告过.

设线性变换

$$x=\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4} \tag{4}$$

方程 (3) 变成

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}+(8\mu\mathrm{i}\sin 2x)V=8\mu P\sin 2x \tag{5}$$

式 (5) 其实是 Mathieu 方程. Mathieu 方程的一般形式是

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+(\lambda-2q\cos 2x)y=f(x) \tag{6}$$

其中 λ 和 q 是常数. Mathieu 方程 (6) 的齐次解是

$$y^{\mathrm{H}}=C_1ce_m(q,x)+C_2se_m(q,x) \tag{7}$$

其中 C_k 为常复数，$ce_m(q,x)$ 和 $se_m(q,x)$ 分别是第一类和第二类 Mathieu 函数.

这样，方程 (5) 的齐次解就可以表示成

$$\begin{aligned}y^{\mathrm{H}}=C_1ce_m(-4\mathrm{i}\mu,\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4})+\\C_2se_m\Big(-4\mathrm{i}\mu,\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\Big)\end{aligned} \tag{8}$$

第一类和第二类 Mathieu 函数 $ce_m(q,x)$ 和 $se_m(q,x)$ 都是特殊函数，有成熟的研究结果，有关 Mathieu 方程的研究和解可以在文献 [12-16] 查到.

这些特殊函数都已被写进到了一些符号运算的商业软件，如 Maple, Mathematica，用这些商业软件很容易计算和作图. 在符号运算的商业软件中，如软件 Maple，用 Mathieu $C(\lambda,q,x)$ 和 Mathieu $S(\lambda,q,x)$ 分别表示 $ce_m(q,x)$ 和 $se_m(q,x)$，即，Mathieu $C(\lambda,q,x)=ce_m(q,x)$, Mathieu $S(\lambda,q,x)=se_m(q,x)$.

由于符号运算计算机化的发展，这些特殊函数已经不需要人工查表和自己计算，完全可以利用符号运算商业软件，非常容易写出这些特殊函数的级数表达式. 比如第一类 Mathieu C 和第二类 Mathieu S 函数用 Maple 的命令可以写成 Taylor 级数的形式，只要给 Maple 命令 [17]：series (Mathieu $C(a,q,z),z,6)$ 和 series (Mathieu $S(a,q,z),z,6)$ 就可以分别得到 $ce_m(q,x)$ 和 $se_m(q,x)$ 的 Taylor 展开式，阶数为 $O(x^6)$，如下

$$\left.\begin{aligned}&ce_m(q,x)=\mathrm{Mathieu}\,C(\lambda,q,x)=\\&\quad 1+\Big(q-\frac{1}{2}\lambda\Big)x^2+\\&\quad\Big(-\frac{1}{3}q+\frac{1}{6}q^2-\frac{1}{6}q\lambda+\frac{1}{24}\lambda^2\Big)x^4+\cdots\\&se_m(q,x)=\mathrm{Mathieu}\,S(\lambda,q,x)=\\&\quad x+\Big(\frac{1}{3}q-\frac{1}{6}\lambda\Big)x^3+\\&\quad\Big(\frac{1}{120}\lambda^2-\frac{1}{30}\lambda q+\frac{1}{30}q^2-\frac{1}{5}q\Big)x^5+\cdots\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

显然，对于钱伟长方程，参数 $\lambda=0$, $q=-4\mathrm{i}\mu$, 所以钱伟长方程 (5) 的解可以写成

$$\left.\begin{aligned}&ce_m(-4\mathrm{i}\mu,x)=\mathrm{Mathieu}\,C(0,-4\mathrm{i}\mu,x)=\\&\qquad 1-4\mathrm{i}\mu x^2+\frac{4}{3}\mu(\mathrm{i}+2\mu)x^4+\cdots\\&se_m(-4\mathrm{i}\mu,x)=\mathrm{Mathieu}\,S(0,-4\mathrm{i}\mu,x)=\\&\qquad x-\frac{4}{3}\mathrm{i}\mu x^3+\left(\frac{4}{5}\mathrm{i}\mu-\frac{8}{15}\mu^2\right)x^5+\cdots\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

从数学上讲，如果一个方程的解可以用某一特殊函数来表示，那么，这样的解 (8) 可以称为 “精确解”.

另外，方程 (5) 的特解，可以利用变换系数方法求解. 至此，就解决了细环壳钱伟长方程的解是否可以用特殊函数表示的问题.

2 讨 论

应当指出，这里的线性变换 (4) 只是把方程 (3) 进行了变换，除此再没有做任何近似简化，转换后的方程 (5) 与钱伟长方程 (3) 完全等价，所以这里用 Mathieu 函数表示的解，必然与钱伟长用连分式表达的级数解是完全一样的，没有任何的不同，都是精确解. 这也揭示了钱伟长的连分式级数解其实是 Mathieu 函数的一种具体形式.

应当指出，壳体理论的 Zurich 学派曾指出 [9]，特殊的旋转壳体的精确解都应当可以用超几何函数表示. 对于柱壳、球壳、锥壳的解都已经找到，但对于环壳的百年研究，一直都没有把其级数解表示成特殊函数 (一种超几何函数)，从本文的研究结果看，这个问题已经解决. 对于一般环壳 (非细环壳) 情况的方程 (1)，其精确解也可以用 Mathieu 函数表示，这方面的内容将另文介绍.

3 结 论

细环壳的钱伟长方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\varphi^2}+(2\mu\mathrm{i}\sin\varphi)V=2\mu P\cos\varphi$ 可以转换成 Mathieu 方程，其解可以用 Mathieu 函数完全表示. 就是说钱伟长的连分式解就是相应 Mathieu 函数解的具体表达式，这样，就达到了把钱伟长的连分式级数解与特殊函数联系起来的目的. 由于 Mathieu 函数是已知的特殊函数，这有助于细环壳的具体计算.

后记：钱伟长先生出生于 1912 年 10 月 9 日，其后半生最重要的学术贡献就是对于环形壳体解析理论的系统研究，钱先生证明了环壳级数解的收敛性问题，对该科学问题做出了非常重要的贡献，同时也给后人留下了一些待解问题，如细环壳钱伟长方程的解是否可以用特殊函数表示的问题，作者在此给出了这个问题的结果. 继承发展是对前辈最好的纪念，在先生诞辰之日作者愿以此文向钱先生致敬.

参 考 文 献

1 钱伟长. 应用数学与力学文集. 南京：江苏科技出版社，1979
2 Sun BH. Toroidal Shells. New York: Nova Science Publisher, 2012
3 孙博华. 环壳百年忆张维. 力学与实践，2013, 35(3)：94-97
4 Wissler H. Festigkeiberechung von Ringsflächen. [PhD Thesis]. Zurich: ETH Zurich, 1916
5 Weihs G. Über Spannungs- und Formönderungs zu stonde in dunnen Hohlreifen. [PhD Thesis]. Aachen: TUAachen, 1911
6 Chang Wei. Der Spannungszustand in Kreisringschale and ahnlichen Schalen mit Scheitekreisringen unter drehsymmetrischer Belastung. [PhD Thesis]. Berlin: Technischen Hochschulen Berlin, 1944
7 Zhang W. Toroidal Shells. *Science Report of Tsinghua University*, Ser A, 1949, (5): 289-349
8 Sun BH. Closed-form solution of axisymmetric slender elastic toroidal shells. *J Engrg Mech*, 2010, 136(10): 1281-1288
9 Novozhilov VV. The Theory of Thin Shells. Groningen: Noordhoff, 1959
10 Zhang RJ, Zhang W. Toroidal shells under nonsymmetrical loading. *Int J Solids and Structures*, 1994, 3(4): 2735-2750
11 Sun BH. Exact solution of some shells. The First Int. Conference on Shells, Plates and Beams, Bologna, Italy, 2015
12 Mathieu E. Mémoire sur Le mouvement vibratoire dune membrane de forme elliptique. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1868, (13): 137-203
13 Whittaker ET. On the general solution of Mathieu's equation. *Proc Edinburgh Math Soc*, 1914, 32: 75-80
14 McLachlan NW. Theory and Application of Mathieu Functions. Oxford: Clarendon Press, 1947
15 王竹溪，郭敦仁. 特殊函数概论. 北京：科学出版社，1979
16 Whittaker ET, Watson GN. A Course in Modern Analysis (4th edn). Cambridge: Cambridge University Press, 2011
17 Maple 软件. http://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=examples/Mathieu

(责任编辑：胡　漫)