

## 2. Micromeccanica

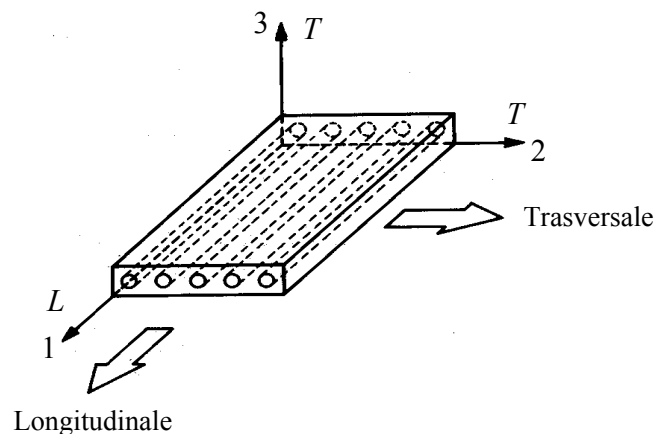
Con il termine “micromeccanica” si intende lo studio dei materiali compositi eseguito tenendo conto delle interazioni tra i materiali costituenti. La micromeccanica consente in particolare di rappresentare un composito (materiale eterogeneo) mediante un materiale omogeneo equivalente del quale consente di stimare le principali grandezze ingegneristiche a partire da quelle dei singoli costituenti. La possibilità di stimare le caratteristiche del composito mediante semplici relazioni teoriche è ovviamente di grande interesse nella progettazione strutturale in quanto, a differenza di quanto accade nella progettazione con materiali tradizionali, con i materiali compositi il progettista oltre a definire geometria e dimensioni del componente in progetto può anche progettare il materiale da utilizzare.

### 2.1. Generalità

Come accennato al capitolo precedente, la stragrande maggioranza degli elementi strutturali in composito sono ottenuti sovrapponendo in vario modo semplici lamine composite con rinforzo unidirezionale, denominate nella letteratura inglese col nome di *ply*, *layer* o *lamina*. Si ottengono così i *laminati*, costituiti da lamine eguali ma variamente orientate, e gli *ibridi*, costituiti da lamine diverse tra loro per quanto concerne (a) il rapporto fibra/matrice, (b) i materiali di fibra e/o matrice oppure (c) la tipologia del rinforzo (fibre lunghe e fibre corte ecc).

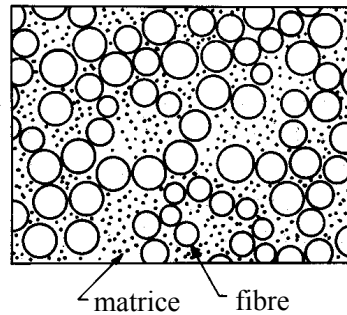
Per la conoscenza del comportamento meccanico dei laminati è pertanto necessaria la conoscenza del comportamento di una singola lamina con rinforzo unidirezionale.

Una lamina composita fibra-matrice può essere schematizzata come un insieme costituito da fibre a sezione circolare parallele ed equi-spaziate, immerse in una matrice continua come schematizzato nella seguente figura.



**Fig.1** - Schema semplificato di lamina con rinforzo unidirezionale.

E' questa evidentemente una semplificazione della situazione reale di una lamina, costituita da una matrice in cui sono disposte delle fibre pressoché parallele e distribuite in modo casuale. La fig.2 mostra per esempio la distribuzione delle fibre in una generica sezione trasversale di una lamina unidirezionale .



**Fig.2** - Sezione trasversale di lamina con rinforzo unidirezionale.

Si vede come le fibre non sono esattamente equispaziate ma hanno una distribuzione random ed alcune di esse possono pure toccarsi in alcuni punti. Lo spessore di una lamina è generalmente compreso tra 0.1 e 1 mm mentre il diametro delle fibre è tipicamente dell'ordine di circa  $10\ \mu\text{m}$  (vetro, carbonio, Kevlar) cosicché il rapporto spessore lamina/diametro fibre può variare tra 10 e 100 circa.

Con riferimento alla schematizzazione della lamina unidirezionale di Fig.1, si intuisce facilmente come un tale sistema fibre-matrice esibisce in pratica un comportamento anisotropo in quanto le caratteristiche fisico-meccaniche del materiale variano con la direzione considerata. In particolare si osserva che essa ammette tre piani di simmetria mutuamente ortogonali (materiale ortotropo). Indicando infatti con 1 la direzione delle fibre, con 2 la direzione ortogonale giacente sul piano medio della lamina e con 3 la direzione ortogonale al piano della lamina, allora i piani 1-2, 2-3 e 1-3 sono evidentemente piani di simmetria. Gli assi 1, 2 e 3 sono i cosiddetti *assi del materiale*; in particolare la direzione 1 è detta *direzione longitudinale*, le direzioni 2 e 3 *direzioni trasversali*.

Come è facile intuire la lamina presenta in direzione longitudinale (direzione del rinforzo) caratteristiche meccaniche (rigidezza, resistenza ecc) ben superiori a quelle esibite nelle altre direzioni. In una generica direzione ortogonale alla direzione longitudinale, cioè in una generica direzione giacente nel piano della sezione trasversale (Fig.2) la lamina esibisce invece caratteristiche meccaniche inferiori a quelle longitudinali. A causa della distribuzione casuale delle fibre (Fig.2) tali caratteristiche trasversali sono inoltre praticamente invarianti con la direzione considerata; per questo la lamina è considerata trasversalmente isotropa.

In dettaglio, si dimostra che il comportamento elastico di una lamina ortotropo e trasversalmente isotropa è definito completamente da 5 costanti elastiche quali il modulo di Young in direzione longitudinale  $E_1$  (1) e trasversale  $E_2$  (2), il modulo di elasticità trasversale nel piano della lamina  $G_{12}$  (3), il coefficiente di Poisson  $\nu_{12}$  (4) ed il coefficiente di Poisson nel piano trasversale  $\nu_{23}$  (5).

La resistenza meccanica della lamina è invece individuata univocamente da 5 parametri indipendenti quali la resistenza a trazione  $\sigma_{L,R}$  (1) e compressione  $\sigma'_{L,R}$  (2) in direzione longitudinale, la resistenza a trazione  $\sigma_{T,R}$  (3) e compressione  $\sigma'_{T,R}$  (4) in una generica direzione trasversale e la resistenza al taglio nel piano della lamina  $\tau_{LT,R}$  (5).

Come accennato al capitolo precedente, tali caratteristiche fisico-meccaniche della lamina dipendono da una serie di parametri, primo fra i quali il rapporto (volumetrico o ponderale) fibra/matrice, definito solitamente in modo indiretto tramite il rapporto (volumetrico o ponderale) fibra/composito e dal complementare rapporto matrice/composito. In generale il rapporto ponderale è utilizzato dal produttore del materiale, mentre il rapporto volumetrico è utilizzato dal progettista tenuto conto che, come si vedrà meglio più avanti, le caratteristiche di interesse ingegneristico del composito sono in genere legate a questo.

Considerando una generica lamina composita si indica con  $V_f$  e  $V_m$  il rapporto volumetrico fibra/composito e matrice/composito definiti rispettivamente da:

$$V_f = \frac{v_f}{v_c}; \quad V_m = \frac{v_m}{v_c}; \quad (1-2)$$

essendo  $v_f$ ,  $v_m$  e  $v_c$  il volume di fibre, matrice e composito rispettivamente. Con  $W_f$  e  $W_m$  si indicano invece il rapporto ponderale fibra/composito e matrice/composito rispettivamente dati da:

$$W_f = \frac{w_f}{w_c}; \quad W_m = \frac{w_m}{w_c}; \quad (3-4)$$

essendo  $w_f$ ,  $w_m$  e  $w_c$  il peso di fibre, matrice e composito rispettivamente.

I rapporti in volume ed in peso sono legati l'un l'altro attraverso il peso specifico; si ha infatti:

$$\begin{aligned} W_f &= \frac{w_f}{w_c} = \frac{v_f \rho_f}{v_c \rho_c} = V_f \frac{\rho_f}{\rho_c}; \quad \Leftrightarrow \quad V_f = W_f \frac{\rho_c}{\rho_f} \\ W_m &= \frac{w_m}{w_c} = \frac{v_m \rho_m}{v_c \rho_c} = V_m \frac{\rho_m}{\rho_c}; \quad \Leftrightarrow \quad V_m = W_m \frac{\rho_c}{\rho_m} \end{aligned} \quad (5-6)$$

La percentuale in peso di fibre e matrice in un provino può essere valutata pesando il provino integro e successivamente la sola fibra previa rimozione della matrice mediante “digestione” (vedi ASTM D3171) ovvero mediante estrazione con solventi (ASTM C613) o ancora mediante bruciatura in forno (ASTM C613).

A partire dalle percentuali in volume la densità teorica del composito può essere valutata attraverso la relazione:

$$w_c = \rho_c v_c = w_f + w_m = v_m \rho_m + v_f \rho_f \quad (7)$$

Dividendo per  $v_c$  si ottiene immediatamente:

$$\rho_c = V_m \rho_m + V_f \rho_f \quad (8)$$

Cioè la densità di un composito è data dalla media pesata secondo il volume della densità di fibra e matrice (regola delle miscele).

Utilizzando le relazioni precedenti la densità del composito può alternativamente essere espressa in funzione dei rapporti ponderali essendo:

$$\rho_c = \frac{1}{(W_f / \rho_f) + (W_m / \rho_m)} \quad (9)$$

Tali relazioni, scritte sopra per un composito bi-componente fibra-matrice possono essere facilmente estese al caso di composito multi-componente. Per un materiale composito costituito da  $n$  componenti si ha in generale :

$$W_i = V_i \frac{\rho_i}{\rho_c}; \quad \rho_c = \sum_i V_i \rho_i; \quad \rho_c = \frac{1}{\sum_i (V_i / \rho_i)} \quad (10-12)$$

E' utile osservare che la densità teorica di un composito, valutata attraverso la (8) o la (9), può

essere diversa da quella misurata sperimentalmente per via di vuoti presenti nella struttura, causati da aria rimasta intrappolata nella matrice durante il processo di formazione del composito.

Il rapporto volumetrico  $V_v$  tra il volume dei vuoti  $v_v$  ed il volume effettivo del composito  $v_{c,e}$  è legato univocamente alla densità teorica  $\rho_{c,t}$  ed effettiva  $\rho_{c,e}$  del composito dalla relazione:

$$V_v = \frac{v_v}{v_c} = \frac{v_{ce} - v_{ct}}{v_{ce}} = \frac{w_c / \rho_{ce} - w_c / \rho_{ct}}{w_c / \rho_{ce}} = \frac{\rho_{ct} - \rho_{ce}}{\rho_{ct}} \quad (13)$$

La percentuale dei vuoti può essere quindi calcolata a partire dalla conoscenza della densità effettiva valutata sperimentalmente (vedi per esempio ASTM D792) e della densità teorica valutata analiticamente mediante la (11) o la (12).

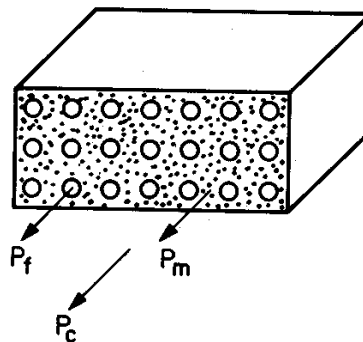
La percentuale dei vuoti influenza le caratteristiche fisico-meccaniche del composito. In genere le caratteristiche meccaniche decadono con l'aumentare della concentrazione dei vuoti. Per questo in un buon composito, tale rapporto volumetrico deve essere non superiore all'1%. Compositi di qualità non elevata possono invece presentare una percentuale di vuoti sino al 5%.

## 2.2. Caratteristiche meccaniche in direzione longitudinale

Come già accennato le proprietà fisico-meccaniche di un composito sono legate alle proprietà dei singoli costituenti, alla loro concentrazione ed alle eventuali interazioni chimico e fisiche.

Una accurata determinazione delle caratteristiche di un composito può essere sempre eseguita per via sperimentale con le usuali prove meccaniche (vedi per esempio le relative norme ASTM per le prove di caratterizzazione dei materiali compositi). In assenza di fenomeni di interazione tra i costituenti alcune caratteristiche di un composito, quali per esempio la resistenza e la rigidezza longitudinale, possono essere stimate con sufficiente accuratezza per via teorica a partire dalle caratteristiche e dalla concentrazione dei costituenti. Ciò risulta evidentemente molto vantaggioso in sede di progettazione in quanto consente di conoscere le caratteristiche del materiale progettato senza dovere eseguire preliminari e laboriose indagini sperimentali.

Ai fini della valutazione delle caratteristiche meccaniche di una lamina unidirezionale in direzione longitudinale, questa può essere schematizzata come un sistema meccanico costituito da fibre cilindriche (o prismatiche) rettilinee, parallele ed equispaziate immerse in una matrice continua (vedi Fig.3). Sebbene, come precedentemente osservato, tale modello differisce dalla reale configurazione della lamina, tali differenze risultano in genere poco influenti sulle caratteristiche longitudinali della lamina cosicché le stime di queste sono in genere in buon accordo con l'evidenza sperimentale.



**Fig.3** – Schema di lamina unidirezionale usato per la determinazione delle caratteristiche longitudinali .  
2.2.1 Modulo di elasticità longitudinale

Con riferimento alla Fig.3, indicando con  $P_c$  il carico di trazione applicato alla lamina, per ovvie considerazioni di equilibrio questo risulta dalla somma del carico  $P_f$  sopportato dalle fibre e del carico  $P_m$  sopportato dalla matrice, cioè:

$$P_c = P_f + P_m \quad (14)$$

In termini di tensioni si ha quindi:

$$\sigma_c A = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m \quad (15)$$

essendo  $A$  l'area del composito,  $A_f$  l'area complessiva della sezione trasversale delle fibre,  $A_m$  l'area della matrice. Dividendo entrambi i membri della (15) per  $A$  e tenendo conto che per le ipotesi fatte il rapporto delle aree coincide con la concentrazione in volume dei costituenti, la (15) fornisce:

$$\sigma_c = \sigma_f V_f + \sigma_m V_m \quad (16)$$

Cioè la tensione media  $\sigma_c$  sulla lamina è la media delle tensioni presenti su fibra e matrice pesata secondo le rispettive percentuali in volume (regola delle miscele).

Nella usuale ipotesi di perfetta adesione fibra-matrice, cioè in assenza di scorrimenti relativi, si ha inoltre che la deformazione delle fibre  $\varepsilon_f$  coincide con quella della matrice  $\varepsilon_m$  e quindi con quella del composito  $\varepsilon_c$ , cioè si ha:

$$\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_c = \varepsilon \quad (17)$$

Derivando pertanto la (16) rispetto alla deformazione, tenendo conto della (17) si ottiene:

$$\frac{d\sigma_c}{d\varepsilon} = \frac{d\sigma_f}{d\varepsilon} V_f + \frac{d\sigma_m}{d\varepsilon} V_m \quad (18)$$

Nella ipotesi che matrice e fibra abbiano un comportamento elastico lineare la (18) fornisce:

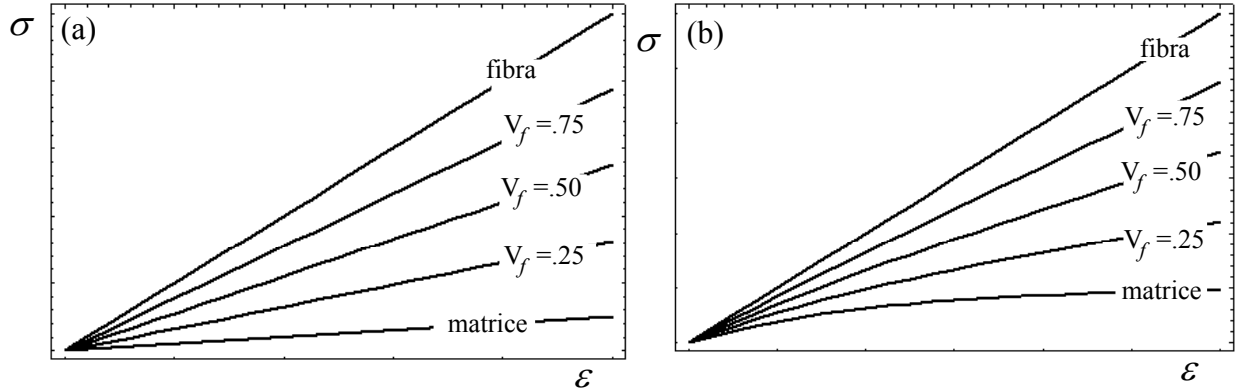
$$E_c = E_f V_f + E_m V_m \quad (19)$$

La (19) indica che come la densità (eq.8) e la tensione longitudinale (eq.15) anche il modulo di Young longitudinale obbedisce alla cosiddetta *regola delle miscele*: densità, tensione media e il modulo di Young longitudinale di una lamina unidirezionale sono dati dalla media pesata secondo i volumi di fibra e matrice. Il modulo di elasticità longitudinale di una lamina è quindi sempre compreso tra quello della matrice (limite inferiore,  $V_f=0$  e  $V_m=1$ ) e quello della fibra (limite superiore,  $V_f=1$  e  $V_m=0$ ) e cresce linearmente al crescere della percentuale delle fibre (vedi Fig.4a). Nella usuale condizione in cui la rigidità delle fibre è molto superiore di quella della matrice, il termine della (19) legato alle caratteristiche della fibra prevale sull'altro, ovvero il modulo di Young longitudinale del composito è dello stesso ordine di grandezza di quello delle fibre e molto superiore a quello della matrice. In questo senso si dice che il modulo  $E_L$  è una caratteristica dominata dalle fibre.

Ovviamente nel caso in cui uno (Fig.4b) o entrambi i costituenti esibiscono un comportamento non lineare, non potendo per essi definire un modulo di Young, la (19) non risulta applicabile. La (16) invece continua a valere: la regola delle miscele può essere applicata piuttosto che ai moduli di Young alle funzioni caratteristiche  $\sigma-\varepsilon$ ; la (16) consente quindi di valutare la curva  $\sigma_c(\varepsilon)$  caratteristica del composito a partire da quelle di fibra e matrice:

$$\sigma_c(\varepsilon) = \sigma_f(\varepsilon)V_f + \sigma_m(\varepsilon)V_m \quad (16')$$

Se matrice e fibra esibiscono un comportamento elastico lineare, ovviamente anche il composito esibisce lo stesso comportamento (fig.4a). Se invece uno o entrambi i componenti esibiscono un comportamento non lineare allora, in virtù delle (16-18), anche il composito esibisce un comportamento non lineare (vedi per esempio Fig.4b).



**Fig.4** - Diagrammi  $\sigma$ - $\varepsilon$  per lamina con componenti con comportamento lineare (a) e non lineare (b).

Solitamente la fibra ha un comportamento fragile (elastico lineare sino alla rottura) mentre la matrice (polimero) ha un comportamento lineare solo ai bassi carichi, come mostra la Fig.4b. In presenza di lamine con elevata concentrazione di fibre o con fibre aventi modulo di elasticità molto più grande di quello della matrice, la curva caratteristica  $\sigma$ - $\varepsilon$  del composito è molto prossima a quella (lineare) della fibra in quanto nella (16') la tensione relativa alla fibra prevale su quella relativa alla matrice. In questo caso la non linearità della matrice può essere trascurata e si può con buona approssimazione assumere per il composito lo stesso comportamento elastico lineare della fibra (vedi fig.4b).

In un lamina soggetta a trazione è interessante osservare come il carico si ripartisce tra fibra e matrice. Dalla eguaglianza delle deformazioni di fibra e matrice (eq.17), nella ipotesi di linearità dei materiali si ha :

$$\frac{\sigma_f}{E_f} = \frac{\sigma_m}{E_m} \Rightarrow \frac{(\sigma_f A_f)}{E_f} A_m = \frac{(\sigma_m A_m)}{E_m} A_f \Rightarrow \frac{P_f}{P_m} = \frac{E_f}{E_m} \frac{V_f}{V_m} \quad (20)$$

con ovvio significato dei simboli. Il rapporto tra il carico  $P_f$  sopportato dalle fibre e quello sopportato dalla matrice è quindi funzione lineare del relativo rapporto tra i moduli di Young e delle concentrazioni in volume. In particolare la (20) mostra che, per compositi a matrice polimerica, caratterizzati da elevati rapporti  $E_f/E_m$  (generalmente compresi tra 20 e 130 circa), il rapporto dei carichi sopportati  $P_f/P_m$  è pure molto elevato, cioè gran parte del carico applicato al composito è sostenuto dalla fibra e solo una piccola parte si scarica sulla matrice. In altre parole, un elevato rapporto delle rigidezze di fibra e matrice è requisito essenziale a garantire un buon sfruttamento della resistenza delle fibre.

La (20) non consente di valutare l'entità del carico sopportato da fibre e matrice in un materiale composito, essendo entrambi incogniti. A tal fine è utile fare riferimento al rapporto carico fibra/carico composito. A partire dalla (20) si ottiene facilmente la relazione alternativa:

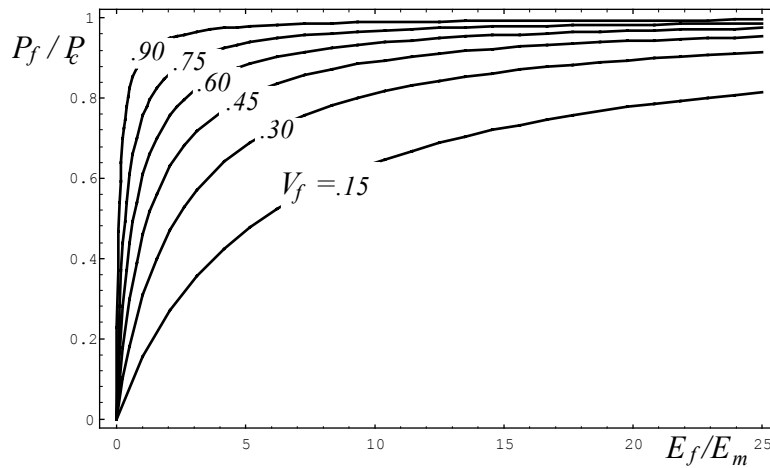
$$\frac{P_m}{P_f} = \frac{E_m V_m}{E_f V_f} \Rightarrow \frac{P_c - P_f}{P_f} = \frac{E_m V_m}{E_f V_f} \Rightarrow \frac{P_c}{P_f} = 1 + \frac{E_m V_m}{E_f V_f} = \frac{E_f V_f + E_m V_m}{E_f V_f} \quad (21)$$

Invertendo la (21) si ottiene immediatamente:

$$\frac{P_f}{P_c} = \frac{E_f V_f}{E_m V_m + E_f V_f} = \frac{1}{1 + (E_m V_m) / (E_f V_f)} \quad (22)$$

In base alla (22) si ha che il rapporto  $P_f/P_c$  tende ad 1 anche per concentrazioni delle fibre non elevate purché il rapporto tra i moduli di Young sia sufficientemente elevato. Con riferimento alla Fig.5 si può osservare come per un composito con  $E_f/E_m \approx 20$  (fibra di vetro-matrice polimerica,  $E_f \approx 70.000$  MPa,  $E_m \approx 3.500$  MPa), il rapporto  $P_f/P_c$  è maggiore del 75% anche per concentrazioni della fibra del 15% circa. Tale rapporto invece è in pratica superiore al 90% per concentrazione di fibre superiore al 30%, come avviene solitamente nei compositi per applicazioni strutturali per i quali tipicamente  $30\% < V_f < 70\%$  (sebbene sia teoricamente possibile costruire compositi con concentrazione di fibre superiori, generalmente non si supera il valore del 70% in quanto a concentrazioni maggiori corrisponde spesso un decadimento delle proprietà meccaniche dovuto essenzialmente a problemi di adesione fibra-matrice legati ad una non perfetta bagnatura delle fibre da parte della matrice).

Nel caso di compositi in fibra di carbonio, ove il rapporto dei moduli di Young è non inferiore a 60, il rapporto dei carichi è praticamente sempre superiore al 95% circa, come può essere facilmente dimostrato mediante la (22).



**Fig.5** - Andamento del rapporto  $P_f/P_c$  al variare del rapporto  $E_f/E_m$  per diversi valori di  $V_f$ .

### 2.2.2 Resistenza a trazione longitudinale

Considerando un composito fibro-rinforzato, l'osservazione sperimentale mostra che la rottura di una lamina avviene tipicamente allorché la deformazione longitudinale raggiunge il valore limite di rottura delle fibre. Solitamente infatti la matrice è caratterizzata da una deformabilità più elevata delle fibre e da una resistenza molto più bassa. In queste condizioni la rottura del composito è governata da quella delle fibre. In presenza di fibre duttili per le quali la rottura avviene per scorrimento, vi possono però essere più o meno significativi scostamenti da tale situazione, dovuti

essenzialmente agli sforzi di compressione che la matrice esercita sulle fibre. Questi infatti ostacolano e rallentano la rottura delle fibre rispetto alla condizione di fibra singola. In questi casi la deformazione di rottura del composito può risultare superiore a quella delle fibre, come mostra la seguente figura che riporta alcuni dati osservati sperimentalmente per compositi con fibre fragili e duttili.

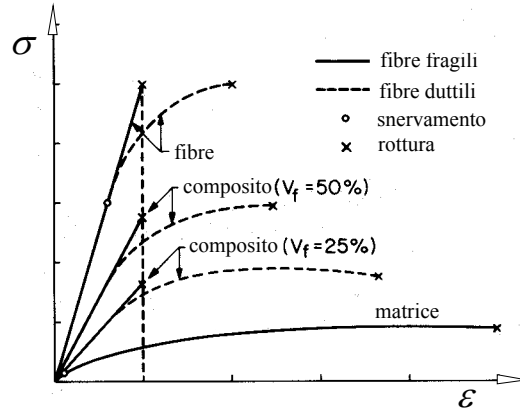


Fig.6 - Diagrammi  $\sigma$ - $\varepsilon$  per lamina (matrice duttile) con fibre fragili e duttili.

In assenza di significative interazioni fibra-matrice, nella ipotesi che la rottura della lamina coincide con la rottura delle fibre che avviene alla deformazione  $\varepsilon_{f,R}$ , la tensione di rottura a trazione della lamina può essere ottenuta con la già vista regola delle miscele (Eq.16). Utilizzando la (16), nelle condizioni di incipiente rottura delle fibre, ovvero allorquando la deformazione del composito eguaglia quella di rottura delle fibre, si può scrivere infatti:

$$\sigma_{L,R} = \sigma_{f,R} V_f + \sigma_m|_{\varepsilon=\varepsilon_{f,R}} (1 - V_f) \quad (23)$$

con ovvio significato dei simboli. La (23) fornisce quindi la tensione di rottura del composito in funzione della tensione di rottura delle fibre  $\sigma_{f,R}$ , della tensione della matrice corrispondente alla deformazione di rottura delle fibre e della percentuale  $V_f$  di fibre presenti. Nei limiti di validità della (23) la tensione di rottura del composito è quindi legata linearmente alle tensioni caratteristiche di fibra (tensione di rottura) e matrice (tensione corrispondente alla deformazione  $\varepsilon_{f,R}$ ).

Più in dettaglio, si osservi che la rottura del composito coincide con quella delle fibre se la concentrazione di queste è tale che il carico che porta a rottura le fibre è superiore a quello sopportabile dal composito con fibre rotte, cioè dalla sola matrice. La tensione  $\sigma'_{L,R}$  che porta a rottura la sola matrice (fibre rotte) è fornito dalla relazione:

$$\sigma'_{L,R} A = \sigma_{m,R} A_m \Rightarrow \sigma'_{L,R} = \sigma_{m,R} V_m \quad (24)$$

Affinché alla rottura delle fibre si verifichi anche la immediata rottura della matrice e quindi dell'intero composito, la tensione di rottura fornita dalla (23) deve risultare superiore a quella fornita dalla (24). Tale disequaglianza fornisce dopo semplici passaggi:

$$V_f \geq \frac{\sigma_{m,R} - \sigma_m|_{\varepsilon_{f,R}}}{\sigma_{f,R} - \sigma_m|_{\varepsilon_{f,R}} + \sigma_{m,R}} \quad (25)$$

In altre parole, affinché alla rottura delle fibre segua quella del composito è necessario che la



percentuale di fibre sia superiore al valore minimo dato dalla (25) col segno di eguaglianza:

$$V_{f,min} = \frac{\sigma_{m,R} - \sigma_m|_{\varepsilon_{f,R}}}{\sigma_{f,R} - \sigma_m|_{\varepsilon=\varepsilon_{f,R}} + \sigma_{m,R}} \quad (25')$$

Se  $V_f < V_{f,min}$  la capacità portante della sola matrice è superiore di quella dell'intero composito e quindi la presenza delle fibre non costituisce affatto rinforzo della matrice, piuttosto un indebolimento. La tensione di rottura di un tale composito, fornita dalla (24), è infatti inferiore di quella della matrice. Più precisamente va osservato che il soddisfacimento della (25) non assicura che le fibre operino effettivamente un rinforzo della matrice. Affinché ciò succeda è necessario che la tensione di rottura del composito sia maggiore o uguale della tensione di rottura della sola matrice, cioè:

$$\sigma_{c,R} = \sigma_{f,R} V_f + \sigma_m|_{\varepsilon_f^*} (1 - V_f) \geq \sigma_{m,R} \quad (26)$$

Dalla (26) si ottiene la concentrazione critica delle fibre necessaria ad assicurare un reale rinforzo della matrice. Si ha:

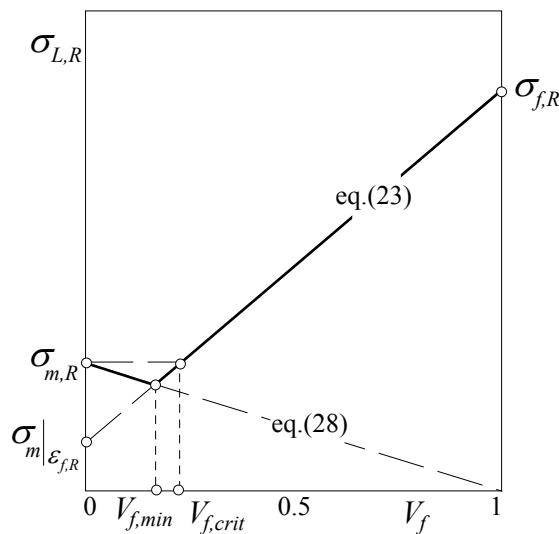
$$V_{f,crit} = \frac{\sigma_{m,R} - \sigma_m|_{\varepsilon=\varepsilon_{f,R}}}{\sigma_{f,R} - \sigma_m|_{\varepsilon=\varepsilon_{f,R}}} > V_{f,min} \quad (27)$$

Ovviamente la concentrazione critica, che assicura  $\sigma_{L,R} > \sigma_{m,R}$ , è maggiore della concentrazione minima, che assicura  $\sigma_{L,R} > \sigma_{m,R} V_m$ .

Nel caso in cui la concentrazione delle fibre sia inferiore a quella minima allora la rottura del composito coincide con quella della matrice che avviene allorché le fibre sono già rotte. In questo caso limite si ha:

$$\sigma_{L,R} = \sigma_{m,R} (1 - V_f) \quad (28)$$

Tenendo conto delle relazioni (23) e (28) nonché della espressione della concentrazione minima delle fibre è possibile rappresentare graficamente l'andamento teorico della resistenza a rottura a trazione di una lamina composita in funzione della concentrazione delle fibre (vedi fig.7).



**Fig.7** - Andamento della tensione di rottura a trazione longitudinale per lamina unidirezionale.

Si vede chiaramente come, affinché l'introduzione delle fibre dia un contributo positivo alla resistenza è necessario che la relativa concentrazione sia superiore al valore critico che, in base alla (27) è legato alla tensione di rottura di fibra e matrice nonché alla tensione presente nella matrice alla deformazione di rottura della fibra.

Per una lamina fibra di vetro-resina epossidica e simili, la concentrazione critica è generalmente molto piccola (inferiore all'1%). Per esempio per fibra di vetro tipo E con  $\sigma_{f,R} = 3500$  MPa e matrice polimerica con  $\sigma_{m,R} = 70$  MPa e  $\sigma_m |_{\varepsilon_{f,R}} = 50$  MPa, applicando la (27) si ottiene immediatamente una concentrazione critica inferiore all'1%.

Valori pure molto piccoli si ottengono per compositi con fibre di carbonio e pertanto è possibile affermare che per i comuni compositi usati nella progettazione di strutture, la rottura della lamina si verifica sempre a seguito di rottura della fibra e la presenza delle fibre produce certamente rinforzo del materiale.

Diversa è invece spesso la situazione per compositi a matrice metallica per i quali possono facilmente verificarsi rapporti più bassi delle rigidzze di fibra e matrice. A titolo di esempio nella seguente tabella sono riportate le concentrazioni critiche di fibre di varia resistenza per alcune matrici metalliche duttili.

**Tabella 1.-** Valori della concentrazione critica  $V_{crit}$  per diversi tipi di fibre in matrici metalliche.

Matrice	$\sigma_{m,R}$ [MPa]	$\sigma_m  _{\varepsilon_{f,R}}$ [MPa]	$\sigma_{f,R}=700$ MPa	$\sigma_{f,R}=1750$ MPa	$\sigma_{f,R}=3500$ MPa	$\sigma_{f,R}=7000$ MPa
Alluminio	840	280	8.33 %	3.25 %	1.61 %	0.80 %
Rame	420	210	25.53	9.84	4.86	2.41
Nichel	630	315	39.56	14.94	7.33	3.63
Acciaio inox	1750	455	53.33	17.78	8.42	4.10

La resistenza calcolata teoricamente mediante la (23) o le relazioni alternative, in genere è in buon accordo con quella rilevata sperimentalmente. Significative differenze possono però verificarsi principalmente a causa di:

- 1) non perfetto allineamento delle fibre;
- 2) non uniforme resistenza delle fibre;
- 3) variabili condizioni di interfaccia;
- 4) tensioni residue.

Evidentemente se le fibre, come succede spesso, non sono perfettamente allineate l'un l'altra, ovvero non sono ben allineate col carico, allora la resistenza del composito risulta più bassa del valore teorico stimato. Gli scostamenti sono trascurabili se gli errori di allineamento sono contenuti entro pochi gradi, altrimenti appropriate correzioni sono necessarie.

Per quanto concerne invece la non uniforme resistenza delle fibre, si osserva anzitutto che essa è essenzialmente legata alla non uniformità della sezione resistente ed alla non uniformità di eventuali trattamenti subiti. La non uniformità della resistenza delle fibre dà luogo a rotture progressive che interessando inizialmente le sezioni più deboli producono un indebolimento e quindi una rottura progressiva del composito (*cumulative-weakening failure model*). La non uniformità della resistenza delle fibre dà luogo inoltre ad un legame tra resistenza e lunghezza. Sperimentalmente si osserva infatti che la resistenza delle fibre diminuisce con la lunghezza. Tale comportamento si spiega con il fatto che una fibra, come una catena, si rompe sempre in prossimità del punto più debole, e la probabilità della presenza di sezioni più deboli aumenta certamente all'aumentare della lunghezza della catena (fibra).

La rottura di una fibra in una data sezione produce una discontinuità a cui è associata un fenomeno

di concentrazione di tensione che facilita ulteriori rotture locali delle fibre. La rottura locale è anche responsabile della formazione di eventuali cricche che possono propagarsi nella direzione delle fibre, lungo l'interfaccia, se non si ha una elevata adesione fibra-matrice, in direzione normale alle fibre nel caso opposto. In presenza di fibre interrotte o fibre corte, inoltre, fenomeni di concentrazione di tensioni si verificano anche in corrispondenza delle estremità a causa delle diverse caratteristiche meccaniche dei materiali di fibra e matrice. Il verificarsi di tali fenomeni influenza significativamente la resistenza a rottura della lamina.

Anche le condizioni di interfaccia possono influenzare significativamente, oltre che la resistenza ad agenti ambientali come umidità ecc, anche la resistenza longitudinale di un composito. Una buona adesione da luogo infatti ad una elevata resistenza del composito, assicurando una buona trasmissione degli sforzi tra fibra e matrice ed impedendo allo stesso tempo la propagazione di cricche di interfaccia.

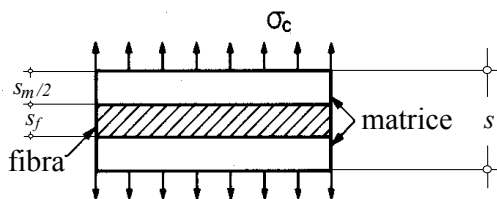
Per quanto concerne infine le tensioni residue, queste si originano solitamente a causa del diverso coefficiente di dilatazione termico di fibra e matrice e sono legate alla temperatura di utilizzazione della lamina. In esercizio le tensioni residue si sommano alle tensioni indotte dai carichi applicati influenzando così (positivamente o negativamente) la resistenza della lamina. Per una progettazione accurata la valutazione delle tensioni residue non deve pertanto essere trascurata.

## 2.2.2 Resistenza a compressione longitudinale

La resistenza a compressione longitudinale  $\sigma'_{L,R}$  di un composito unidirezionale è strettamente legata alle particolari modalità di cedimento dipendenti dalle caratteristiche delle fibre, dalla bontà della adesione fibra-matrice, dalla percentuale in volume delle fibre e da possibili fenomeni di instabilità dell'equilibrio elastico. Per la sua stima si rimanda pertanto al cap.6, dedicato ai meccanismi di rottura.

## 2.3. Caratteristiche meccaniche in direzione trasversale

Il modulo di elasticità in direzione trasversale e la resistenza a trazione trasversale di una lamina possono essere studiati utilizzando l'elemento di volume rappresentativo (EVR o RVE nella letteratura inglese) della lamina unidirezionale costituito in pratica da una fibra (rettangolare) e dalle porzioni di matrice adiacente (vedi Fig.8)



**Fig.8.** Elemento di volume rappresentativo di lamina unidirezionale usato per la stima delle caratteristiche elastiche e di resistenza trasversali.

### 2.3.1 Modulo di elasticità in direzione trasversale

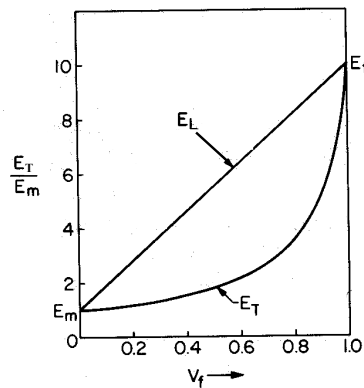
Con riferimento alla fig.8 si ha che fibra e matrice sono in pratica soggetti alla stessa tensione applicata. In applicazione della definizione ( $E_T = \sigma_T / \varepsilon_T$ ) il valore del modulo di elasticità trasversale può essere valutato non appena calcolata la deformazione trasversale del composito  $\varepsilon_T$ . Da semplici considerazioni si ha:

$$\varepsilon_T = \frac{\Delta s}{s} = \frac{\Delta s_m + \Delta s_f + \Delta s_m}{s} = \frac{\varepsilon_{T,m} 2s_m + \varepsilon_{T,f} s_f}{s} = \frac{\sigma_T}{E_m} V_m + \frac{\sigma_T}{E_f} V_f \quad (29)$$

con ovvio significato dei simboli. Invertendo la (29) e tenendo conto della definizione, si ha:

$$\frac{1}{E_T} = \frac{\varepsilon_T}{\sigma_T} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m} \Rightarrow E_c = \frac{E_f}{V_f + (E_f/E_m)V_m} \quad (30)$$

La (30) mostra che, a differenza di quanto accade per il modulo elastico longitudinale, il modulo di elasticità trasversale è legato a quello di matrice e fibre da una relazione non lineare. In pratica è l'inverso del modulo (cedevolezza) ad obbedire alla regola delle miscele. Come il modulo longitudinale il modulo trasversale (teorico) varia tra quello della matrice e quello della fibra come indicato nella seguente figura, che si riferisce al caso  $E_f/E_m=10$ :



**Fig.9.** Andamento (teorico) del modulo longitudinale e trasversale di lamina unidirezionale con  $E_f/E_m=10$ .

Dalla fig.9 si vede chiaramente come la presenza delle fibre, anche con concentrazione relativamente elevata ( $V_f \approx 50-60\%$ ), dà luogo solo ad un limitato incremento del modulo rispetto a quello della matrice. Per esempio per una lamina con  $E_f/E_m=20$  (fibra di vetro-resina epossidica) per una concentrazione di fibre del 50% si ha:

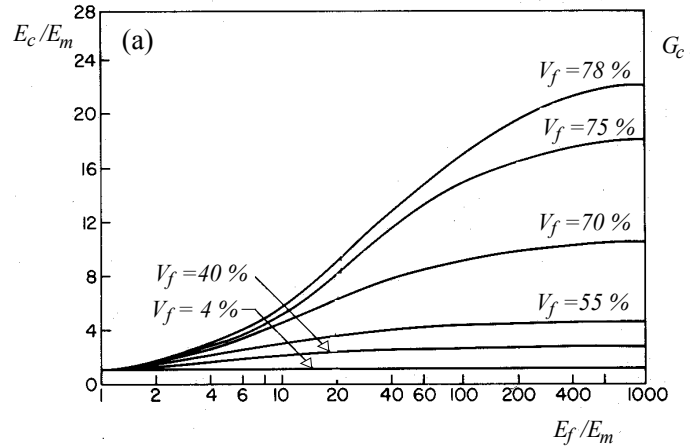
$$\left( \frac{E_L}{E_m} \right) = 0.5 + 20 * 0.5 = 10.5$$

mentre per il modulo trasversale è:

$$\left( \frac{E_T}{E_m} \right) = \frac{20}{0.5 + 20 * 0.5} = 1.9$$

La stima del modulo  $E_T$  fornita dalla (30) è in genere piuttosto approssimata in quanto lo schema rappresentato in Fig.8 non descrive esattamente l'effettivo comportamento della lamina sotto un carico trasversale. L'ipotesi che fibre e matrice sono sottoposti alla medesima tensione (materiali in serie) è in realtà approssimata in quanto in una generica sezione trasversale della lamina sono sempre presenti fibre e matrice (materiali parzialmente in parallelo) cosicché il carico di fatto si distribuisce tra i due componenti. Inoltre, per via delle diverse costanti elastiche, l'ipotesi di eguale tensione porterebbe ad una deformazione longitudinale diversa di fibre e matrice. Una migliore stima del modulo di elasticità trasversale può essere ottenuta in alternativa con modelli teorici più complessi o con metodi numerici.

Risultati in buon accordo con quelli sperimentali si ottengono utilizzando il metodo degli elementi finiti e considerando un modello con fibre disposte secondo un reticolo regolare. A titolo di esempio nella seguente figura 10 è mostrato l'andamento del rapporto  $E_c/E_m$  al variare del rapporto  $E_f/E_m$  per diversi valori della concentrazione delle fibre, ottenuto mediante metodi numerici.

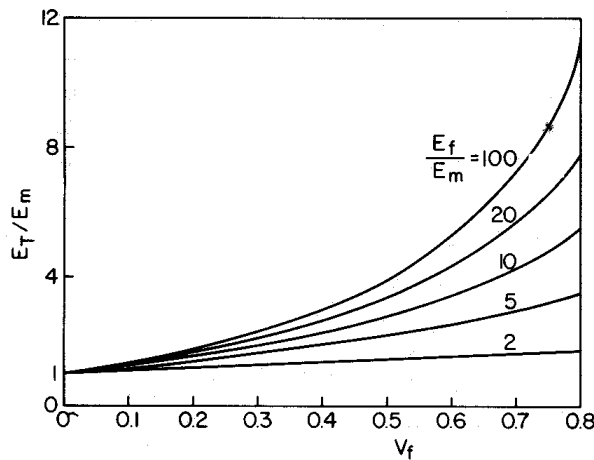


**Fig.10.** - Andamento del rapporto  $E_c/E_m$  per lamina unidirezionale al variare del rapporto  $E_f/E_m$ .

Per il modulo di elasticità in direzione trasversale sono state proposte diverse formule approssimate ottenute con metodi analitici e/o numerici. Tra queste una relazione molto usata è quella semiempirica di Halpin-Tsai:

$$\frac{E_T}{E_m} = \frac{1 + \zeta \eta V_f}{1 - \eta V_f} \quad \text{con} \quad \eta = \frac{(E_f/E_m) - 1}{(E_f/E_m) + \zeta} \quad (31)$$

dove  $\zeta$  è un parametro empirico ottenuto mediante *fitting* di risultati teorici, che è una misura del rinforzo legato alla geometria della sezione trasversale delle fibre. Per fibre pressoché si ha in pratica il valore  $\zeta=2$ , mentre per sezioni rettangolari di lati  $a$  e  $b$  può essere stimato dalla relazione  $\zeta=2a/b$  essendo  $a$  la dimensione misurata nella direzione del carico applicato. La figura seguente mostra la rappresentazione grafica della equazione di Halpin-Tsai (31).



**Fig.11.** Andamento di  $E_T/E_m$  previsto dalla relazione di Halpin-Tsai (eq.31).

Il confronto dei risultati forniti dalla (31) e dalla (30) con i valori effettivi di molti materiali

compositi mostra che la (30) fornisce in genere valori largamente sottostimati mentre buona è in genere l'approssimazione fornita dalla (31). Migliori stime della rigidezza trasversale di una lamina unidirezionale si possono ottenere utilizzando il più complesso PMM (*periodic microstructure model*), per il quale si rimanda alla letteratura specializzata.

### 2.3.2 Resistenza a trazione trasversale

Secondo il modello semplificato di Fig.8 (materiali in serie), la resistenza a trazione trasversale di una lamina unidirezionale risulta in pratica coincidente con la resistenza a trazione del materiale meno resistente, cioè della matrice. Si può scrivere in pratica:

$$\sigma_{T,R} \approx \sigma_{m,R} \quad (32)$$

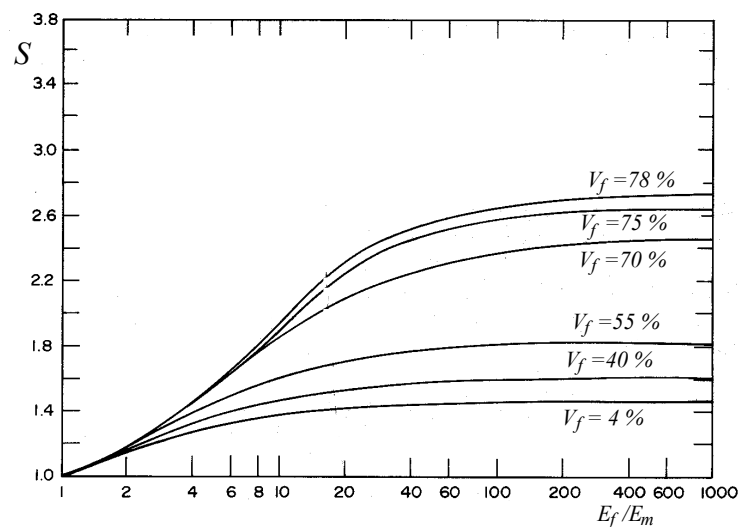
In realtà, a causa di inevitabili fenomeni di concentrazione di tensioni localizzate all'interfaccia fibra-matrice e dovute alle diverse caratteristiche elastiche di fibra e matrice, nonché a causa della eventuale presenza di vuoti, pur ipotizzando una perfetta adesione fibra-matrice, la rottura avviene a livelli di tensione più bassi di quelli che producono rottura nella sola matrice. Per tener conto di tale riduzione si introduce un fattore correttivo  $S$ . Si pone cioè:

$$\sigma_{T,R} = \frac{\sigma_{m,R}}{S} \quad (33)$$

Trascurando l'effetto dovuto al diverso coefficiente di Poisson, il fattore correttivo  $S$  coincide in pratica col coefficiente di concentrazione delle tensioni  $k$  la cui espressione analitica è approssimata dalla relazione:

$$S = k = \frac{1 - V_f [1 - (E_m / E_f)]}{1 - \sqrt{4V_f / \pi} [1 - (E_m / E_f)]} \quad (34)$$

In alternativa alla (34), una migliore stima del coefficiente correttivo  $S$  può essere ottenuta con metodi numerici a partire dalla conoscenza dello stato tensionale. La figura seguente mostra i valori di  $S$  ottenuti col FEM al variare dei parametri più significativi.



**Fig.12.** Andamento di  $S$  ottenuto utilizzando il metodo degli elementi finiti (FEM).

In ogni caso la (35) consente di affermare che la resistenza a trazione trasversale, come il modulo di

Young trasversale, è una caratteristica “dominata” dalla matrice. Conseguentemente, relativamente bassi risultano rigidità e resistenza della lamina unidirezionale in direzione trasversale. I risultati forniti dalla (33) risultano in genere piuttosto approssimati e per questo altre formulazioni empiriche alternative sono state proposte da vari autori. Tra queste le più usate in letteratura sono la formula di Nielsen:

$$\sigma_{T,R} = C_v (1 - V_f^{1/3}) \frac{E_T}{E_m} \sigma_{m,R} \quad (35)$$

essendo  $C_v$  un coefficiente legato alla percentuale di vuoti che, in accordo con l'evidenza sperimentale, può dar luogo a notevoli diminuzioni della resistenza trasversale:

$$C_v = 1 - \sqrt{\frac{4V_v}{\pi(1-V_f)}} \quad (35')$$

Altra formulazione che pure tiene conto della percentuale dei vuoti e del rapporto della rigidità dei materiali da cui dipendono gli effetti di concentrazione di tensione, è quella dovuta a Chamis:

$$\sigma_{T,R} = C_v [1 + (V_f - \sqrt{V_f}) (1 - \frac{E_m}{E_f})] \sigma_{m,R} \quad (36)$$

Tutte le relazioni sopra riportate conducono a valori della resistenza inferiori a quella della sola matrice sebbene in alcuni casi può succedere il contrario per via per esempio di difetti più piccoli presenti nella matrice del composito (i piccoli spazi tra le fibre limitano le dimensioni dei difetti) rispetto a quelli presenti nella matrice da sola. Nessuno di tali relazioni inoltre tiene conto della adesione fibra-matrice che evidentemente può influenzare significativamente la resistenza. Per accurate valutazioni della resistenza trasversale è necessario pertanto ricorrere alle prove sperimentali.

### 2.3.3 Resistenza a compressione trasversale

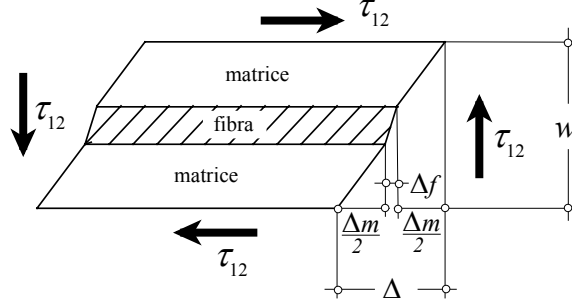
Per la stima della resistenza a compressione trasversale  $\sigma'_{T,R}$  possono essere ripetute le considerazioni fatte al capitolo precedente per la resistenza a trazione trasversale. In particolare la resistenza a compressione trasversale può essere stimata mediante relazioni analoghe ma sostituendo la resistenza a trazione  $\sigma_{m,R}$  della matrice con la resistenza a compressione  $\sigma'_{m,R}$ , in genere più elevata. In alcuni casi tale procedura dà luogo a stime piuttosto grossolane, in quanto le modalità di rottura possono essere diverse dalla compressione (rottura per taglio della matrice ecc.). Per maggiori dettagli sulle possibili modalità di cedimento si rimanda al cap.6. In ogni caso per una valutazione accurata della resistenza è necessario ricorrere alle prove sperimentali (vedi ASTM D695, D3410).

## 2.4. Modulo di elasticità trasversale e resistenza a taglio

Il modulo di elasticità trasversale  $G_{12}$  di una lamina unidirezionale, definito dal rapporto tra la tensione tangenziale  $\tau_{12}$  applicata nel piano della lamina e il corrispondente scorrimento  $\gamma_{12}$ , può essere stimato teoricamente considerando l'elemento di volume rappresentativo (modello semplificato) usato al capitolo precedente e rappresentato in fig.8.

### 2.4.1 Modulo di elasticità trasversale $G_{12}$ .

Il modulo di elasticità trasversale  $G_{12}$  può essere valutato teoricamente considerando il modello deformativo dell'elemento di volume rappresentativo illustrato in fig. 13:



**Fig.13** - Modello deformativo e notazione per la determinazione di  $G_{12}$

Nell'ipotesi che la tensione tangenziale sia sentita in ugual misura dalla fibra e dalla matrice (materiali in serie) che entrambe siano soggette ad uno scorrimento uniforme dipendente dal relativo modulo di elasticità trasversale, si ha:

$$\gamma_f = \frac{\tau}{G_f}; \quad \gamma_m = \frac{\tau}{G_m} \quad (37-38)$$

Lo spostamento totale  $\Delta$  dell'elemento rappresentativo, pari al prodotto della deformazione angolare totale  $\gamma$  per lo spessore totale  $w$ , è dato dalla somma dello spostamento di fibra e matrice; si può quindi scrivere:

$$\Delta = \Delta_f + \Delta_m = \gamma_f w_f + \gamma_m w_m = \gamma w \quad (39)$$

Dividendo la (39) per lo spessore  $w$  si ottiene infine la relazione che fornisce lo scorrimento totale del sistema fibra-matrice:

$$\gamma = \gamma_f V_f + \gamma_m V_m \quad (40)$$

Utilizzando quindi la (40) nella definizione del modulo di elasticità trasversale e introducendo le (37-38) si ottiene:

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{\gamma}{\tau} = \frac{\gamma_f V_f + \gamma_m V_m}{\tau} = \frac{(\tau / G_f) V_f + (\tau / G_m) V_m}{\tau} = \frac{1}{G_f} V_f + \frac{1}{G_m} V_m \quad (41)$$

Similmente a quanto succede per il modulo di Young in direzione trasversale, è l'inverso del modulo di elasticità trasversale ad obbedire ad una regola delle miscele, e non il modulo. Dividendo entrambi i membri per  $V_f = (1 + V_m/V_f)^{-1}$  si ottiene la relazione alternativa:

$$\left(1 + \frac{V_m}{V_f}\right) \frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{G_m} \frac{V_m}{V_f} + \frac{1}{G_f} \quad (42)$$



I valori di  $G_{12}$  valutati con la (41) o la (42) a partire dai dati relativi a fibra e matrice, non sempre sono in buon accordo coi valori rilevati sperimentalmente, a causa del fatto che nella generica sezione trasversale della lamina sono presenti sia fibre che matrice, cioè la disposizione dei due elementi è in parte in serie in parte in parallelo (in quest'ultimo caso si avrebbe l'eguaglianza degli scorrimenti e non delle tensioni). Conseguentemente lo sforzo di taglio si ripartisce tra fibra e matrice. L'evidenza sperimentale mostra che si può tenere conto di ciò mediante introduzione nella (42) di un fattore correttivo del rapporto delle concentrazioni, detto fattore di ripartizione  $\eta_s$ . Si pone in pratica  $V^* = \eta_s V_m / V_f$  e quindi la (42) diventa:

$$(1 + V^*) \frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{G_f} + \frac{1}{G_m} V^* \quad (43)$$

Il fattore  $\eta_s$  dipende essenzialmente dalla forma delle fibre (a), dalla dimensione delle fibre (b) nonché dal volume percentuale delle fibre (c), ma non è strettamente legato alla eventuale anisotropia delle fibre. Esso pertanto può essere usato sia per fibre isotrope (es. fibre di vetro) che anisotrope (es. fibre di carbonio). La dipendenza dal volume di fibre è piuttosto blanda e per percentuali comprese tra 0.4 e 0.7 si può considerare costante.

L'introduzione del coefficiente di ripartizione, consente nella pratica di determinare il modulo di elasticità trasversale delle fibre a partire dalla determinazione sperimentale del modulo del composito essendo noto il modulo della matrice. Questa procedura si utilizza per esempio per la determinazione del modulo di fibre di carbonio.

#### Esempio:

Per una migliore comprensione dell'uso del fattore di ripartizione, si riporta nel seguito un esempio numerico. Si valuta dapprima il coefficiente di ripartizione per un composito con fibre a comportamento isotropo, avente le seguenti proprietà:

$$E_1 = 38.4 \text{ GPa} \quad V_f = 0.45 \quad \nu_f = 0.2 \quad \nu_m = 0.35 \quad E_m = 3.4 \text{ GPa} \quad G_{12} = 4.14 \text{ GPa}$$

Si determina anzitutto  $G_f$ . Dalla regola delle miscele si ha per il modulo di Young della fibra:

$$E_f = [E_1 - (1 - V_f) E_m] / V_f = 85.3 \text{ GPa}$$

Quindi per fibre isotrope:

$$G_f = \frac{E_f}{2(1 + \nu_f)} = 35.5 \text{ GPa}$$

Con la analoga relazione per la matrice, si ottiene  $G_m = 1.26 \text{ GPa}$ , mentre usando la (43) si ottiene:

$$V^* = \frac{G_m (G_{12} - G_f)}{G_f (G_m - G_{12})} \Rightarrow \eta_s = V^* \frac{V_f}{V_m} = 0.316$$

Questo valore così calcolato può essere usato per la valutazione del modulo trasversale di fibre non isotrope, per le quali non vale la solita relazione col modulo di Young ed il coefficiente di Poisson, a partire da misure eseguite sottoponendo a taglio la lamina composita.

Per esempio considerando un composito T<sub>300</sub>/5208, che ha fibre a comportamento anisotropo, con concentrazione  $V_f = 0.7$ , avendo misurato sperimentalmente il modulo  $G_{12} = 7.17 \text{ GPa}$ , dalla (42) si calcola il valore del modulo delle fibre  $G_f$ :

$$G_f = \left[ (1 + V^*) \frac{1}{G_{12}} - \frac{V^*}{G_m} \right]^{-1} = 19.6 \text{ GPa}$$

Se invece si prova a calcolare il modulo trasversale considerando la fibra isotropa si ottiene un valore significativamente diverso. Il modulo di Young delle sole fibre è con buona approssimazione (trascurando il contributo della matrice) dato da:

$$E_f \approx E_1 / V_f \approx 258 \text{ GPa}$$

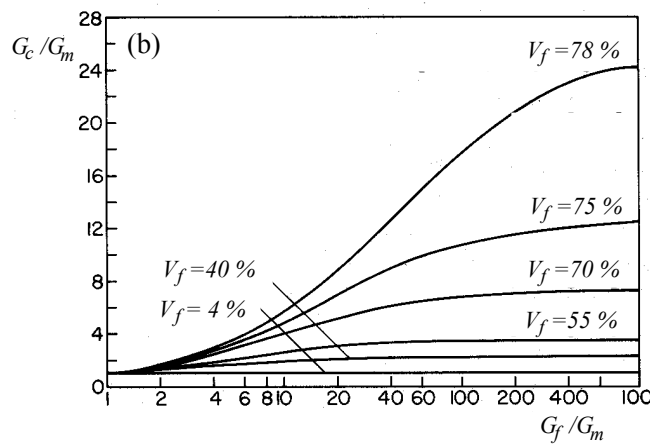
Pertanto, il modulo  $G_f$  delle fibre supposte isotrope vale:

$$G_f = \frac{E_f}{2(1 + \nu_f)} = 108 \text{ GPa}$$

E' questo un valore è molto differente da  $G_f = 19.6 \text{ GPa}$  trovato precedentemente, tenendo conto delle prove sperimentali e del fattore di ripartizione  $\eta_s$ . L'errore è del 550 %. Pertanto, per valutare  $G_{12}$  per un composito con fibre di carbonio con volume percentuale di fibre compreso tra 0.4 e 0.7 si può usare la relazione approssimata

$$G_{12} = \left[ 1 + 0.316 \frac{V_m}{V_f} \right] / \left[ \frac{1}{19.6} + 0.316 \frac{V_m}{V_f} \frac{1}{G_m} \right]$$

In alternativa all'uso della (43) il modulo di elasticità trasversale di un composito può essere calcolato in modo più accurato considerando i risultati ottenuti con il metodo degli elementi finiti, riportati graficamente in fig.14.



**Fig.14.** - Andamento del rapporto  $G_c/G_m$  (b) per lamina unidirezionale.

Buone stime di  $G_{12}$  si ottengono anche utilizzando la formula di Halpin-Tsai (Eq.31) introducendo al posto dei moduli di Young i moduli di elasticità a taglio ed utilizzando  $\zeta=1$ , cioè:

$$\frac{G_{LT}}{G_m} = \frac{1 + \eta V_f}{1 - \eta V_f} \quad \text{con} \quad \eta = \frac{(G_f / G_m) - 1}{(G_f / G_m) + 1} \quad (44)$$

I risultati forniti da questa formula sono in genere in buon accordo con i risultati numerici riportati in

Fig.14.

Stime abbastanza accurate si hanno pure in generale con il CAM (cylinder assemblage model) che considera un modello (RVE) costituito da due cilindri concentrici (fibra circondata da matrice), e con il PMM (periodic microstructure model) che forniscono rispettivamente:

$$\frac{G_{LT}}{G_m} \approx \frac{1+V_f}{1-V_f} \quad (45)$$

$$\frac{G_{LT}}{G_m} = 1 + \frac{V_f}{(G_f / G_m) + p(V_f)} \quad (46)$$

con

$$p(V_f) = 0.492 - 0.476V_f - 0.027V_f^2 \quad (47)$$

## 2.4.2 Resistenza a taglio nel piano della lamina

Per valutare la resistenza a taglio di una lamina unidirezionale è necessario tener conto delle peculiari modalità di cedimento che possono verificarsi, quali taglio della matrice, debonding ecc (vedi anche cap.6). È pertanto difficile eseguire stime teoriche accurate di tale parametro e solo relazioni empiriche approssimate possono essere usate in sede di progetto. Ipotizzando che la rottura avvenga per taglio della matrice la resistenza può essere stimata mediante la seguente relazione:

$$\tau_{LT,R} = C_v [1 + (V_f - \sqrt{V_f})(1 - \frac{G_m}{G_f})] \tau_{m,R} \quad (48)$$

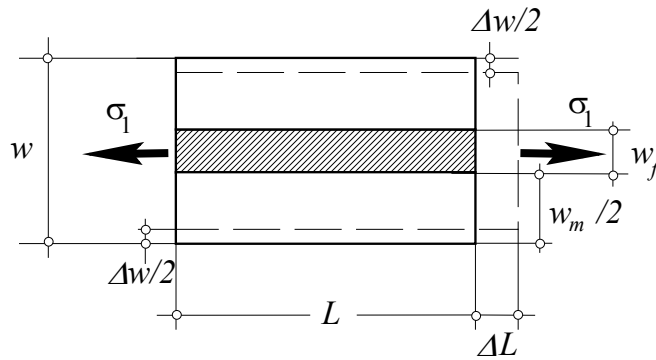
Si osservi che la (48) si ottiene dalla equazione di Chamise (36) per semplice sostituzione della resistenza a trazione della matrice con la rispettiva resistenza a taglio e dei moduli di Young con i moduli di elasticità trasversale di fibra e matrice; il coefficiente  $C_v$  è sempre dato dalla eq.35'. In assenza di informazioni sperimentali sulla resistenza a taglio della matrice si può assumere con buona approssimazione  $\tau_{m,R} = \sigma_{m,R}$ . Inoltre, come la (35) e la (36), la (44) può essere usata per valutare  $\tau_{m,R}$  a partire da una valutazione sperimentale della resistenza  $\tau_{LT,R}$ , quindi la stessa formula può essere usata per ottenere stime accurate della resistenza a taglio di compositi simili a quello provato.

## 2.5 Coefficienti di Poisson

Come accade per le altre proprietà fisico-meccaniche, il coefficiente di Poisson di un composito unidirezionale varia con la direzione considerata. Come sarà mostrato nei successivi capitoli il valore relativo alla generica direzione può essere valutato a partire dalla conoscenza del coefficiente di Poisson longitudinale  $\nu_{12}$  e di quello trasversale  $\nu_{21}$ . Per valutare l'effetto Poisson nella generica direzione è necessario pertanto stimare tali coefficienti.

### 2.5.1 Coefficiente di Poisson $\nu_{12}$

Il coefficiente di Poisson  $\nu_{12}$ , dato dall'opposto del rapporto tra la deformazione trasversale e quella longitudinale causate da una stato monoassiale di tensione in direzione longitudinale, può essere stimato utilizzando l'elemento di volume rappresentativo già usato in precedenza (Fig.15).



**Fig.15** - Modello di composito e notazione usati per la determinazione di  $\nu_{12}$

Con riferimento alla notazione mostrata in figura 15, l'applicazione di una tensione longitudinale produce nella lamina una deformazione trasversale data da:

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta w_f + \Delta w_m}{w} = \frac{-\nu_f \varepsilon_1 w_f - \nu_m \varepsilon_1 w_m}{w}; \quad (49)$$

Utilizzando la definizione del coefficiente di Poisson e tenendo conto che per il modello considerato il rapporto tra lo spessore del singolo componente e lo spessore della lamina ( $w_i/w$ ) coincide con la relativa concentrazione in volume, si ha:

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \nu_f V_f + \nu_m V_m \quad (50)$$

La (50) mostra che, similmente alle altre grandezze “longitudinali”, il coefficiente di Poisson  $\nu_{12}$  del composito è legato a quelli di fibre e matrice dalla regola delle miscele. Il valore teorico stimato con la (50) è valido nella ipotesi che la fibra abbia un comportamento isotropo. Poichè la misura del coefficiente di Poisson di una fibra è piuttosto complesso per le esigue dimensioni della stessa, spesso la (50) è utilizzata per determinazione indiretta del coefficiente di Poisson delle fibre a partire dalla misura di quella della matrice e del composito. La (50) fornisce in genere valori che presentano scostamenti dai valori rilevati sperimentalmente. Tali scostamenti sono in genere considerati trascurabili per il fatto che piccole variazioni del coefficiente di Poisson non determinano grandi variazioni sulla valutazione dello stato tensionale eseguita in sede di progettazione.

Poiché i coefficienti di Poisson di fibra e matrice sono piuttosto vicini ( $\nu_m=0.35-0.4$ ,  $\nu_f=0.15-0.25$ ), in accordo con la (50) il coefficiente di Poisson del composito assume generalmente valori prossimi a quelli dei metalli, cioè  $\nu_{12} \approx 0.25-0.3$ .

### 2.5.2 Coefficiente di Poisson $\nu_{21}$

Si osservi anzitutto che il coefficiente di Poisson  $\nu_{12}$  risulta in genere più grande di  $\nu_{21}$ : ad una deformazione in direzione longitudinale del composito seguono significative deformazioni trasversali della matrice, mentre ad una stessa deformazione trasversale seguono solo limitate deformazioni longitudinali della matrice essendo queste fortemente impedita dalle più rigide fibre. Per questo i coefficienti di Poisson  $\nu_{12}$  e  $\nu_{21}$  sono indicati sovente nella letteratura inglese coi termini di *major Poisson ratio* e *minor Poisson ratio* rispettivamente.

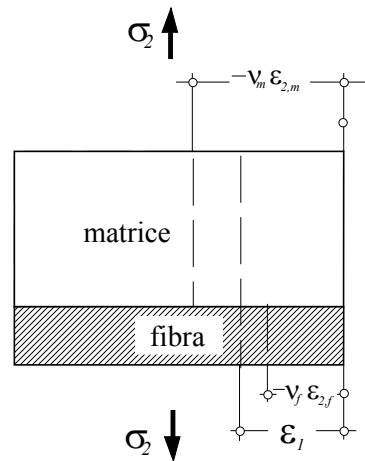
Il coefficiente  $\nu_{21}$  non è però una costante elastica indipendente da quelle precedentemente calcolate, ed il comportamento meccanico di una lamina ortotropa nel piano della lamina è sempre univocamente determinato dalle 4 costanti elastiche  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$  e  $\nu_{12}$  prima definite. Il coefficiente  $\nu_{21}$  è infatti legato ai moduli di Young ed al coefficiente di Poisson  $\nu_{12}$  dalla nota relazione:

$$\frac{\nu_{12}}{\nu_{21}} = \frac{E_1}{E_2} \Rightarrow \nu_{12} = \nu_{21} \frac{E_1}{E_2} \quad (51)$$

La validità della (51) si dimostra facilmente considerando che l'applicazione di una tensione monoassiale  $\sigma_2$  in direzione trasversale produce una deformazione trasversale  $\varepsilon_2$  pari a:

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} \quad (52)$$

ed una deformazione longitudinale che può essere calcolata considerando le interazioni fibra matrice dovute alla diversa deformabilità, cioè al diverso coefficiente di Poisson (vedi figura seguente).



**Fig. 16** – Deformazioni longitudinali di lamina soggetta ad una tensione trasversale  $\sigma_2$ .

Con riferimento alla figura 16 si ha che se fibra e matrice fossero liberi di deformarsi allora sotto la sollecitazione di trazione trasversale per effetto Poisson la matrice assumerebbe una deformazione longitudinale pari a  $-\nu_m \varepsilon_{2,m}$  mentre la fibra assumerebbe la deformazione  $-\nu_f \varepsilon_{2,f}$ . Essendo tipicamente  $\nu_m > \nu_f$ , la matrice assumerebbe una deformazione in modulo superiore a quella della matrice. Nel composito invece i due materiali assumono la stessa deformazione longitudinale cosicché i due materiali subiscono una deformazione meccanica pari rispettivamente a  $\varepsilon_m^{(M)}$  e  $\varepsilon_m^{(M)}$ . Considerando matrice e fibra si ha in particolare:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_f^M - \nu_f \varepsilon_{2,f} \quad (53)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_m^M - \nu_m \varepsilon_{2,m} \quad (54)$$

Le deformazioni meccaniche assumono pertanto l'espressione:

$$\varepsilon_f^M = \varepsilon_1 + \nu_f \varepsilon_{2,f} \quad (55)$$

$$\varepsilon_m^M = \varepsilon_1 + \nu_m \varepsilon_{2,m} \quad (56)$$

A tali deformazioni meccaniche sono associate delle tensioni e quindi dei carichi di trazione (matrice) e compressione (fibra)  $P_m$  e  $P_f$  dati da:

$$P_f = E_f \varepsilon_f^M V_f = E_f (\varepsilon_1 + \nu_f \varepsilon_{2,f}) V_f \quad (57)$$

$$P_m = E_m \varepsilon_m^M V_m = E_m (\varepsilon_1 + \nu_m \varepsilon_{2,m}) V_m \quad (58)$$

La somma dei due sforzi deve essere identicamente nulla trattandosi di sollecitazioni interne. Si ha cioè:

$$P_f + P_m = 0; \Rightarrow E_f (\varepsilon_1 + \nu_f \varepsilon_{2,f}) V_f + E_m (\varepsilon_1 + \nu_m \varepsilon_{2,m}) V_m = 0 \quad (59)$$

Ricavando la deformazione longitudinale dalla (63) e tenendo conto delle relazioni trovate per il modulo di Young longitudinale e per il coefficiente di Poisson  $\nu_{12}$  si ottiene:

$$\varepsilon_1 = -\sigma_2 \frac{\nu_f V_f + \nu_m V_m}{E_f V_f + E_m V_m} = -\sigma_2 \frac{\nu_{12}}{E_1} \quad (60)$$

Utilizzando pertanto la definizione del coefficiente di Poisson  $\nu_{12}$  dalla (60) si ha quindi:

$$\nu_{21} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = -\sigma_2 \frac{\nu_{12}}{E_1} \frac{E_2}{\sigma_2} = \nu_{12} \frac{E_2}{E_1} \quad (61)$$

che dimostra la (51). Tenuto conto che nei compositi a matrice polimerica il modulo di Young longitudinale è mediamente di un ordine di grandezza superiore a quello trasversale, dalla (51) segue che  $\nu_{21}$  è di un ordine di grandezza inferiore al coefficiente  $\nu_{12}$ .

## 2.5 Coefficienti di dilatazione termica

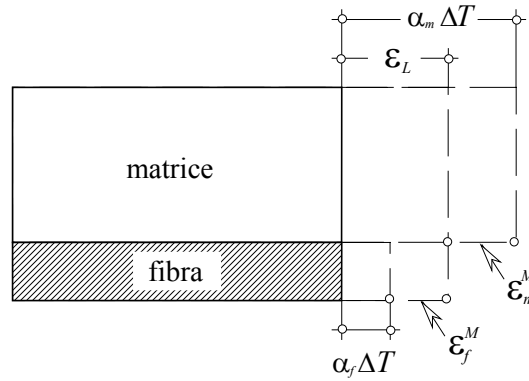
Come le caratteristiche meccaniche quali rigidità e resistenza, anche il coefficiente di dilatazione termica lineare di una lamina composita è diverso nelle due direzioni, longitudinale e trasversale.

In genere, poiché il coefficiente di dilatazione termica lineare delle fibre è più piccolo di quello della matrice e quindi le fibre impediscono la dilatazione termica della matrice in direzione longitudinale, il coefficiente di dilatazione termica del composito in direzione longitudinale  $\alpha_L$  è più piccolo di quello trasversale  $\alpha_T$ .

Inoltre, la valutazione di tali coefficienti è sovente di particolare interesse nella progettazione meccanica con materiali compositi, tenuto conto che con fibre come carbonio e Kevlar dotate di coefficienti di dilatazione negativi, è possibile ottenere compositi con elevata stabilità termica, cioè con coefficiente di dilatazione pressoché nullo.

### 2.5.1 Coefficiente di dilatazione $\alpha_L$

Il coefficiente di dilatazione longitudinale può essere calcolato tenendo appunto conto che ad un incremento di temperatura segue una deformazione longitudinale del composito che per congruenza è eguale a quella di fibra e matrice (vedi fig.17).



**Fig. 17** – Dilatazioni e deformazioni longitudinali di lamina soggetta a variazione di temperatura

Con riferimento a fibra e matrice rispettivamente si può scrivere:

$$\varepsilon_L = \varepsilon_f^M + \alpha_f \Delta T \quad (62)$$

$$\varepsilon_L = \varepsilon_m^M + \alpha_m \Delta T \quad (63)$$

Per l'equilibrio fibra e matrice si scambiano uno sforzo legato alla deformazione impedita. La matrice e la fibra conseguentemente risultano soggetti ad uno sforzo  $S_m$  e  $S_f$  proporzionale alla deformazione meccanica subita. Con riferimento alla fig.17 si ha:

$$S_m = \varepsilon_m E_m V_m = (\varepsilon_L - \alpha_m \Delta T) E_m V_m \quad (64)$$

$$S_f = \varepsilon_f E_f V_f = (\varepsilon_L - \alpha_f \Delta T) E_f V_f \quad (65)$$

Per l'equilibrio la somma dei due sforzi (interni) deve essere nulla, cioè:

$$S_f + S_m = 0 \Rightarrow (\varepsilon_L - \alpha_f \Delta T) E_f V_f + (\varepsilon_L - \alpha_m \Delta T) E_m V_m \quad (66)$$

Tenendo conto della definizione di coefficiente di dilatazione termica lineare ( $\alpha_L = \varepsilon_L / \Delta T$ ), dalla (66) dopo semplici passaggi si ottiene:

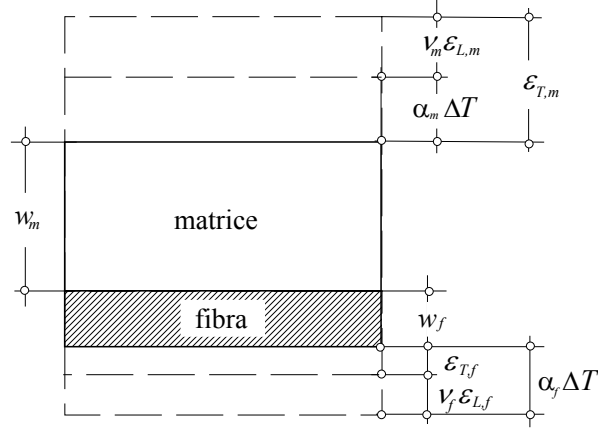
$$\alpha_L = \frac{\alpha_f E_f V_f + \alpha_m E_m V_m}{E_f V_f + E_m V_m} \quad (67)$$

La (67) mostra come in pratica il coefficiente di dilatazione termica lineare longitudinale della lamina composita è dato dalla media dei coefficienti di dilatazione dei costituenti pesata con la rigidità ovvero, tenendo conto della costanza della lunghezza, con il prodotto del modulo di Young per la concentrazione in volume. Tenendo conto inoltre della regola delle miscele per il modulo di Young longitudinale  $E_L$ , la relazione trovata si può anche scrivere come:

$$\alpha_L = \frac{\alpha_f E_f V_f + \alpha_m E_m V_m}{E_L} \quad (68)$$

### 2.5.2 Coefficiente di dilatazione $\alpha_2$

Più complessa risulta invece la determinazione del coefficiente di dilatazione termica in direzione trasversale. Per fare ciò occorre tenere presente che a causa della compressione della matrice operata dalle fibre, oltre alla dilatazione la matrice subisce per effetto Poisson una deformazione positiva in direzione trasversale che si aggiunge alla dilatazione. Per lo stesso motivo le fibre subiscono una deformazione trasversale negativa che si sottrae alla corrispondente dilatazione come indicato schematicamente nella seguente figura 18.



**Fig. 18** – Dilatazioni e deformazioni trasversali di lamina soggetta a variazione di temperatura

Con riferimento alla figura 18 per la matrice si ha quindi:

$$\varepsilon_{T,m} = \alpha_m \Delta T - \nu_m \varepsilon_{L,m}^M = \alpha_m \Delta T - \nu_m (\varepsilon_L - \alpha_m \Delta T) = (1 + \nu_m) \alpha_m \Delta T - \nu_m \alpha_L \Delta T \quad (69)$$

Per la fibra si ha analogamente:

$$\varepsilon_{T,f} = \alpha_f \Delta T - \nu_f \varepsilon_{L,f}^M = \alpha_f \Delta T - \nu_f (\varepsilon_L - \alpha_f \Delta T) = (1 + \nu_f) \alpha_f \Delta T - \nu_f \alpha_L \Delta T \quad (70)$$

La deformazione subita dalla lamina in direzione trasversale è data da:

$$\varepsilon_T = \frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta w_m + \Delta w_f}{w} = \frac{\varepsilon_{T,m} w_m + \varepsilon_{T,f} w_f}{w} = \varepsilon_{T,m} V_m + \varepsilon_{T,f} V_f \quad (71)$$

Sostituendo le precedenti nella (71) si ottiene quindi:

$$\varepsilon_T = \varepsilon_{T,m} V_m + \varepsilon_{T,f} V_f = (1 + \nu_f) \alpha_f V_f \Delta T + (1 + \nu_m) \alpha_m V_m \Delta T - \alpha_L \nu_f V_f \Delta T - \alpha_L \nu_m V_m \Delta T \quad (72)$$

Dividendo per  $\Delta T$  e tenendo conto dell'espressione del coefficiente di Poisson del composito si ha infine:

$$\alpha_T = \frac{\varepsilon_T}{\Delta T} = (1 + \nu_f) \alpha_f V_f + (1 + \nu_m) \alpha_m V_m - \alpha_L \nu_{12} \quad (73)$$

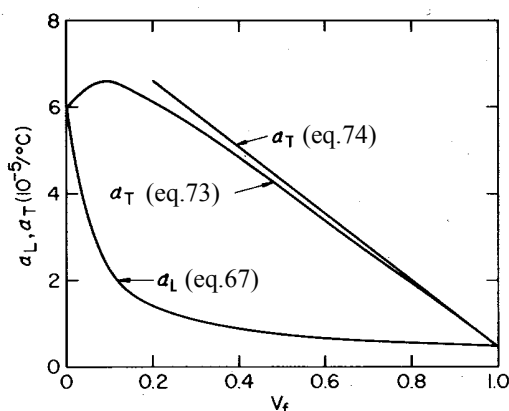
La (73), come la (49) che fornisce il coefficiente di dilatazione termica lineare, è una relazione non lineare nella percentuale di fibre e matrice della lamina.



A titolo di esempio nella figura seguente è riportato l'andamento dei due coefficienti di dilatazione termica lineare per una lamina fibra di vetro-resina epossidica (con  $\alpha_f=5$  ppm/°C,  $\alpha_m=60$  ppm/°C,  $E_f=70000$  MPa,  $E_m=3500$  MPa,  $\nu_m=0.35$ ,  $\nu_f=0.20$ ) al variare della percentuale di fibre. Nella figura seguente è pure riportato l'andamento della espressione:

$$\alpha_T \approx \alpha_f V_f + (1 + \nu_m) \alpha_m V_m \quad (74)$$

con la quale si può approssimare il coefficiente di dilatazione termica trasversale per  $V_f > 0.25$ .



**Fig. 19-** Andamento dei coefficienti di dilatazione termica al variare della concentrazione delle fibre.

E' importante osservare come, essendo il coefficiente di dilatazione in direzione longitudinale della lamina la media pesata di quello di fibra e matrice, utilizzando per esempio fibre aventi un coefficiente di dilatazione termica lineare negativo (Kevlar-49) o molto basso (fibre di carbonio), è possibile ottenere in pratica un composito con coefficiente di dilatazione termica lineare longitudinale pressoché nullo il che significa stabilità dimensionale dei manufatti in direzione longitudinale al variare della temperatura. E' questo un requisito molto importante in vari elementi di macchina soggetti a variazioni di temperatura. Alla elevata stabilità termica longitudinale sono però in genere associate elevate dilatazioni trasversali essendo il coefficiente trasversale più vicino a quello della matrice e quindi generalmente superiore a quello dei metalli tecnici.

A titolo di esempio nella seguente tabella sono riportati, tra le altre caratteristiche, i coefficienti di dilatazione termica longitudinale e trasversale di alcune lamine unidirezionali.

**Tabella 2** – Proprietà caratteristiche di lamine composite con rinforzo unidirezionale.

Property	E-Glass	Kevlar-49	Graphite (Thornel 300)
Fiber volume fraction	46	60-65	63
Specific gravity	1.80	1.38	1.61
Tensile strength, 0° (MPa)	1104	1310	1725
Tensile modulus, 0° (GPa)	39	83	159
Tensile strength, 90° (MPa)	36	39	42
Tensile modulus, 90° (GPa)	10	5.6	10.9
Compression strength, 0° (MPa)	600	286	1366
Compression modulus, 0° (GPa)	32	73	138
Compression strength, 90° (MPa)	138	138	230
Compression modulus, 90° (GPa)	8	5.6	11
In-plane shear strength (MPa)	—	60	95
In-plane shear modulus (GPa)	—	2.1	6.4
Longitudinal Poisson's ratio ( $\nu_{LT}$ )	0.25	0.34	0.38
Interlaminar shear strength (MPa)	31	69	113
Longitudinal coefficient of thermal expansion ( $10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ )	5.4	-2.3 to -4.0 <sup>a</sup>	0.045
Transverse coefficient of thermal expansion ( $10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ )	36	35 <sup>b</sup>	20.2

<sup>a</sup> - 79°C to +100°C

<sup>b</sup> - 195°C to +120°C

Si vede come la lamina in fibra di carbonio (Thornel 300) ha in pratica coefficiente di dilatazione termico longitudinale nullo (perfetta stabilità termica longitudinale) mentre quella con Kevlar è caratterizzata da piccoli valori negativi. Il coefficiente trasversale risulta invece variabile tra 20 e 36  $\cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ .