

柯江. 钢材弹塑性分析的新模型. 山西建筑, 2017, 43(14): 23-25

Jiang Ke. A new model for elasto-plastic analysis of steel. Shanxi Architecture, 2017, 43(14): 23-25

DOI: [10.13719/j.cnki.cn14-1279/tu.2017.14.013](https://doi.org/10.13719/j.cnki.cn14-1279/tu.2017.14.013)

注意: 提高非线性计算收敛性的一个有效措施是在软件的求解控制中打开稳定设置。在使用 Abaqus 或 Ansys 软件时, 本文中的杆件可以使用铸铁模型。(Note: An effective measure to improve the convergence of nonlinear calculations is to turn on the stabilization setting in the solution control of the software. When using Abaqus or Ansys software, the bars in this article can use the cast iron model.)

钢材弹塑性分析的新模型

柯 江

(陕西理工大学土建学院, 陕西 汉中 723001)

摘 要: 基于正六面体微元与桁架单元的受力变形等效, 建立了一个桁架单元新模型, 求解了钢材的弹塑性平面应力问题和空间问题, 并通过大量的计算实例, 验证了该新单元模型具有良好的计算精度。

关键词: 桁架单元; 弹塑性; 平面应力; 空间问题

中图分类号: TU311.41

文献标识码: A

A new model for elasto-plastic analysis of steel

Ke Jiang

School of Civil Engineering and Architecture, Shaanxi University of Technology, Hanzhong 723001, China

Abstract: Based on the equivalent stress and deformation of regular hexahedron microelement and truss element, a new truss element model is presented. It can be used to solve the elasto-plastic plane stress problem and spatial problem of steel. Through a large number of examples, the new element model can be found to have good accuracy.

Key words: truss element; elasto-plastic; plane stress; spatial problem

钢材是一种塑性材料, 目前按照传统理论的多轴屈服准则、多轴弹塑性本构关系模型, 进行弹塑性分析非常复杂。基于受力变形等效, 笔者提出了一个由多个杆件组成的桁架单元新模型, 采用新模型计算线弹性材料, 后来推广到理想弹塑性材料(存在缺陷: 适用范围小, 并且杆件受压屈服后无法传递更大荷载)、一般弹塑性材料^[1-5], 本文将提出一种具有普遍适用性的钢材(同样适用于其它塑性材料)弹塑性分析新模型, 文献[4-5]中塑性材料的新模型只是本文的两种特殊情况, 最后给出应用实例来验证。

1 桁架单元新模型

基于正六面体微元与桁架单元的受力变形等效, 建立桁架单元的新模型。新单元模型包括空间桁架单元(图1, 适用于空间问题)与平面桁架单元(图2, 适用于平面应力问题)。材料的泊松比 ν : 空间问题取 $\nu=0.25$, 平面应力问题取 $\nu=1/3$ 。E 为弹性模量, σ_0 为材料的拉伸(或压缩)屈服应力, τ_0 为材料的纯剪切屈服应力。 $\varepsilon_a, \varepsilon_u$ 分别为材料单轴受压应力应变曲线的水平屈服段的末点应变、极限压应变, $\varepsilon_b, \varepsilon_c$ 为两个中间控制点的竖向压应变; γ_0 为材料的纯剪切屈服应力所对应的剪应变。

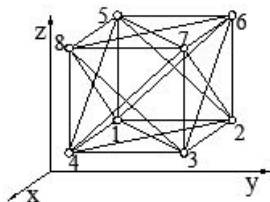


图1 空间桁架单元

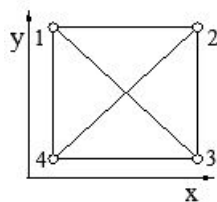


图2 平面桁架单元

下面把新单元模型中与坐标轴平行的杆件称为“平行杆”, 倾斜的杆件称为“斜杆”。由文献[2]可知, 当新单元在各坐标

轴方向的尺寸相等时, 空间桁架单元: 12 个平行杆的截面面积为 $A_1 = 0.1L^2$, 12 个斜杆的截面面积为 $A_2 = 0.2\sqrt{2}L^2$; 平面桁架单元: 4 个平行杆的截面面积为 $A_1 = 3Lh/8$, 2 个斜杆的截面面积为 $A_2 = 3\sqrt{2}Lh/8$; L 表示平行杆的长度, h 表示平面应力问题的厚度。

对于材料的剪切屈服应力与拉伸屈服应力的比值 ($n = \tau_0/\sigma_0$) 的不同范围(见表1、表2), 建立的桁架单元新模型是不同的(即应力应变曲线不一样)。为了简洁, 通过参数 c_0 (表1)对平面应力问题的不同 n 值时的模型采用统一的应力应变曲线形式来表示, 通过参数 c_1, c_2, c_3, c_4 (表2)对空间问题的不同 n 值时的模型采用统一的应力应变曲线形式来表示; c_3, c_4 可以用 c_1, c_2 来表示, 即:

$c_3 = 2c_1/(3E), c_4 = [2c_2 - (4c_1/3)]/E$ 。表3~表5分别为假定的材料单轴受压、单轴受拉、纯剪切时的应力应变曲线, 而推导得到的桁架单元中的平行杆、斜杆的应力应变曲线见表6~表9。当 $n \leq 0.5$ 时, 表3, 表5, 表6, 表8中的应力应变曲线控制点的数量一般会减少(即表格里面的部分控制点会重合)。平面应力问题: $0.5 \geq n > 0.25$ 时应满足 $\varepsilon_c = \gamma_0 + c_0/E$; $n = 0.25$ 时建议取 $\varepsilon_c = \varepsilon_a, k_1 = 1$ 。空间问题: $0.5 \geq n > 0.375$ 时应满足 $\varepsilon_c = \gamma_0 + c_4$; $0.375 \geq n > 0.3$ 时应满足 $\varepsilon_b = \varepsilon_c = \gamma_0 + c_4, k_0 = k_1$; $n = 0.3$ 时建议取 $k_1 = k_0 = 1, \varepsilon_c = \varepsilon_b = \varepsilon_a$ 。表5, 表6, 表8中的参数 c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 应根据所分析问题的 n 值按表1、表2确定; 其它参数取值应根据模型的物理意义按试验资料确定, 也可经验确定, k_0, k_1 的建议值见表10~表11, 建议取 $k_2 = 50$ 。表3~表8中的“×”表示该点无数据。

表1 平面应力问题不同 n 值时所对应的参数值

参数	$n > 0.5$	$0.5 \geq n \geq 0.25$
c_0	σ_0	$(8\tau_0 - \sigma_0)/3$

表 2 空间问题不同 n 值时所对应的参数值

参数	$n > 0.5$	$0.5 \geq n > 0.375$	$0.375 \geq n \geq 0.3$
c_1	$9\sigma_0/16$	$9\sigma_0/16$	$2.5\tau_0 - (3\sigma_0/8)$
c_2	$7\sigma_0/8$	$2.5\tau_0 - (3\sigma_0/8)$	$2.5\tau_0 - (3\sigma_0/8)$
c_3	$3\sigma_0/(8E)$	$3\sigma_0/(8E)$	$(5\tau_0 - 0.75\sigma_0)/(3E)$
c_4	σ_0/E	$(5\tau_0 - 1.5\sigma_0)/E$	$(5\tau_0 - 0.75\sigma_0)/(3E)$

表 3 材料单轴受压

点	平面应力问题	空间问题
	应变, 应力	应变, 应力
1	$\sigma_0/E, \sigma_0$	$\sigma_0/E, \sigma_0$
2	ε_a, σ_0	ε_a, σ_0
3	$\varepsilon_c, k_1\sigma_0$	$\varepsilon_b, k_0\sigma_0$
4	$\varepsilon_u, k_2\sigma_0$	$\varepsilon_c, k_1\sigma_0$
5	$\times, \times$	$\varepsilon_u, k_2\sigma_0$

表 4 材料单轴受拉

点	平面应力问题	空间问题
	应变, 应力	应变, 应力
1	$\sigma_0/E, \sigma_0$	$\sigma_0/E, \sigma_0$

表 5 材料受剪

点	平面应力问题	空间问题
	剪应变, 剪应力	剪应变, 剪应力
1	$2\sigma_0/(3E), \sigma_0/4$	$3\sigma_0/(4E), 0.3\sigma_0$
2	$\varepsilon_a - \sigma_0/(3E), \sigma_0/4$	$\varepsilon_a - \sigma_0/(4E), 0.3\sigma_0$
3	$\varepsilon_c - c_0/E, (\sigma_0 + 3c_0)/8$	$\varepsilon_b - c_3, 0.15\sigma_0 + 0.4c_1$
4	γ_0, τ_0	$\varepsilon_c - c_4, 0.15\sigma_0 + 0.4c_2$
5	$\times, \times$	γ_0, τ_0

表 6 平行杆受压

点	平面应力问题	空间问题
	应变, 应力	应变, 应力
1	$\sigma_0/E, \sigma_0$	$\sigma_0/E, \sigma_0$
2	ε_a, σ_0	ε_a, σ_0
3	$\varepsilon_c, (4k_1\sigma_0/3) - c_0$	$\varepsilon_b, 2.5k_0\sigma_0 - 4c_1$
4	$\varepsilon_u, (4k_2\sigma_0/3) - c_0$	$\varepsilon_c, 2.5k_1\sigma_0 - 4c_2$
5	$\times, \times$	$\varepsilon_u, 2.5k_2\sigma_0 - 4c_2$

表 7 平行杆受拉

点	平面应力问题	空间问题
	应变, 应力	应变, 应力
1	$\sigma_0/E, \sigma_0$	$\sigma_0/E, \sigma_0$

表 8 斜杆受压

点	平面应力问题	空间问题
	应变, 应力	应变, 应力
1	$\sigma_0/(3E), \sigma_0/3$	$3\sigma_0/(8E), 3\sigma_0/8$
2	$0.5\varepsilon_a - \sigma_0/(6E), \sigma_0/3$	$0.5\varepsilon_a - \sigma_0/(8E), 3\sigma_0/8$
3	$0.5(\varepsilon_c - c_0/E), c_0$	$0.5(\varepsilon_b - c_3), c_1$
4	$0.5\gamma_0, (8\tau_0 - \sigma_0)/3$	$0.5(\varepsilon_c - c_4), c_2$
5	$\times, \times$	$0.5\gamma_0, 2.5\tau_0 - (3\sigma_0/8)$

表 9 斜杆受拉

点	平面应力问题	空间问题
	应变, 应力	应变, 应力
1	$\sigma_0/(3E), \sigma_0/3$	$3\sigma_0/(8E), 3\sigma_0/8$

表 10 平面应力问题不同 n 值时 k_1 的建议值

参数	$n > 0.5$	$0.5 \geq n \geq 0.25$
k_1	3	$(8\tau_0/\sigma_0) - 1$

表 11 空间问题不同 n 值时 k_0, k_1 的建议值

参数	$n > 0.5$	$0.5 \geq n > 0.375$	$0.375 \geq n \geq 0.3$
k_0	1.5	1.5	$20\tau_0/(3\sigma_0) - 1$

k_1	7/3	$20\tau_0/(3\sigma_0)-1$	$20\tau_0/(3\sigma_0)-1$
-------	-----	--------------------------	--------------------------

2 应用实例

一简支钢梁，跨度 28 mm，截面高度 4 mm、宽度 1 mm，弹性模量 $E=200000 \text{ N/mm}^2$ ，泊松比 $\nu=1/3$ ，屈服应力 $\sigma_0=300 \text{ N/mm}^2$ ， $n=\tau_0/\sigma_0=0.5$ ， $\varepsilon_a=0.05$ ， $\varepsilon_c=0.1015$ ， $\varepsilon_u=0.5$ ， $\gamma_0=0.1$ ，在跨中施加竖直向下的位移荷载求所能承受的极限荷载，按平面应力问题所对应的平面桁架单元新模型来计算，单元尺寸均为 $1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$ ，一共划分为 112 个新单元，平行杆截面面积为 0.375 mm^2 ，斜杆截面面积为 0.53033 mm^2 ，桁架单元中平行杆、斜杆的应力应变曲线按表 6～表 9 取值，其中 $k_1=3$ ， $k_2=50$ ， $c_0=300 \text{ N/mm}^2$ 。采用有限元软件计算可得跨中的竖向荷载与竖向位移关系曲线(图 3)，该曲线水平段所对应的荷载为 171.429 N，而按照理想弹塑性模型的塑性力学理论解为 171.429 N，两者完全吻合。

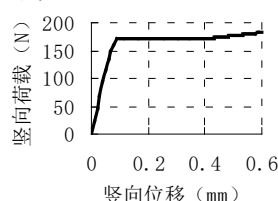


图 3 简支梁跨中的竖向荷载与竖向位移关系曲线

3 结语

目前，钢材的弹塑性分析涉及多轴本构关系、多轴屈服准则，不管是理论计算还是数值计算都非常复杂，本文提出的桁架单元新模型，计算时只需要输入单轴受压、受拉应力应变曲线，因此计算很简单，经过大量对比计算，可以发现新单元模型的计算精度良好。

参考文献：

- [1]王仁,黄文彬,黄筑平. 塑性力学引论[M]. 北京:北京大学出版社,1992.
- [2]柯 江. 实体结构求解的新方法[J]. 山西建筑, 2008, 34(9):112-113.
- [3]Ke Jiang. A New Element Model of Solid Bodies[J]. Applied Mechanics and Materials,2012(174-177):2115-2118.
- [4]柯 江. 基于固体新单元模型分析理想弹塑性问题[J]. 山西建筑,2012,38(36):42-43.
- [5]柯 江. 弹塑性固体的新单元模型[J]. 山西建筑,2016,42(31):46-47.