

柯江. 混凝土弹塑性分析的新模型. 山西建筑, 2017, 43(11): 49-50.  
Jiang Ke. A new model for elasto-plastic analysis of concrete. Shanxi Architecture, 2017, 43(11): 49-50.  
DOI: [10.13719/j.cnki.cn14-1279/tu.2017.11.028](https://doi.org/10.13719/j.cnki.cn14-1279/tu.2017.11.028)

**注意:** 提高计算收敛性的一个有效措施是在软件的求解控制中打开稳定设置。在使用 Abaqus 或 Ansys 软件时, 本文中的杆件可以使用铸铁模型。本文中的模型是世界顶级的混凝土模型, 比 Ansys 自己提供的混凝土模型好的多。 (Note: An effective measure to improve the convergence of calculations is to turn on the stabilization setting in the solution control of the software. When using Abaqus or Ansys software, the bars in this article can use the cast iron model. The model in this article is the world's top concrete model, much better than the concrete model provided by Ansys itself.)

## 混凝土弹塑性分析的新模型

柯江

(陕西理工大学土建学院, 陕西 汉中 723001)

**摘要:** 对于混凝土弹塑性分析的平面应力问题和空间问题, 基于等效外力下的变形相同, 提出了一个桁架单元新模型, 并给出了实例验证, 与实体单元的计算结果吻合良好。  
**关键词:** 平面应力; 空间问题; 本构关系; 桁架单元  
**中图分类号:** TU311.41 **文献标识码:** A

### A new model for elasto-plastic analysis of concrete

Ke Jiang

School of Civil Engineering and Architecture, Shaanxi University of Technology, Hanzhong 723001, China

**Abstract:** For the plane stress problem and the spatial problem of the elasto-plastic analysis of concrete, a new truss element model is presented by using the deformations under the equivalent external forces are the same. Some examples is given, which is in good agreement with the calculation results of the solid element.  
**Key words:** plane stress; spatial problem; constitutive relation; truss element

混凝土弹塑性分析的传统方法涉及到多轴强度准则、多轴弹塑性本构关系, 混凝土的多轴强度准则不下几十个, 可以精确描述混凝土性能的多轴弹塑性本构关系模型, 目前还不存在。笔者为了简化计算, 提出了一个由若干杆件组成的桁架单元新模型, 采用新模型计算各向同性、正交各向异性的线弹性材料, 后来又推广到一般的弹塑性材料, 并给出了确定固体内任意一点的应力应变的方法<sup>[1-5]</sup>, 本文将给出另一种混凝土 (也适用于岩石等其它脆性材料) 的弹塑性分析新模型及计算实例。

#### 1 桁架单元新模型

材料参数:  $\varepsilon_{c0}$ 、 $\varepsilon_{cu}$ 、 $\varepsilon_{cmax}$  分别为材料单轴受压时的峰值应变、下降段的极限压应变、二次上升段的最大压应变,  $\varepsilon_{tu}$  为材料单轴受拉时的极限拉应变;  $f_t$ 、 $f_c$ 、 $\tau_0$ 、 $E$  分别为抗拉强度、抗压强度、抗剪强度、弹性模量;  $\gamma_{max}$  为材料纯剪切时的最大剪应变;  $\varepsilon_{cu}$  应满足  $\varepsilon_{cu} \geq 2\varepsilon_{c0} + f_t/E$ 。新单元模型包括平面桁架单元 (图 1, 适用于平面应力问题) 与空间桁架单元 (图 2, 适用于空间问题), 其建立方法与文献[5]相同, 只是物理意义不同, 导致其应力应变曲线不一样。

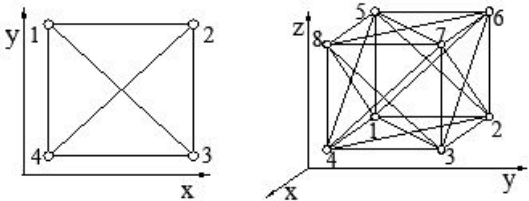


图 1 平面桁架单元

#### 1.1 平面应力问题

表 1~表 3 分别为材料单轴受压、单轴受拉、纯剪切时的应力应变曲线, 而桁架单元中的平行杆、斜杆的应力应变曲线见表 4~表 7, 表格中的参数,  $k_1 = 3k_5 f_t / f_c$ ;  $0 \leq k_2 \leq 1$ ;  $k_3 \geq k_2$ , 建议取 50;  $0 \leq k_4 \leq 1$ ;  $1/3 \leq k_5 < 1$ ;  $k_1 \leq k_6 \leq (4/3) - (f_t / f_c)$ ;  $\varepsilon_{tu} - k_4 f_t / (3E) < \gamma_{max} < \pi/2$ ;  $\varepsilon_{tu} = \varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c0} + (3 - 2k_4) f_t / E$ 。

表 1 材料单轴受压(一)

点	应变 $\varepsilon_{pc}$	应力 $\sigma_{pc}$
1	$k_1 f_c / E$	$k_1 f_c$
2	$\varepsilon_{c0}$	$f_c$
3	$\varepsilon_{cu}$	$k_2 f_c$
4	$\varepsilon_{cmax}$	$k_3 f_c$

表 2 材料单轴受拉(一)

点	应变 $\varepsilon_{pt}$	应力 $\sigma_{pt}$
1	$f_t/E$	$f_t$
2	$\varepsilon_{tu}$	$k_4 f_t$

表 3 材料受剪 (一)

点	剪应变 $\gamma_p$	剪应力 $\tau_p$
1	$2f_t/(3E)$	$0.25f_t$
2	$\varepsilon_{tu} - k_4 f_t/(3E)$	$\tau_0$
3	$\gamma_{\max}$	$k_4 \tau_0$

表 4 平行杆受压(一)

点	应变 $\varepsilon_{ppc}$	应力 $\sigma_{ppc}$
1	$k_6 f_c/E$	$k_6 f_c$
2	$\varepsilon_{c0}$	$(4f_c/3) - f_t$
3	$\varepsilon_{cu}$	$(4k_2 f_c/3) - k_4 f_t$
4	$\varepsilon_{c\max}$	$(4k_3 f_c/3) - k_4 f_t$

表 5 平行杆受拉(一)

点	应变 $\varepsilon_{ppt}$	应力 $\sigma_{ppt}$
1	$f_t/E$	$f_t$
2	$\varepsilon_{tu}$	$k_4 f_t$

表 6 斜杆受压(一)

点	应变 $\varepsilon_{pxc}$	应力 $\sigma_{pxc}$
1	$k_5 f_t/E$	$k_5 f_t$
2	$0.5(\varepsilon_{c0} - f_t/E)$	$f_t$
3	$0.5\varepsilon_{tu} - k_4 f_t/(6E)$	$(8\tau_0 - k_4 f_t)/3$

4	$\gamma_{\max}/2$	$k_4(8\tau_0 - f_t)/3$
---	-------------------	------------------------

表 7 斜杆受拉(一)

点	应变 $\varepsilon_{pxt}$	应力 $\sigma_{pxt}$
1	$f_t/(3E)$	$f_t/3$
2	$0.5\varepsilon_{tu} - k_4 f_t/(6E)$	$k_4 f_t/3$

## 1.2 空间问题

表 8~表 10 分别为材料单轴受压、单轴受拉、纯剪切时的应力应变曲线, 而桁架单元中的平行杆、斜杆的应力应变曲线见表 11~表 14。表格中的参数,  $k_4 \leq k_7 \leq 1$ ;  
 $\max\{k_4, (5k_7 - 2)/3\} \leq k_8 \leq (5k_7 - 2k_4)/3$ , 建议取  $k_8 = k_7$ ;  $k_9 = 1.5f_t/f_c$ ;  $k_9 \leq k_{10} \leq 2.5 - (2 + 1.5k_8)f_t/f_c$ ;  $\varepsilon_{tu} - 0.25k_4 f_t/E < \gamma_{\max} < \pi/2$ ;  $\varepsilon_{tu} = \varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c0} + (2 + 0.75k_8 - 1.75k_4)f_t/E$ 。

表 8 材料单轴受压(二)

点	应变 $\varepsilon_{kc}$	应力 $\sigma_{kc}$
1	$k_9 f_c/E$	$k_9 f_c$
2	$\varepsilon_{c0}$	$f_c$
3	$\varepsilon_{cu}$	$k_2 f_c$
4	$\varepsilon_{c\max}$	$k_3 f_c$

表 9 材料单轴受拉(二)

点	应变 $\varepsilon_{kt}$	应力 $\sigma_{kt}$
1	$f_t/E$	$f_t$
2	$(2 + 0.25k_8)f_t/E$	$k_7 f_t$
3	$\varepsilon_{tu}$	$k_4 f_t$

表 10 材料受剪 (二)

点	剪应变 $\gamma_k$	剪应力 $\tau_k$
1	$0.75f_t/E$	$0.3f_t$

2	$\varepsilon_{tu} - 0.25k_4f_t / E$	$\tau_0$
3	$\gamma_{\max}$	$k_4\tau_0$

表 11 平行杆受压(二)

点	应变 $\varepsilon_{kpc}$	应力 $\sigma_{kpc}$
1	$k_{10}f_c / E$	$k_{10}f_c$
2	$\varepsilon_{c0}$	$2.5f_c - (2 + 1.5k_8)f_t$
3	$\varepsilon_{cu}$	$2.5k_2f_c - 3.5k_4f_t$
4	$\varepsilon_{c\max}$	$2.5k_3f_c - 3.5k_4f_t$

表 12 平行杆受拉(二)

点	应变 $\varepsilon_{kpt}$	应力 $\sigma_{kpt}$
1	$f_t / E$	$f_t$
2	$(2 + 0.25k_8)f_t / E$	$(2.5k_7 - 1.5k_8)f_t$
3	$\varepsilon_{tu}$	$k_4f_t$

表 13 斜杆受压(二)

点	应变 $\varepsilon_{kxc}$	应力 $\sigma_{kxc}$
1	$(9/16)f_t / E$	$(9/16)f_t$
2	$0.5(\varepsilon_{c0} - f_t / E)$	$(0.5 + 0.375k_8)f_t$
3	$0.5\varepsilon_{tu} - 0.125k_4f_t / E$	$2.5\tau_0 - 0.375k_4f_t$
4	$\gamma_{\max} / 2$	$k_4(2.5\tau_0 - 0.375f_t)$

表 14 斜杆受拉(二)

点	应变 $\varepsilon_{kxt}$	应力 $\sigma_{kxt}$
1	$0.375f_t / E$	$0.375f_t$
2	$f_t / E$	$0.375k_8f_t$
3	$0.5\varepsilon_{tu} - 0.125k_4f_t / E$	$0.375k_4f_t$

## 2 计算实例与说明

一个混凝土简支梁，跨度 320 mm，截面高度 80 mm、宽度 1 mm，弹性模量  $E = 30000 \text{ N/mm}^2$ ，泊松比  $\nu = 1/3$ ， $f_c = 14.3 \text{ N/mm}^2$ ， $f_t = \tau_0 = 1.43 \text{ N/mm}^2$ ， $\varepsilon_{c0} = 0.002$ ，

$\varepsilon_{cu} = \varepsilon_{c\max} = 0.006$ ， $\varepsilon_{tu} = 0.004142$ ， $\gamma_{\max} = 0.1$ ，跨中施加位移荷载求极限承载力，分别按平面应力实体单元模型与平面桁架单元模型来计算，单元尺寸均为  $10 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ ，两种单元都划分为 256 个单元，平行杆截面面积为  $3.75 \text{ mm}^2$ ，斜杆截面面积为  $5.3033 \text{ mm}^2$ ，平面应力实体单元的应力应变曲线按表 1、表 2 取值，桁架单元中平行杆、斜杆的应力应变曲线按表 4~表 7 取值，其中  $k_1=0.24$ ， $k_2=k_3=0.1$ ， $k_4=0.01$ ， $k_5=0.8$ ， $k_6=0.5$ 。采用有限元软件计算可得：平面应力实体单元方法得到的极限承载力为 39.9 N，平面桁架单元方法得到的极限承载力为 35.9 N，两者吻合良好。另外说明：文献 [5] 中，“材料受剪、斜杆受压”的应力应变曲线最后 1 点的应力，分别采用本文表 3、表 6、表 10、表 13 的最后 1 点的应力，则会具有更加直观的物理意义。

## 3 结语

目前，混凝土的弹塑性计算问题非常复杂，而采用本文的桁架单元新模型，对桁架单元的各杆件赋予截面面积、弹性模量、受压及受拉应力应变曲线，则相当于对桁架单元赋予了一个多轴强度、多轴本构关系，经大量计算，多轴强度与试验资料吻合良好，而桁架单元的弹塑性多轴本构关系的合理性，可以从大量计算实例中得到验证。

## 参考文献：

- [1] 过镇海, 时旭东. 钢筋混凝土原理和分析[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.
- [2] 柯江. 实体结构求解的新方法[J]. 山西建筑, 2008, 34(9):112-113.
- [3] Ke Jiang. A New Element Model of Solid Bodies [C]. Applied Mechanics and Materials, 2012, Vols. 174-177: 2115-2118.
- [4] Ke Jiang. Applications of a New Element Model of Solid Bodies in Plasticity [C]. Advanced Materials Research, 2013, Vols.690-693: 1800-1805.
- [5] 柯江. 弹塑性固体的新单元模型[J]. 山西建筑, 2016, 42(31):46-47.