

10. MFLE e criteri di resistenza per elementi intagliati

10.1. Generalità

L'analisi dei meccanismi di cedimento dei compositi eseguita ai capitoli precedenti ha evidenziato come la rottura del materiale sia sempre accompagnata dalla formazione e propagazione di cricche e difetti. Nonostante ciò, spesso il legame tra resistenza del materiale e difetti viene per semplicità trascurato. Gli stessi criteri di resistenza esposti al cap.6 sono stati enunciati considerando praticamente il materiale macroscopicamente continuo, cioè privo di difetti, cricche, vuoti ecc.

Nella realtà invece, a causa della natura multifase nonché dei processi di produzione utilizzati, un materiale composito è sempre sede di difetti come cricche, vuoti ecc. Inoltre, la percentuale di tali difetti è in genere ben superiore a quella riscontrabile in un materiale tradizionale.

Tali difetti provocano come è noto effetti di concentrazione delle tensioni, e similmente a quanto accade per i materiali isotropi, essi sono sempre responsabili della rottura. I concetti della MFLE, sviluppati propriamente per i materiali convenzionali (isotropi) possono essere pertanto in linea di principio estesi anche ai materiali compositi (anisotropi), che possono essere considerati omogenei a scala macroscopica.

Per esempio, può essere esteso ai compositi l'approccio energetico di Griffith secondo il quale condizione necessaria affinché si abbia la formazione di una certa superficie di frattura e che l'energia rilasciata ΔU sia maggiore o uguale della corrispondente energia ΔS necessaria per la formazione della superficie di frattura stessa, cioè:

$$\Delta U \geq \Delta S \quad (1)$$

essendo l'energia rilasciata ΔU legata alle caratteristiche elastiche del provino (materiale, geometria, orientamento difetto ecc.) ed al tipo di sollecitazione mentre l'energia ΔS necessaria alla formazione della frattura è intimamente legata al materiale essendo nient'altro che l'energia necessaria a rompere i legami molecolari.

L'energia rilasciata può facilmente essere determinata sperimentalmente con procedura analoga a quella usata per i materiali omogenei isotropi. Considerando per esempio un provino soggetto ad uno sforzo di trazione P con processo di caricamento a deformazione costante, l'energia elastica immagazzinata e la variazione di questa corrispondente alla formazione di una superficie di frattura sono dati da:

$$U = \frac{1}{2} P \delta \Rightarrow \Delta U = (\frac{1}{2} \delta) \Delta P \quad (2)$$

Dalla misura della variazione del carico applicato è possibile quindi risalire alla energia rilasciata. L'energia necessaria alla formazione della superficie di rottura si ottiene invece in prove di rottura utilizzando la (1) col segno di eguaglianza.

Alternativamente, come è stato fatto per gli isotropi, l'energia di deformazione elastica rilasciata ΔU può essere determinata a partire dalla distribuzione delle tensioni presenti in prossimità dell'apice della cricca. Per i materiali isotropi è stato trovato (Irwin) che nel modo di crescita I (*opening mode*), l'energia elastica rilasciata è legata allo stato tensionale tramite la semplice relazione:

$$\Delta U = \frac{\pi K_I^2}{E} \quad (3)$$

Per quanto concerne lo stato tensionale presente in prossimità della cricca, anche per i compositi, nella ipotesi di materiale microscopicamente omogeneo, sono state trovate delle relazioni teoriche

formalmente simili a quelle degli isotropi:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{S_1 S_2}{S_1 - S_2} \left(\frac{S_2}{\psi_2^2} - \frac{S_1}{\psi_1^2} \right) \right\} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{S_1 - S_2} \left(\frac{S_2^2}{\psi_2^{1/2}} - \frac{S_1^2}{\psi_1^{1/2}} \right) \right\} \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{S_1 - S_2} \left(\frac{S_1}{\psi_2^{1/2}} - \frac{S_2}{\psi_1^{1/2}} \right) \right\} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{S_1 - S_2} \left(\frac{1}{\psi_2^{1/2}} - \frac{1}{\psi_1^{1/2}} \right) \right\} \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{S_1 S_2}{S_1 - S_2} \left(\frac{1}{\psi_1^{1/2}} - \frac{1}{\psi_2^{1/2}} \right) \right\} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{S_1 - S_2} \left(\frac{S_1}{\psi_1^{1/2}} - \frac{S_2}{\psi_2^{1/2}} \right) \right\}\end{aligned} \quad (4)$$

in cui è, come per gli isotropi:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}; \quad K_{II} = \tau \sqrt{\pi a}. \quad (5)$$

ed inoltre

$$\psi_1 = \cos \vartheta + S_1 \sin \vartheta; \quad \psi_2 = \cos \vartheta + S_2 \sin \vartheta \quad (6)$$

Nelle (6) S_1 ed S_2 sono le radici, in generale complesse, dell'equazione caratteristica che si ottiene dalla imposizione del soddisfacimento delle equazioni di equilibrio e di compatibilità scritte in termini di funzione delle tensioni di Airy. Tali radici sono legate alle caratteristiche del materiale, all'orientamento della cricca ecc.

L'applicazione del metodo energetico ai materiali compositi subisce rispetto al caso isotropo ovvie complicazioni a causa del fatto che nei compositi le superfici di frattura possono essere interne alla matrice, interne alle fibre o lungo l'interfaccia e ad ognuna di queste condizioni corrisponde una diversa energia di rottura.

Si osservi in particolare che mentre nei metalli la cricca si forma e si propaga sempre in direzione ortogonale al carico applicato, nei compositi la direzione di propagazione di un difetto può subire successive variazioni in relazione ai materiali via via incontrati (fibre, lamine diverse ecc) ed alle specifiche modalità di sollecitazione.

A queste complicazioni si aggiungono anche quelle legate alla complessità delle calcolazioni necessarie (eq.4-6). Per questo sono stati sviluppati, in alternativa al metodo energetico, degli approcci più semplici che consentono, se correttamente applicati, una attendibile previsione della resistenza del materiale in presenza di difetti e/o intagli.

10. 2. Criteri di resistenza di Whitney - Nuismer

Whitney e Nuismer hanno sviluppato un approccio alla valutazione della resistenza applicabile al caso di elementi con intaglio, alternativo al classico criterio basato sull'uso del fattore di concentrazione delle tensioni. Considerando per esempio una lastra forata di grandi dimensioni, il criterio del fattore di concentrazione delle tensioni prevede che la rottura di tale elemento si verifica allorquando la massima tensione, pari la prodotto della tensione nominale per il coefficiente di concentrazione delle tensioni, eguaglia la tensione di rottura del materiale. Nessuna importanza ha quindi in questo metodo la dimensione del foro purché piccola rispetto a quella della lastra ($K_t = \text{costante}$).

In realtà, in presenza di elevate concentrazioni di tensione, la resistenza è pure legata al valore del gradiente delle tensioni che evidentemente, a pari tensione massima, è a sua volta legato alle dimensioni dell'intaglio stesso. Si ricordi, per esempio, che nel caso di cricca su piastra infinita in

applicazione della MFLE la resistenza dell'elemento è legata anche alle dimensioni della cricca. Il fattore di intensificazione delle tensioni K_I risulta infatti proporzionale alle dimensioni della cricca secondo una relazione del tipo $K_I = \beta \sigma(a^{1/2})$.

Nella progettazione si può tener conto del gradiente delle tensioni in vari modi. Un modo è quello di considerare il valor che la tensione assume ad una certa distanza d_o dall'apice dell'intaglio. Un altro modo consiste nel considerare invece il valor medio delle tensioni in un certo intervallo a_o adiacente l'apice dell'intaglio o cricca. Si ottengono così i due criteri di resistenza sviluppati da Whitney e Nuismer: *il criterio della tensione puntuale* ed *il criterio della tensione media*.

10.2.1 Criterio della tensione puntuale (*point-stress criterion*)

In questo criterio si assume che il cedimento dell'elemento si verifica allorché la tensione parallela alla direzione di applicazione del carico misurata nel punto distante d_o dall'apice dell'intaglio (fig.1a,b) eguaglia il valore della resistenza a rottura del materiale.

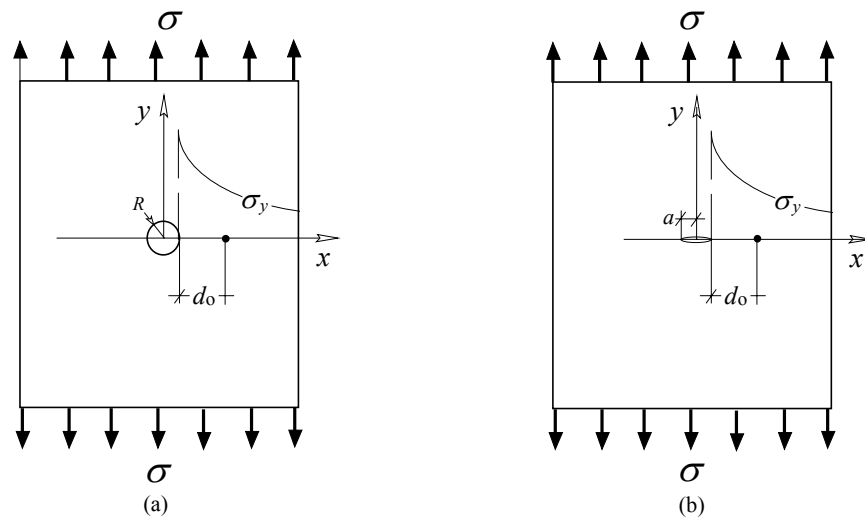


Fig.1 – Criterio della tensione puntuale: piastra forata (a) e con cricca (b) passante centrata

Per esempio, considerando il caso di una piastra forata con foro di raggio R soggetta ad una carico monoassiale σ e considerando altresì un riferimento cartesiano ortogonale con origine nel centro del foro ed asse y orientato in direzione del carico (vedi fig.1a), la condizione limite è rappresentata dalla eguaglianza:

$$\sigma_y(R + d_o) = \sigma_R \quad (7)$$

Tenendo conto allora che per un composito (ortotropo) la Teoria dell'elasticità fornisce la seguente espressione della tensione σ_y in prossimità del foro:

$$\sigma_y(x,0) = \frac{\sigma}{2} \left\{ 2 + \left(\frac{R}{x}\right)^2 + 3\left(\frac{R}{x}\right)^4 - (K_t - 3) \left[5\left(\frac{R}{x}\right)^6 - 7\left(\frac{R}{x}\right)^8 \right] \right\} = \sigma \cdot f(R/x, K_t) \quad (8)$$

essendo K_t il fattore di concentrazione delle tensioni per materiale ortotropo. In questo caso il fattore di concentrazione delle tensioni non è più un parametro geometrico in quanto varia con il grado di anisotropia del materiale (laminato) e risulta dato da:

$$K_t = 1 + \sqrt{\frac{2}{A_{22}} (\sqrt{A_{11}A_{22}} - A_{12} + \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{2A_{33}})} \quad (9)$$

Nella (9) i termini A_{ij} sono gli elementi della matrice di rigidezza del laminato considerato, ottenuti come illustrato a proposito della teoria classica della laminazione (cap.5). Per una semplice lamina unidirezionale tali elementi coincidono con quelli della matrice di rigidezza $[\tilde{E}]$ relativa al riferimento cartesiano individuato dal carico applicato (cap.4). In particolare per carico allineato con le direzioni principali del materiale, per esempio con la direzione longitudinale, si ha:

$$K_t = 1 + \sqrt{2\left(\frac{E_L}{E_T} - \nu_{LT}\right) + \frac{E_L}{G_{LT}}} \quad (10)$$

In ogni caso, sostituendo la (8) nella (7) si ottiene il legame tra la tensione (nominale) di rottura $\sigma_{R,foro}$ dell'elemento intagliato (forato) e la tensione di rottura σ_R del materiale (laminato). Fissato il materiale (e quindi σ_R e K_t) si ha:

$$\frac{\sigma_{R,foro}}{\sigma_R} = 1 / f\left(\frac{R}{R+d_o}, K_t\right) = g\left(\frac{R}{R+d_o}, K_t\right) \quad (11)$$

La tensione di rottura dell'elemento intagliato è pertanto legata alla tensione di rottura del materiale, al coefficiente di intaglio ed alla distanza d_o . L'uso di tale criterio di resistenza necessita quindi della conoscenza della tensione di rottura del materiale (nota) e della distanza d_o anche essa caratteristica del materiale. Quest'ultima può essere determinata con una prova sperimentale eseguita con provino forato di raggio arbitrario purché piccolo.

Questo criterio può essere applicato anche al caso in cui l'intaglio ha forma diversa dal foro circolare purché sia nota la relazione analitica che descrive lo stato tensionale davanti l'apice dell'intaglio.

In particolare in presenza di una cricca passante centrata in lastra indefinita (vedi fig.1b) essendo per la Teoria della Elasticità (Lekhnitskii):

$$\sigma_y(x,0) = \sigma \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad \text{per } x > a \quad (12)$$

per lo stesso criterio, considerando il punto distante d_o dall'apice della cricca si ottiene la relazione analoga alla (11):

$$\frac{\sigma_{R,crack}}{\sigma_R} = \frac{\sqrt{(a+d_o)^2 - a^2}}{(a+d_o)} = \sqrt{1-p^2} \quad \text{con } p = a/(a+d_o) \quad (13)$$

Ovviamente in questo caso si può mettere in relazione la resistenza a frattura dell'elemento, individuata dal fattore critico K_{Ic} , con la resistenza a rottura in presenza di cricca $\sigma_{R,crack}$ e quindi con la resistenza a rottura semplice, essendo come è noto:

$$K_{Ic} = \sigma_{R,crack} \sqrt{\pi a} = \sigma_R \sqrt{\pi a(1-p^2)} \quad \text{con } p = a/(a+d_o) \quad (14)$$

10.2.2 Criterio della tensione media (*average-stress criterion*)

Il criterio della tensione media risulta analogo al criterio della tensione puntuale con la sola variante che piuttosto che far riferimento alla tensione nel punto distante d_o , fa riferimento al valor medio della tensione presente nell'intervallo di ampiezza a_o davanti l'apice dell'intaglio (vedi fig.2a,b).

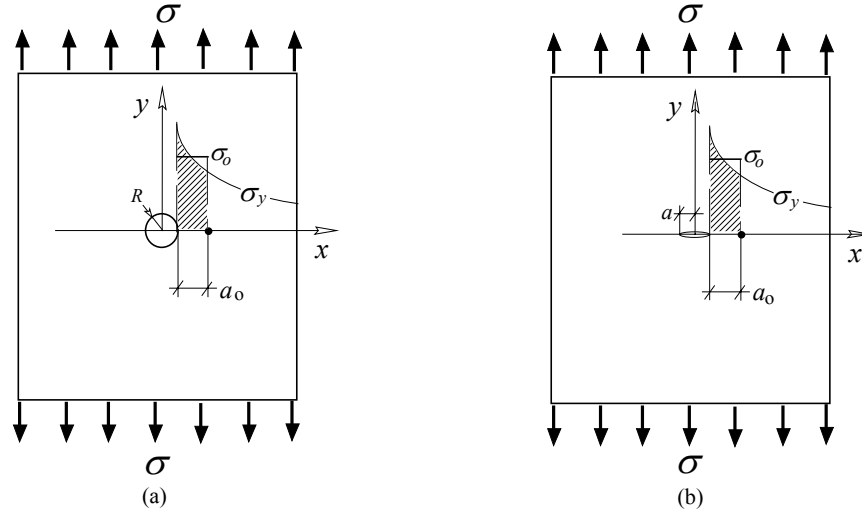


Fig.2 – Criterio della tensione media: piastra forata (a) e con cricca (b) passante centrata.

Considerando per esempio il caso di foro circolare, la condizione limite è individuata dalla relazione:

$$\sigma_{media} = \frac{1}{a_o} \int_R^{R+a_o} \sigma_y(x,0) dx = \sigma_R \quad (15)$$

Sostituendo la (8) nella (15) ed integrando si ottiene in pratica una relazione analoga alla (11):

$$\frac{\sigma_{R,foro}}{\sigma_R} = g'(R, a_o, K_t) \quad (16)$$

Si lascia al lettore il calcolo della esatta espressione di g e g' . Procedendo in modo analogo, per il caso di cricca passante centrata su piastra indefinita si ottiene una relazione formalmente simile alla (13) e cioè:

$$\frac{\sigma_{R,crack}}{\sigma_R} = \sqrt{\frac{1-p'}{1+p'}} \quad \text{con} \quad p' = a/(a+a_o) \quad (17)$$

In termini di fattore critico si ha invece, in applicazione della (14):

$$K_{Ic} = \sigma_{R,crack} \sqrt{\pi a} = \sigma_R \sqrt{\pi a \frac{1-p}{1+p}} \quad \text{con} \quad p = a/(a+d_o) \quad (18)$$

10.3. Validità, limitazioni ed estensioni

I criteri sopra illustrati trovano un buon accordo sperimentale per laminati in fibra di vetro-resina epossidica come è illustrato nelle seguenti figure riferentesi al caso di piastra forata (fig.3a) e con cricca passante centrata (fig.3b).

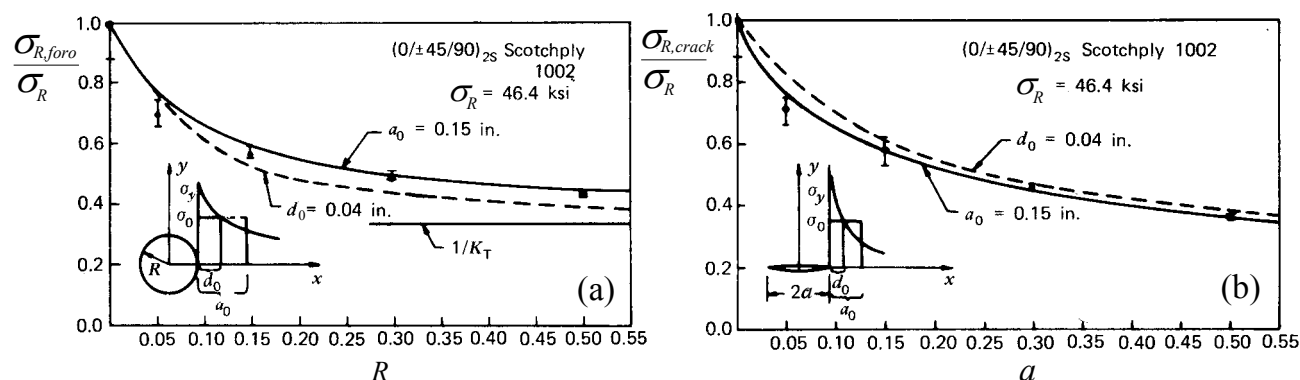


Fig.3 - Resistenza a rottura di laminato glass-epoxy $[0/\pm 45/90]_{2S}$ con foro (a) e cricca (b).

Nella fig.3 per entrambi i criteri di resistenza sono pure evidenziati in entrambi i casi (foro e cricca) i valori delle distanze a_0 e d_0 caratteristiche del materiale. Si vede come tali costanti sono legate da una relazione del tipo $a_0 \approx 4d_0$.

L'accordo con l'esperienza è meno soddisfacente per laminati in fibra di carbonio-resina epossidica, per i quali i risultati sperimentali presentano un elevato sparpagliamento e maggiori scarti: in questo caso pertanto maggiori indagini sono necessarie per la validazione e l'applicazione di entrambi i criteri.

L'utilità di questi criteri è comunque strettamente legata alla validità della ipotesi che le distanze caratteristiche sono indipendenti dalla particolare configurazione dei difetti e dal particolare laminato considerato. In pratica ciò risulta vero solo se il comportamento del materiale è dipendente in larga misura dal comportamento delle fibre (*fiber-dominated composite*).

Ovviamente a parità di altre condizioni, al crescere dei difetti presenti nel materiale, cresce pure la distanza caratteristica dovendosi abbassare conseguentemente la resistenza a rottura. In prima approssimazione si può supporre che al variare della entità dei difetti propri del materiale il rapporto delle distanze caratteristiche sia eguale a quello dei corrispondenti valori di tensione di rottura statica, cioè si abbia:

$$\frac{a_o'}{a_o} = \frac{d_o'}{d_o} = \frac{\sigma_R'}{\sigma_R} \quad (19)$$

Entrambi i criteri sono largamente utilizzati nella progettazione e si prestano all'uso di strumenti di calcolo automatico. Le previsioni ottenute con tali criteri sono in ottimo accordo coi dati sperimentali (vedi tab.1).

Tab. 1 – Test sperimentale del criterio della tensione media e valore della distanza caratteristica d_0 .

Laminato	Orient. cricca	$\sigma_{R,crack} / \sigma_R$ [%]		d_0
		Sperim.	Teoria	
$(0_2/\pm 45/0_2/90/0)_S$	45	53.4	50.5	0.575
$(0/\pm 45/\pm 90)_{2S}$	45	51.4	50.7	0.575
$(0_2/\pm 45/0_2/90/0)_S$	90	44.1	44.2	0.575
$(0/\pm 45/\pm 90)_{2S}$	90	47.2	44.3	0.575

La tabella I mostra a titolo di esempio i risultati di alcuni tests condotti considerando vari laminati simmetrici fibra di vetro-resina epossidica con cricca ortogonale al carico e inclinata con angolo di 45° rispetto a questo.

Si vede come la distanza caratteristica risulta praticamente costante e lo scarto tra previsioni teoriche e risultati sperimentali sempre inferiore al 6%.