

### 3. Compositi a fibre corte

#### 3.1. Generalità

Come visto al capitolo precedente, laminati compositi unidirezionali compositi a fibre lunghe sono caratterizzati da una elevata resistenza nella direzione delle fibre unita ad una bassa resistenza in direzione trasversale. Noto quindi lo stato tensionale nel componente in progetto, l'uso corretto di tali compositi prevede di orientare opportunamente le fibre nella direzione della massima tensione. Ciò consente di ottimizzare lo sfruttamento del materiale. Nel caso invece in cui lo stato tensionale è prossimo a quello idrostatico oppure la direzione di applicazione del carico può subire significative variazioni nelle diverse condizioni di esercizio, i laminati unidirezionali non possono essere utilizzati ed è necessario passare all'uso di laminati angle-ply.

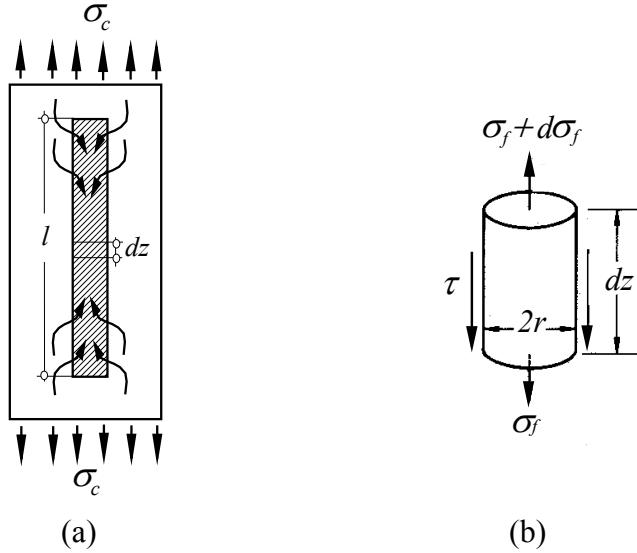
Sebbene a partire da lamine unidirezionali possono essere facilmente ottenuti anche laminati globalmente isotropi, in questi casi risulta più vantaggioso l'uso di lamine ottenute con rinforzo in fibre corte orientate in modo casuale (*discontinuous-fiber-reinforced composites*). L'uso infatti di laminati globalmente isotropi può dar luogo a fenomeni di rottura locale nelle lamine superficiali in direzione ortogonale alle fibre a causa della bassissima resistenza in questa direzione. Più economica risulta inoltre la realizzazione di compositi pressoché isotropi con rinforzo in fibre rispetto a quella di laminati quasi-isotropi. Laminati rinforzati con fibre corte (lunghezza 1-8 cm) orientate in modo pressoché casuale possono essere infatti facilmente ottenuti oltre che con la classica procedura di laminazione, anche con procedimenti di produzione continua come forgiatura a iniezione ecc. Infine, si producono anche compositi a fibre corte con orientamento preferenziale, che in genere sono meno resistenti e meno rigidi dei compositi a fibre lunghe, ma risultano più economici di questi.

Il comportamento meccanico dei compositi a fibre corte in genere differisce da quello a fibre lunghe ed in particolare, al contrario di quanto accade per i compositi a fibre lunghe, esso è legato alla lunghezza caratteristica delle fibre. Dalla lunghezza dipende in particolare la distribuzione delle tensioni ed il meccanismo di trasferimento del carico dalla matrice alla fibra.

#### 3.2. Trasferimento delle tensioni

Come nei compositi a fibra lunga, nei compositi a fibra corta (o interrotta o discontinua) il carico si trasmette alle fibre attraverso la matrice. La trasmissione del carico dalla matrice alle fibre avviene attraverso tensioni tangenziali concentrate prevalentemente alle estremità delle fibre (end effects). L'analisi teorica (teoria dell'elasticità) di sistemi bimateriale mostra infatti che anche in presenza di sollecitazioni semplici applicate, in corrispondenza degli spigoli dell'interfaccia si verificano stati di tensione singolari dello stesso tipo di quelli che si rilevano in prossimità dell'apice di una cricca in un materiale omogeneo isotropo (vedi MFLE). Nei compositi a fibre lunghe tali effetti di estremità, interessando una porzione di fibra relativamente piccola, sono praticamente trascurabili e non influenzano globalmente il comportamento meccanico del manufatto. Così non è invece per i compositi a fibra corta per i quali le caratteristiche elastiche ed ancor più il carico sopportato dalla fibra e quindi la resistenza meccanica è influenzata direttamente da tali effetti locali.

Per una comprensione del comportamento meccanico dei compositi a fibra corta è necessaria pertanto la conoscenza del meccanismo di trasmissione del carico. A tal fine si consideri una fibra a sezione retta circolare immersa nella matrice soggetta ad una sollecitazione di trazione  $\sigma_c$  allineata con la fibra come mostrato nella seguente in fig.1a. Considerando in particolare un tratto infinitesimo di fibra (vedi fig.1b), questo risulta soggetto ad una distribuzione di tensioni tangenziali sulla superficie laterale ed ad una tensione normale parallela all'asse e variabile con la ascissa corrente  $z$ .



**Fig.1** – Meccanismo di trasferimento del carico (a) ed equilibrio di tratto infinitesimo di fibra corta (b).

Per l'equilibrio alla traslazione lungo l'asse della fibra (vedi fig.1b) si ha:

$$\pi r^2 \sigma_f + 2\pi r \tau dz = \pi r^2 (\sigma_f + d\sigma_f) \quad (1)$$

Semplificando la (1) si ottiene la relazione tra la derivata delle tensioni normali sulla fibra e le tensioni tangenziali di interfaccia:

$$\frac{d\sigma_f}{dz} = \frac{2\tau}{r} \quad (2)$$

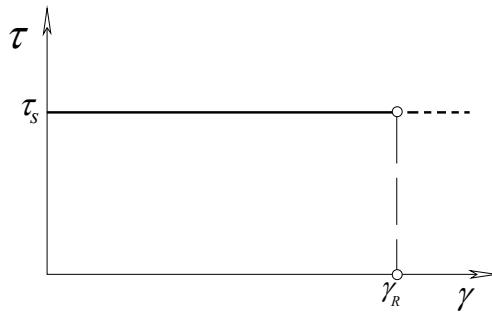
La (2) mostra come la derivata della tensione normale presente nella fibra è direttamente proporzionale alla tensione tangenziale applicata ed inversamente proporzionale alle dimensioni della fibra. L'andamento della tensione normale lungo la fibra può essere ottenuto quindi mediante integrazione della (2). Per una fibra a sezione trasversale costante si ha così:

$$\sigma_f = \sigma_{f,0} + \frac{2}{r} \int_0^z \tau dz \quad (3)$$

Per determinare l'andamento della tensione normale lungo la fibra è necessario quindi conoscere la tensione iniziale e l'andamento della tensione tangenziale sulla superficie laterale.

In generale, a causa di inevitabili fenomeni di concentrazione delle tensioni dovute alla diversa rigidezza tra fibra e matrice si verifica facilmente un parziale o totale distacco fibra-matrice in corrispondenza della estremità e conseguentemente la tensione iniziale  $\sigma_{f,0}$  risulta pressoché trascurabile. Anche in presenza di matrici duttili (assenza di distacco) tale tensione può essere trascurata in quanto inferiore alla tensione di rottura della matrice che in genere è piccola rispetto alle tensioni presenti nella fibra.

Per quanto concerne invece l'andamento della tensione tangenziale lungo la superficie laterale della fibra, essa evidentemente è legata al particolare comportamento della matrice (elastico, elasto-plastico ecc). Il modello più semplice, che bene approssima il comportamento di matrici duttili, è quello ideale di tipo rigido-perfettamente plastico (vedi fig.2): ad uno scorrimento non nullo corrisponde una tensione tangenziale costante e pari alla tensione tangenziale di scorrimento  $\tau_s$ .



**Fig.2** - Curva tensione-deformazione per materiale rigido perfettamente plastico.

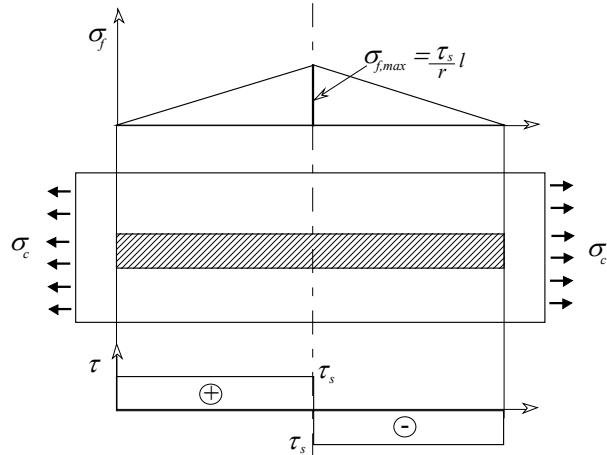
In queste condizioni la tensione tangenziale risulta praticamente costante lungo la fibra. Conseguentemente la tensione normale sulla fibra varia linearmente, essendo per la (3):

$$\sigma_f(z) = \frac{2\tau_s}{r} z \quad (4)$$

Il valore massimo di tensione si realizza ovviamente (simmetria) in corrispondenza della mezzeria della fibra ove si ha:

$$\sigma_{f,\max} = \sigma_f(l/2) = \frac{\tau_s}{r} l \quad (5)$$

La tensione massima per fibre corte è quindi proporzionale oltre che alla tensione di snervamento della matrice, anche alla lunghezza della fibra. Tensioni normali e tangenziali in una fibra corta hanno pertanto l'andamento rappresentato nella seguente figura 3.



**Fig.3** – Andamento della tensione normale e tangenziale per fibra corta in matrice duttile.

Si osservi come in pratica la distribuzione delle tensioni normali, e quindi anche il carico massimo sopportato dalla fibra pari a:

$$P_{\max} = \sigma_{f,\max} \pi r^2 = \tau_s \pi r l \quad (5')$$

risulta indipendente dal carico  $\sigma_c$  applicato al composito. In particolare, fissato il carico esterno applicato al composito, il carico sopportato dalla fibra (ovvero la massima tensione) risulta proporzionale alla lunghezza della fibra: diminuisce se si passa ad una fibra più corta, aumenta passando ad una fibra più lunga. L'uso pertanto dei fibre più lunghe consente di aumentare il carico sopportato da queste, ovvero consente di sfruttare maggiormente la resistenza del materiale. Ovviamente al crescere della lunghezza della fibra la tensione normale non può crescere indefinitamente in modo monotono spostandosi dall'estremità verso la mezzeria. Come è facile intuire infatti, esiste in pratica una lunghezza della fibra, oltre la quale la tensione assume nel tratto centrale un andamento costante in quanto il carico risulta completamente trasmesso dalla matrice alla fibra attraverso tensioni tangenziali che si sviluppano in due tratti di estremità della fibra. Nel tratto centrale pertanto non ci sarà più un trasferimento di carico e quindi nulle risulteranno le tensioni tangenziali. In accordo con la (2), nel tratto centrale la tensione normale sulla fibra risulterà costante. E' facile osservare come questa è la condizione tipica delle *fibre lunghe* per cui, come visto al capitolo precedente risulta:

$$\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_c \quad (6)$$

Se le deformazioni di fibra e matrice infatti sono eguali allora saranno nulli gli scorrimenti della matrice e quindi nulle risulteranno anche le tensioni tangenziali all'interfaccia. Dalla relazione (6) si ottiene immediatamente il valore della tensione (massima) presente nel tratto centrale della fibra; si ha:

$$\sigma_{f,\max} = \varepsilon_f E_f = \varepsilon_c E_f = \frac{E_f}{E_c} \sigma_c \quad (7)$$

La massima tensione presente nella fibra è in questo caso direttamente proporzionale al carico applicato  $\sigma_c$  ed al rapporto dei moduli di Young di fibra e composito, ovvero al rapporto dei moduli di Young fibra/matrice ed alla concentrazione in volume delle fibre.

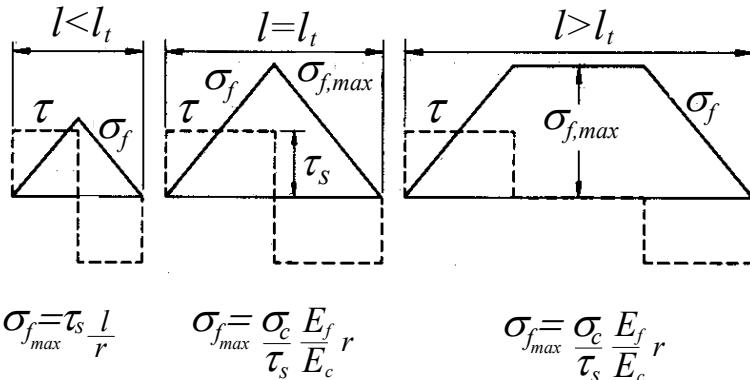
Sostituendo la (7) nella (5) si ottiene la lunghezza della fibra  $l_t$  ( $t$  sta per trasmissione completa del carico), detta lunghezza di totale trasmissione del carico, oltre la quale esiste un tratto centrale di fibra soggetto a tensione costante:

$$l_t = \sigma_{f,\max} \frac{r}{\tau_s} = \left( \frac{\sigma_c}{\tau_s} \right) \left( \frac{E_f}{E_c} \right) r \quad (8)$$

Si vede come, fermo restando le caratteristiche del composito, la lunghezza di trasferimento completo del carico  $l_t$  cresce al crescere della tensione ( $\sigma_c$ ) applicata al composito e decresce al crescere di  $\tau_s$ , cioè al crescere della capacità di trasferire carico da parte della matrice. Fissate quindi le caratteristiche della matrice ed il carico esterno applicato, se la lunghezza delle fibre è superiore alla lunghezza di trasferimento completo del carico  $l_t$  allora la tensione massima sulla fibra è fornita dalla eq.(7). Se invece la lunghezza delle fibre è inferiore ad  $l_t$  la massima tensione sulla fibra si ha in mezzeria (eq.5) e non cresce al crescere del carico esterno. Poiché la lunghezza di trasmissione totale del carico cresce col carico stesso e con questi cresce la tensione massima sulla fibra secondo la (7), esiste un valore limite o critico  $l_c$  (valore massimo della lunghezza di trasferimento totale del carico) corrispondente al massimo carico sopportabile dalla fibra. Eguagliando pertanto la massima tensione della fibra fornita dalla (5) con la tensione di rottura ( $\sigma_{f,R}$ ) della stessa si ha immediatamente:

$$l_c = \left( \frac{\sigma_{f,R}}{\tau_s} \right) r \quad (9)$$

La distribuzione delle tensioni tangenziali e normali in una fibra al variare della lunghezza, per dato carico applicato e per i diversi casi che possono presentarsi è mostrata nella figura seguente.

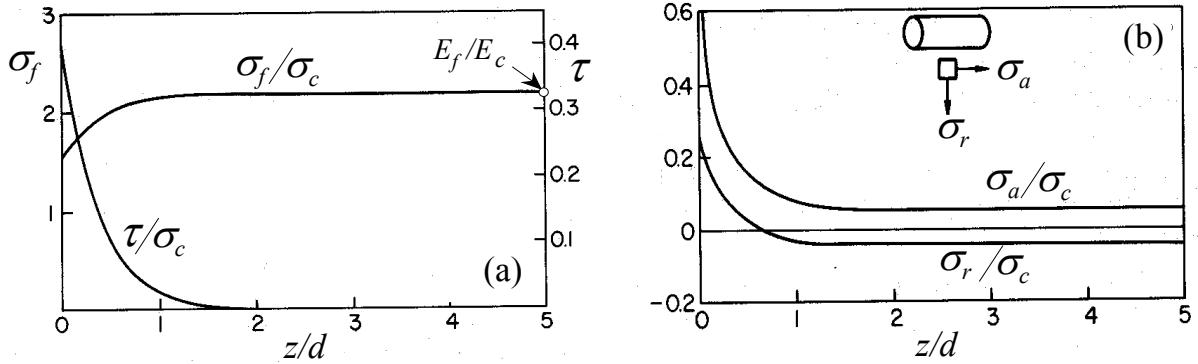


**Fig.4-** Andamento delle tensioni normali e tangenziali nella fibra al variare della lunghezza.

Dalla fig.4 si vede come, in accordo con la (5), se la lunghezza della fibra è minore o uguale a  $l_t$  allora un aumento del carico applicato al composito non produce un aumento della massima tensione sulla fibra, cioè non produce un aumento del carico sopportato dalla fibra e pertanto l'incremento di carico deve essere sopportato dalla matrice. Al contrario invece, se la lunghezza della fibra è superiore a  $l_t$  un aumento del carico applicato al composito produce, in accordo con la (7) un aumento della tensione massima e quindi un aumento del carico trasmesso; dalla distribuzione trapezoidale delle tensioni si può cioè passare nuovamente ad una triangolare. Ovviamente ciò si verifica sino a quando la tensione sulla fibra raggiunge la rottura, cioè sino a quando la lunghezza della fibra non raggiunge la lunghezza critica  $l_c$ . Un aumento della lunghezza al di là di questo valore risulta inutile ai fini di un aumento del carico trasmesso dalla fibra, limitato ora dalla sola resistenza meccanica a trazione della fibra. Al contrario ovviamente se la lunghezza della fibra è inferiore al valore critico  $l_c$  la massima tensione che si può verificare nella sezione di mezzeria risulta, valutabile mediante la (5), risulta inferiore alla tensione di rottura della fibra. Se la lunghezza della fibra è minore della lunghezza critica pertanto la rottura del composito avverrà sempre per rottura della matrice.

Per fibre di diametro dell'ordine di  $10 \mu\text{m}$ , la lunghezza critica assume valori piuttosto piccoli e sovente inferiori al millimetro. Per esempio per un composito fibra di vetro ( $\sigma_{f,R} = 2000 \text{ MPa}$ ) resina epossidica ( $\tau_s = 20 \text{ MPa}$ ) utilizzando la (9) si ottiene  $l_c = 1 \text{ mm}$ .

Questi risultati si basano a rigore sulla ipotesi fatta di matrice con comportamento duttile schematizzabile con il modello ideale rigido-perfettamente plastico. In realtà il comportamento della matrice è in generale di tipo elasto-plastico. In questo caso lo stato tensionale in cui si vengono a trovare fibra e matrice può essere facilmente calcolato con il metodo degli elementi finiti (FEM). Nel campo di comportamento elastico della matrice, l'andamento delle tensioni normali e tangenziali sulla fibra e sulla matrice adiacente la fibra, ottenute col FEM è riportato nella seguente in fig.5.

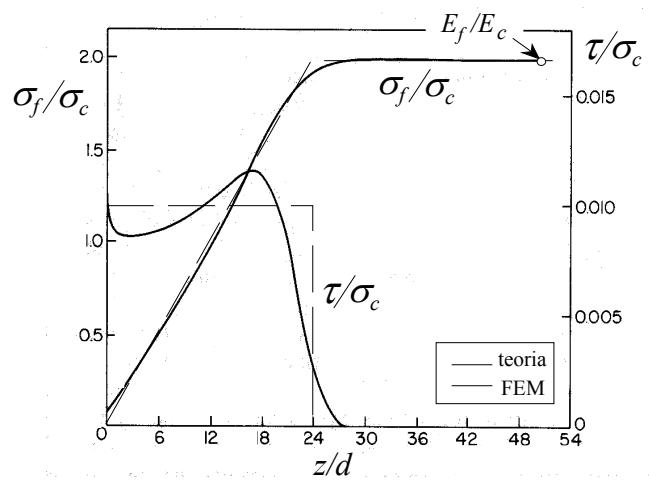


**Fig.5** - Tensioni nella fibra (a) e matrice (b), per matrice elastica con  $E_f/E_m=29.5$ ,  $l/r=5.2$  e  $V_f=0.42$ .

Dalla fig.5a si vede come, similmente al caso ideale di comportamento rigido-perfettamente plastico della matrice, la tensione normale sulla fibra cresce in un tratto limitato di fibra, avente in questo caso una estensione pari a circa 2 volte il diametro della fibra. Si ha però ora un significativo fenomeno di concentrazione delle tensioni tangenziali all'estremità della fibra, in accordo con l'analisi teorica del problema elastico associato. La tensione normale nella parte centrale della fibra tende esattamente al valore teorico descritto dalla eq.7, e cioè al prodotto del rapporto dei moduli di Young di fibra e composito per il carico applicato (valore prossimo a circa 2 volte il carico applicato per compositi a matrice polimerica con  $V_f \approx 0.5$ ).

Dalla fig.5b è interessante inoltre osservare come la tensione radiale che si sviluppa all'interfaccia fibra-matrice risulta di trazione in prossimità della estremità della fibra (end effects) facilitando localmente il *debonding*, mentre assume valori negativi (compressione) nella restante parte della fibra. Ciò fa sì che se le fibre sono parallele al carico e la distanza interfibra non è troppo piccola, anche se si verificano fenomeni di scollamento fibra-matrice causati da limitata adesione, è ancora possibile la trasmissione (totale o parziale) di carico dalla matrice alla fibra, a causa della presenza di forze di attrito associate alle tensioni radiali di compressione.

Nel caso di comportamento elasto-plastico della matrice, l'andamento delle tensioni tangenziali di interfaccia (vedi fig.6) risulta diverso da quello previsto per comportamento elastico lineare (fig.5) e piuttosto vicino a quello previsto teoricamente con il modello di matrice rigida perfettamente plastica (linea tratteggiata in fig.6).



**Fig.6** - Tensioni nella fibra, per matrice elasto-plastica con  $E_f/E_m=117$ ,  $\varepsilon_{s,m}=2.4\%$ ,  $l/r=200$  e  $V_f=0.50$ .

In ogni caso (matrice elastica o elasto-plastica) le tensioni tangenziali tendono a zero spostandosi verso la mezzeria della fibra mentre la tensione normale tende al valore limite caratteristico dei

compositi a fibre lunghe (eq.7). Questi effetti di estremità influenzano, come accennato, la rigidezza (modulo di Young) e la resistenza di un composito a fibre corte.

Per semplicità nella determinazione teorica di tali caratteristiche del composito si fa riferimento solitamente al valore medio della tensione lungo la fibra, cioè:

$$\bar{\sigma}_f = \frac{1}{l} \int_0^l \sigma_f dz \quad (10)$$

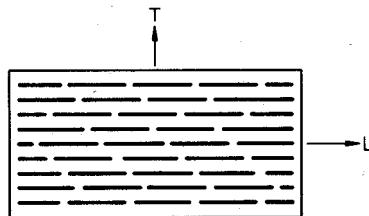
Tale valore si ottiene in generale mediante calcolo dell'area sottesa alla curva, teorica (es. eq.4) o numerica (es. fig.5a), che descrive l'andamento della tensione lungo la fibra. Nella ipotesi semplificativa di matrice rigida-perfettamente plastica, per quanto detto (vedi fig.4) la tensione media sulla fibra è pari:

$$\bar{\sigma}_f = \frac{\sigma_{f,\max}}{2} = \frac{\tau_s}{d} l; \quad \text{per } l < l_t; \quad \bar{\sigma}_f = \sigma_{f,\max} \left(1 - \frac{l_t}{2l}\right) = \frac{E_f}{E_c} \frac{\sigma_c}{\tau_s} r \left(1 - \frac{l_t}{2l}\right); \quad \text{per } l > l_t; \quad (11-12)$$

Mediante la (12) si mostra immediatamente come la tensione media è pari al 90% ed al 99% della tensione massima se la lunghezza della fibra è pari rispettivamente a circa 5 e 50 volte la lunghezza  $l_t$ . Considerando in particolare il carico di rottura delle fibre si ha che un composito a fibre discontinue si comporta in pratica come uno a fibre lunghe se la lunghezza delle fibre è pari a 5-50 volte la lunghezza critica, cioè per quanto sopra osservato ( $l_c=1$  mm) pari a 5-50 mm, che in pratica corrisponde appunto al range delle fibre discontinue (1-8 cm).

### 3.3. Modulo di elasticità

Il modulo di elasticità longitudinale di un composito a fibre corte parallele (vedi fig.7) può essere determinato per via analitica con approccio simile a quello usato per la determinazione del modulo di elasticità trasversale  $E_T$  nei compositi a fibra lunga, per la cui stima, come visto, può essere usata l'equazione di Halpin-Tsai (eq.31 del cap.2).



**Fig.7** – Modello semplificato di composito a fibre corte (interrotte) parallele.

Ovviamente, per quanto già visto al capitolo precedente, tale modulo dipende oltre che dal modulo di Young di fibra e matrice, dal rapporto caratteristico  $a/b \approx l/d$  e dal volume percentuale di fibra  $V_f$ . L'equazione di Halpin-Tsai consente quindi di valutare in pratica il modulo di elasticità longitudinale e trasversale di un composito a fibre corte parallele usando rispettivamente  $\zeta=2(l/d)$  e  $\zeta=2$ . Si ottiene in pratica:

$$\frac{E_L}{E_m} = \frac{1 + 2(l/d)\eta_L V_f}{1 - \eta_L V_f} \quad \text{con} \quad \eta_L = \frac{(E_f / E_m) - 1}{(E_f / E_m) + 2(l/d)} \quad (13-14)$$

$$\frac{E_T}{E_m} = \frac{1 + 2\eta_T V_f}{1 - \eta_T V_f} \quad \text{con} \quad \eta_T = \frac{(E_f / E_m) - 1}{(E_f / E_m) + 2} \quad (15-16)$$

Si osservi come il modulo di Young in direzione trasversale coincide in pratica con quello dei compositi a fibra lunga e, a differenza del modulo longitudinale, non dipende dal rapporto caratteristico ( $l/d$ ). Come è intuitivo, infatti, la distribuzione delle tensioni e delle deformazioni prodotta da un carico applicato in direzione trasversale non varia significativamente con la lunghezza delle fibre. Al contrario invece, come ampiamente mostrato al capitolo precedente la distribuzione delle tensioni (e quindi delle deformazioni) prodotta da un carico parallelo alle fibre varia fortemente col variare del rapporto caratteristico delle fibre ( $l/d$ ).

Le figure seguenti mostrano l'andamento del modulo di Young trasversale e longitudinale al variare del rapporto caratteristico  $l/d$  per due diversi valori del rapporto  $E_f/E_m$ , esattamente per  $E_f/E_m = 20$  (fibra di vetro-resina epossidica) ed  $E_f/E_m = 100$  (fibra di carbonio-resina epossidica). Si noti che, in accordo con le (13)-(16) il modulo di Young trasversale è rappresentato dai valori corrispondenti all'asse delle ordinate ( $l/d = 1$ ).

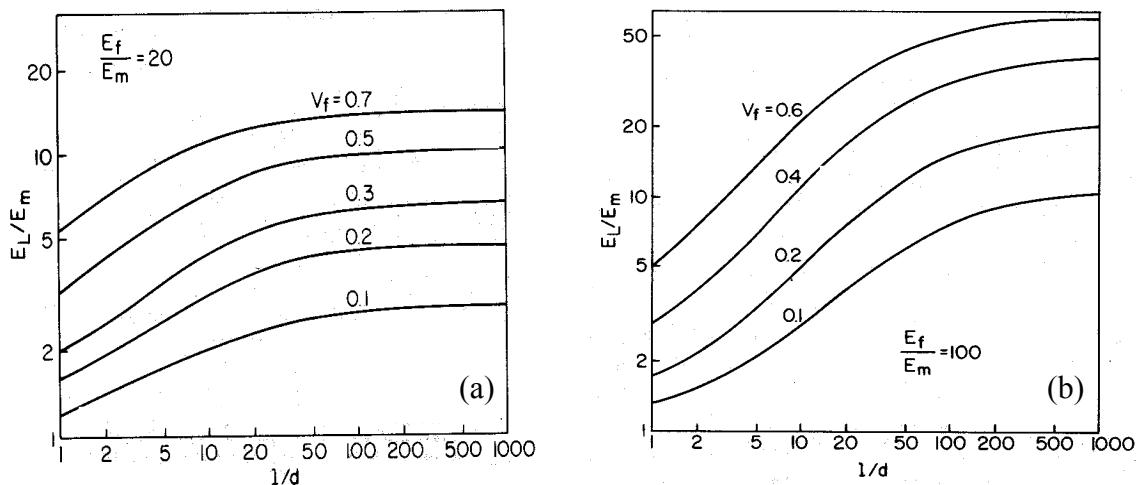


Fig.8 – Modulo elastico  $E_L$  per compositi a fibre corte parallele con  $E_f/E_m = 20$  (a) e  $E_f/E_m = 100$  (b).

Dalle fig8 si osserva come in pratica considerando il modulo di Young, un composito a fibre discontinue si comporta come uno a fibre lunghe per  $l/d \approx 1000$ , che per  $d \approx 10 \mu\text{m}$  corrisponde in pratica a circa 1 cm.

Nel caso di compositi a fibre corte con orientamento random, la stima del modulo di Young (ovviamente unico essendo il materiale praticamente isotropo) risulta più complessa. Una formulazione approssimata utilizzata nella progettazione è la seguente:

$$E_{random} = \frac{3}{8} E_L + \frac{5}{8} E_T \quad (17)$$

dove  $E_L$  ed  $E_T$  sono i moduli in direzione longitudinale e trasversale, determinati con le (15-16) per un composito equivalente a fibre parallele, avente cioè stessa percentuale di fibre ma parallele.

Al fine di facilitare la comprensione dei concetti sopra esposti si riporta nel seguito un esempio numerico.

#### Esempio:

Si consideri un composito a fibre corte parallele del tipo fibra di vetro-resina epossidica ( $E_f = 75000$

MPa,  $E_m=3000$  MPa,  $\sigma_{f,R}=3000$  MPa) con  $V_f=0.5$ , lunghezza delle fibre di 5 mm e diametro pari a 20  $\mu\text{m}$ , soggetto ad un carico monoassiale longitudinale. Calcolare il valore della lunghezza critica, ed il corrispondente modulo di Young longitudinale. Si valuti inoltre tensione massima nel caso di lunghezza pari al doppio del valore critico con  $\sigma_c=250$  MPa e la tensione media nel caso di incipiente rottura delle fibre ipotizzando un comportamento della matrice rigido-perfettamente plastico con  $\tau_s=20$  MPa.

Calcoliamo dapprima la lunghezza critica:

$$l_c = \sigma_{f,R} \frac{r}{\tau_s} = 3000 * \frac{10^{-2}}{20} = 1.5 \text{ mm}$$

Calcoliamo quindi il modulo di Young longitudinale utilizzando le eq.13 e 14, essendo  $l/d=75$ :

$$\eta_L = \frac{(E_f/E_m) - 1}{(E_f/E_m) + 2(l/d)} = \frac{25 - 1}{25 + 150} = 0.137; \quad \frac{E_L}{E_m} = \frac{1 + 2(l/d)\eta_L V_f}{1 - \eta_L V_f} = \frac{1 + 150 * 0.137 * .5}{1 - 0.137 * .5} = 12.11$$

e quindi tenendo conto che è  $E_m=3000$  MPa si ha:

$$E_L = 3000 * 12.11 = 36.350 \text{ MPa}$$

Si osserva che tale valore risulta già molto prossimo (scarto inferiore al 7%) a quello valutabile per fibre lunghe con la regola delle miscele che fornisce:

$$E'_L = 3000 * 0.5 + 75000 * .5 = 39.000 \text{ MPa}$$

In altre parole ai fini della rigidezza longitudinale un tale composito a fibre corte (solo 1 mm) si comporta quasi come uno a fibre lunghe.

Se le fibre hanno una lunghezza doppia di quella critica ed il composito è soggetto ad un carico  $\sigma_c=250$  MPa, minore della tensione di rottura, allora il modulo di Young del composito vale:

$$\eta_L = \frac{(E_f/E_m) - 1}{(E_f/E_m) + 2(l/d)} = \frac{25 - 1}{25 + 300} = 0.073; \quad E_L = E_m \left( \frac{1 + 2(l/d)\eta_L V_f}{1 - \eta_L V_f} \right) = 3000 \frac{1 + 300 * 0.073 * .5}{1 - 0.073 * .5} = 37.600$$

e quindi la massima tensione vale:

$$\sigma_{f,\max} = \frac{E_f}{E_c} \sigma_c = \frac{75}{37.6} 250 = 499 \text{ MPa} \quad (7)$$

La tensione media nelle condizioni di incipiente rottura delle fibre vale invece:

$$\bar{\sigma}_f = \sigma_{f,R} \left( 1 - \frac{l_c}{2l} \right) = 3000 * 0.75 = 2250 \text{ MPa}$$

La tensione media è pari quindi al 75% della tensione massima (uniforme nel tratto centrale) per fibre aventi una lunghezza di 3 mm.

Nella pratica solitamente si usano fibre discontinue con lunghezza maggiore (1-8 cm circa) di tale

valore anche per la difficoltà ad orientare le fibre in modo parallelo durante il processo di produzione. A questa esigenza si unisce il fatto che all'aumentare della lunghezza delle fibre migliorano anche le caratteristiche di resistenza meccanica delle stesse. Per questo nella pratica si usano fibre lunghe (dimensioni confrontabili con quelle dell'elemento) ovvero fibre discontinue di lunghezza non inferiore al centimetro circa.

### 3.4. Resistenza a trazione

La tensione media presente in una sezione trasversale di un composito a fibre corte parallele può essere facilmente ottenuta, similmente al caso dei compositi a fibre lunghe, eseguendo la media ponderata (regola delle miscele) delle tensioni presenti in fibra e matrice. Considerando per la fibra il valore medio della tensione presente, si ha:

$$\sigma_c = \bar{\sigma}_f V_f + \sigma_m V_m \quad (18)$$

con ovvio significato dei simboli. Nella ipotesi semplificativa di matrice perfettamente plastica, nei due casi di fibre aventi lunghezza minore o uguale (andamento lineare delle tensioni normali) e maggiore (andamento trapezio delle tensioni normali) della lunghezza  $l_t$ , usando le (11-12) e la (5) si ha rispettivamente:

$$\sigma_c = \frac{\tau_s l}{d} V_f + \sigma_m V_m \quad (l < l_t) \quad (19)$$

$$\sigma_c = \frac{\tau_s l_t}{r} \left(1 - \frac{l_t}{2l}\right) V_f + \sigma_m V_m \quad (l > l_t) \quad (20)$$

Se in particolare, come succede spesso, la lunghezza della fibra è molto superiore alla lunghezza  $l_t$ , essendo  $(l_t/2l) \approx 0$  la (20) diviene:

$$\sigma_c = \frac{\tau_s l_t}{r} V_f + \sigma_m V_m \quad (l \gg l_t) \quad (21)$$

Per quanto concerne la resistenza a trazione del composito a fibre corte parallele, ricordando quanto detto al capitolo precedente, se la lunghezza delle fibre è inferiore alla lunghezza critica  $l_c$  che consente il raggiungimento della tensione di rottura delle fibre, allora la rottura del composito avviene in corrispondenza della rottura della matrice. In accordo con la eq.(19) si ha quindi:

$$\sigma_{c,R} = \frac{\tau_s l}{d} V_f + \sigma_{m,R} V_m \quad (l < l_c) \quad (22)$$

Se invece al contrario, la lunghezza della fibra è maggiore della lunghezza critica e, come avviene solitamente, la deformazione di rottura della fibra è inferiore a quella della matrice, allora la rottura del composito corrisponde alla rottura delle fibre, cioè in accordo con la (20) si ha:

$$\sigma_{c,R} = \sigma_{f,R} \left(1 - \frac{l_c}{2l}\right) V_f + \tilde{\sigma}_m V_m \quad (l > l_c) \quad (23)$$

essendo  $\tilde{\sigma}_m$  la tensione sulla matrice corrispondente alla deformazione di rottura della fibra. Se poi la lunghezza delle fibre è molto più lunga della lunghezza critica, allora il composito si comporta in pratica come uno a fibra lunga e si ha:

$$\sigma_{c,R} = \sigma_{f,R} V_f + \tilde{\sigma}_m V_m \quad (l >> l_c) \quad (24)$$

Nelle eq.(23-24) si è supposto implicitamente che la percentuale di fibre presenti nella matrice sia sempre tale che alla rottura delle fibre segue la rottura dell'intero composito non essendo la sola matrice da sola capace di assorbire il carico di rottura delle fibre, cioè si è supposto che risulti:

$$\sigma_{c,R} A = [\sigma_{f,R} (1 - \frac{l_c}{2l}) V_f + \tilde{\sigma}_m V_m] A > \sigma_{m,R} (V_m A) \Rightarrow \sigma_{f,R} (1 - \frac{l_c}{2l}) V_f + \tilde{\sigma}_m V_m > \sigma_{m,R} V_m \quad (25)$$

ovvero che risulti:

$$V_f > \frac{(\sigma_{m,R} - \tilde{\sigma}_m)(1 - V_f)}{\sigma_{f,R} (1 - \frac{l_c}{2l})} \Rightarrow V_f > V_{\min} = \frac{(\sigma_{m,R} - \tilde{\sigma}_m)}{\sigma_{f,R} (1 - \frac{l_c}{2l}) + \sigma_{m,R} - \tilde{\sigma}_m} \quad (26)$$

Inoltre, come già osservato per i compositi a fibra lunga, esiste un valore critico della percentuale di fibre al di sotto del quale addirittura la resistenza del composito risulta inferiore a quella della sola matrice, cioè si ha:

$$\sigma_{c,R} A = [\sigma_{f,R} (1 - \frac{l_c}{2l}) V_f + \tilde{\sigma}_m V_m] A < \sigma_{m,R} A \Rightarrow \sigma_{f,R} (1 - \frac{l_c}{2l}) V_f + \tilde{\sigma}_m (1 - V_f) > \sigma_{m,R} \quad (27)$$

che riordinando si scrive come:

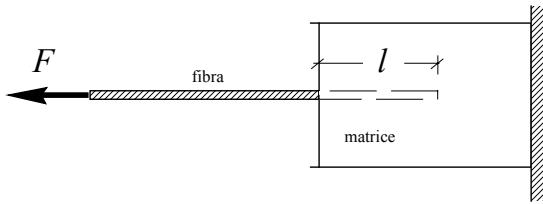
$$V_f < V_{\text{crit}} = \frac{\sigma_{m,R} - \tilde{\sigma}_m}{\sigma_{f,R} (1 - \frac{l_c}{2l}) - \tilde{\sigma}_m} \quad (28)$$

Ovviamente se il volume percentuale delle fibre risulta inferiore al valore minimo  $V_{\min}$ , la rottura del composito non segue la rottura delle fibre ma avviene allorquando la tensione sulla matrice, con fibre già rotte, raggiunge il valore di rottura della stessa. Si ha cioè la seguente tensione di rottura del composito:

$$\sigma_{c,R} A = (0 * V_f + \sigma_{m,R} V_m) A \Rightarrow \sigma_{c,R} = \sigma_{m,R} (1 - V_f) \quad \text{con } V_f < V_{\min} \quad (29)$$

In ogni caso, per una accurata previsione della resistenza di compositi a fibra corta occorre tenere conto della influenza dei fenomeni di concentrazione di tensione che si verificano in corrispondenza delle estremità delle fibre nonché delle approssimazioni introdotte dal modello teorico assunto per descrivere il comportamento della matrice. Ovviamente i fenomeni di concentrazione delle tensioni abbassano la resistenza del composito cosicché i valori della resistenza a trazione valutati teoricamente con le eq.(22-24) e (29) sovrastimano la resistenza effettiva valutabile per via sperimentale. I valori di resistenza stimati analiticamente possono essere utilizzati per una previsione di massima della resistenza del composito, utile a fini della progettazione, e per confrontare in modo semplice e veloce diverse soluzioni progettuali. Tali stime inoltre soffrono anche di altre approssimazioni legate per esempio a tensioni residue, umidità, vuoti ecc. Per questo una accurata valutazione della resistenza può essere fatta solo sperimentalmente. Per esempio una accurata valutazione della lunghezza critica si può ottenere sperimentalmente solo mediante il cosiddetto *pull-out test* consistente nell'applicare ad una fibra, annegata per una lunghezza  $l$  nella matrice uno sforzo di trazione (vedi fig.8) ed osservare se al crescere del carico avviene il semplice

sfilamento della fibra ( $l < l_c/2$ ) o questi è invece preceduto dalla rottura della fibra stessa ( $l \geq l_c/2$ ).



**Fig.8 – Pull-out test per la determinazione della lunghezza critica**

Variando la lunghezza annegata della fibra si determina così la lunghezza critica come il doppio della lunghezza minima della fibra per la quale lo sfilamento è preceduto dalla rottura.

Quanto detto sino ad ora è valido comunque per compositi a fibre corte parallele. Più complessa è la previsione della resistenza di compositi a fibre corte con orientamento random. A tal fine si fa uso solitamente della teoria dei laminati (vedi successivo cap.4), considerando che la resistenza di un composito a fibre corte random, è assimilabile a quella di un laminato pressoché isotropo ottenuto disponendo più lamine unidirezionali angolarmente equispaziate. Si ottengono in genere buone stime considerando per esempio un laminato simmetrico con 8 lamine del tipo  $[0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ]_s$ . Scostamenti relativi possono verificarsi a causa dell'interazione dei vari modi di frattura nel laminato e delle particolari condizioni di fabbricazione che pure possono influenzare significativamente la resistenza a rottura.

Come per i compositi a fibre lunghe, in accordo con le eq. (22-24) la resistenza a rottura di un composito a fibre corte cresce monotonicamente con la percentuale di fibre. In pratica però si verifica sperimentalmente che la resistenza non aumenta, anzi può decrescere, per percentuali superiori al 50% circa, a causa dell'abbassamento della qualità di tali manufatti legato principalmente a difficoltà di produrre compositi con elevata percentuale di fibre corte (bagnatura delle fibre). Tale valore percentuale di fibre costituisce pertanto il limite superiore per compositi a fibre corte.

### 3.5. Resistenza a fatica

I compositi a fibra corta, sono sovente utilizzati come plastiche rinforzate per sostituire le plastiche semplici in varie applicazioni caratterizzate da significative sollecitazioni di fatica ed impatto. In confronto ai compositi a fibre lunghe, i compositi a fibre corte sono, a parità di volume di fibre presenti, molto meno resistenti a fatica.

La rottura a fatica dei compositi a fibra corta è essenzialmente dovuta a fenomeni:

- 1) concentrazione di tensione che si verificano alle estremità delle fibre;
- 2) scollamento-fibra matrice che avvengono in direzione ortogonale alle fibre;
- 3) danneggiamento termico della matrice a causa del calore dissipato per isteresi e della bassa conducibilità termica della matrice;

Le cause 1) e 2) danno luogo alla formazione di cricche che possono più o meno facilmente propagarsi attraverso la matrice, in funzione delle caratteristiche di questa. A tal proposito la duttilità della matrice gioca un ruolo determinante.

In presenza di matrici fragili (es. polistirene), si assiste alla formazione di cricche di interfaccia e propagazione delle stesse attraverso la matrice. Ovviamente in questo caso la velocità di propagazione cresce all'aumentare della fragilità della matrice.

In presenza di matrici duttili (es. polietilene) invece, non si ha formazione di cricche e la rottura per fatica è determinata principalmente da diffusi fenomeni di "debonding". In presenza di matrici con caratteristiche intermedie, si osserva pure una limitata formazione di cricche assieme a diffusi fenomeni di scollamento. A titolo di esempio nelle figure seguenti sono riportate le curve di resistenza a fatica di alcuni compositi a fibre corte con fibra di vetro.

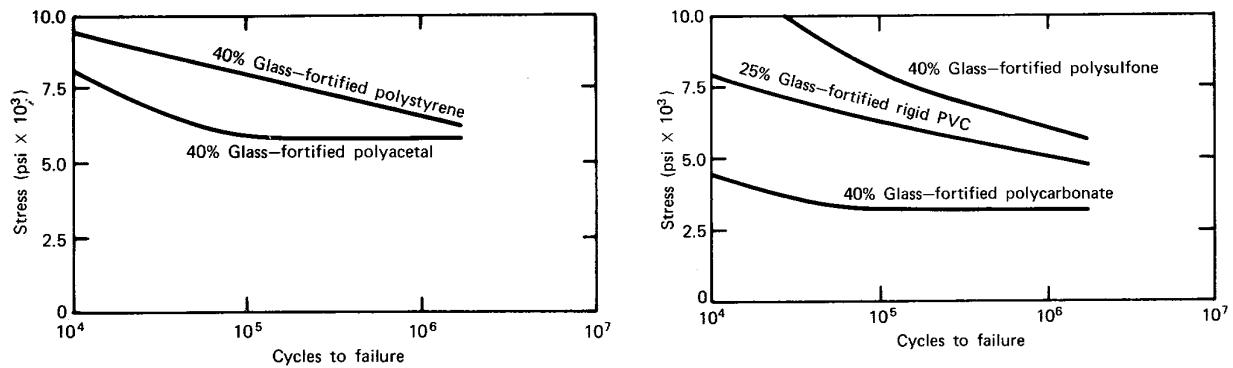


Fig.9 - Resistenza fatica di alcuni compositi a fibra corta.

### 3.6. Resistenza all'urto

Se la resistenza a fatica di compositi a fibre corte (plastiche fibro-rinforzate) è superiore a quella della sola matrice, (sebbene i miglioramenti sono inferiori rispetto a quelli che si ottengono con i compositi a fibre lunghe), la resistenza all'impatto di una plastica rinforzata può risultare inferiore a quella della sola matrice. In presenza di elevati carichi dinamici l'uso di plastiche fibro-rinforzate può essere quindi non conveniente. Ciò è vero particolarmente per matrici duttili (es. polietilene). In questo caso infatti la presenza di fibre relativamente rigide da luogo a stati tensionali tridimensionali nella matrice posta tra le fibre, con conseguente abbassamento della duttilità e quindi della resistenza all'impatto. Per matrici fragili (es. polistirene) invece la presenza di fibre da luogo a limitati miglioramenti della resistenza all'urto dovuti ad effetti di arresto dell'avanzamento, di diramazione e di arrotondamento dell'apice della cricca causati dalle fibre.

Tali fenomeni fanno sì che la resistenza all'urto di plastiche fibro-rinforzate non è in definitiva fortemente influenzata dalla duttilità della matrice, come mostra la seguente figura riportante i risultati di una prova Izod (provino a mensola) su provini di composito con fibra di vetro e matrice epossidica con diversa duttilità (la duttilità della matrice cresce passando da A a C).

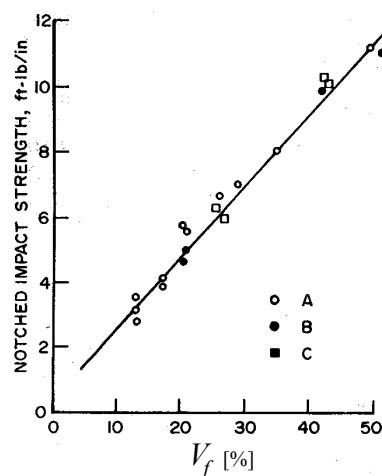


Fig.10 – Risultati di prova Izod su diversi materiali al variare della duttilità della matrice.

### 3.7. Resistenza alla frattura

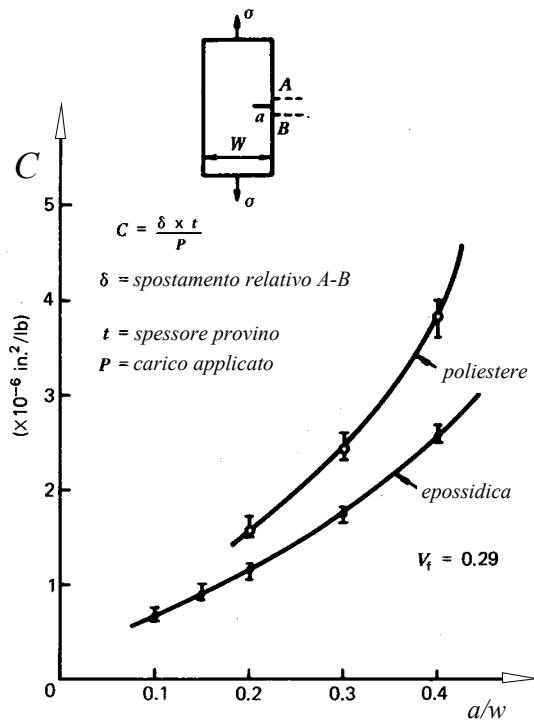
La resistenza alla frattura di compositi a fibre corte può essere determinata con test e provini analoghi a quelli usati per i materiali isotropi. Vari test sono stati condotti utilizzando provini intagliati soggetti a trazione e flessione.



**Fig.11** - Zona danneggiata davanti l'apice della cricca durante il processo di caricamento.

L'analisi delle curve carico applicato-apertura della cricca mostra che solitamente al crescere del carico si verifica prima una diminuzione della rigidezza del provino e poi segue la rottura. Una dettagliata analisi della zona antistante l'apice della cricca mostra che prima della rottura si verifica un cospicuo danneggiamento locale del materiale (vedi fig.11), che risulta praticamente equivalente ad una crescita lenta della cricca durante la fase di caricamento del provino. Per una corretta determinazione del valore critico del fattore di intensificazione delle tensioni è necessario tener conto dell'entità di tale danneggiamento computando l'incremento di lunghezza della cricca equivalente.

Costruendo preventivamente il diagramma cedevolezza-lunghezza della cricca, è possibile associare, tramite la misura della cedevolezza, il danneggiamento locale ad una equivalente estensione della cricca. Per esempio per il caso di cricca singola laterale, il diagramma cedevolezza-lunghezza cricca è mostrato in fig.12.

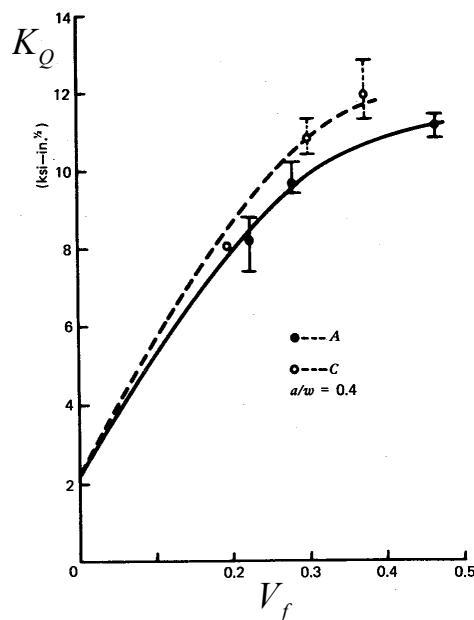


**Fig.12** - Curve cedevolezza-lunghezza cricca per compositi a fibre (di vetro) corte.

Per tale configurazione, come è noto, il fattore di intensificazione delle tensioni è dato dalla relazione:

$$K_I = Y\sigma\sqrt{a} \quad \text{con} \quad Y = 1.99 - 0.41(a/w) + 18.70(a/w)^2 - 38.48(a/w)^3 + 53.85(a/w)^4 \quad (30)$$

La determinazione del fattore critico di intensificazione delle tensioni a partire dalle curve sperimentali dell'andamento del carico applicato sul provino, avviene con procedura simile a quella usata per i materiali omogenei isotropi (vedi standards relativi). In particolare l'esperienza mostra che il fattore critico cresce al crescere della frazione di volume di fibre presenti, cioè nei compositi, contrariamente a quanto avviene nei materiali metallici ed in generale nei materiali tradizionali, la resistenza alla frattura aumenta con la resistenza a trazione del materiale. A titolo di esempio la figura seguente mostra l'andamento del fattore  $K_Q$  (candidato a divenire fattore critico) al variare della frazione volumica di fibre, per diversi compositi a fibre di vetro corte con matrice fragile (A) e duttile (C).



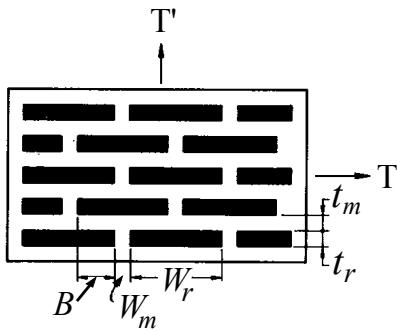
**Fig.13** - Fattore  $K_Q$  in funzione del volume di fibre per diversi compositi a fibre corte.

Diverse sono le variabili che influenzano la resistenza alla frattura di un composito a fibra corta. In sintesi si può affermare che la resistenza a frattura aumenta con (a) la resistenza delle fibre, (b) la frazione di volume delle fibre e con (c) la resistenza al debonding. Essa invece diminuisce al crescere (d) della temperatura e (e) della velocità di deformazione (infragilimento).

Come mostra chiaramente la precedente figura 13, le proprietà della matrice, come anche la configurazione della cricca, hanno invece influenza piuttosto ridotta (<10%) sulla resistenza alla frattura.

### 3.8. Compositi rinforzati con fibre corte nastriformi

Una interessante categoria di compositi a fibre corte è rappresentata dai compositi rinforzati con fibre nastriformi (*ribbon* o *tape-reinforced composites*), cioè con fibre a sezione trasversale rettangolare con rapporto larghezza ( $W_r$ )/spessore ( $t_r$ ) molto elevato (vedi fig.14).



**Fig.14** - Schema della sezione trasversale di composito rinforzato con fibre nastriformi.

Tali compositi permettono di abbassare notevolmente la permeabilità della matrice a gas e liquidi e sono caratterizzati in genere da un comportamento pressoché isotropo nel piano delle fibre (LT). Significativamente più bassa risulta invece la resistenza e la rigidezza in direzione (T') ortogonale a tale piano.

Con queste fibre si possono ottenere facilmente compositi con elevate percentuali di fibra. Con riferimento alla fig.14 il volume di fibra è esprimibile dalla relazione:

$$V_f = \frac{W_r t_r}{(W_r + W_m)(t_r + t_m)} \quad (31)$$

Riducendo pertanto opportunamente lo spessore interfibra della matrice  $t_m$ , e la distanza  $W_m$  è possibile aumentare, con idoneo procedimento di produzione, la frazione volumica di fibre.

Per quanto concerne la rigidezza del composito, come è intuitivo, il modulo in direzione longitudinale è dato, similmente al caso di fibre lunghe ( $l \gg l_c$ ), dalla regola delle miscele:

$$E_L = E_f V_f + E_m V_m \quad (32)$$

Il modulo in direzione trasversale (nel piano delle fibre) può essere invece stimato utilizzando la solita equazione di Halpin-Tsai, cioè:

$$\frac{E_T}{E_m} = \frac{1 + 2(W_r / t_r)\eta_f V_f}{1 - \eta_f V_f} \quad \text{con} \quad \eta_f = \frac{(E_f / E_m) - 1}{(E_f / E_m) + 2(W_r / t_r)} \quad (33-34)$$

Se il rapporto caratteristico ( $W_r / t_r$ ) diviene sufficientemente elevato, cioè le fibre hanno spessore molto piccolo in relazione alla larghezza, allora anche il modulo in direzione trasversale può essere stimato mediante una regola delle miscele. In queste condizioni infatti anche in direzione trasversale si ha in pratica le fibre si comportano come fibre lunghe e non vi sono significative differenze tra direzione longitudinale e trasversale (composito isotropo).

Il modulo di elasticità in direzione T' ortogonale al piano delle fibre può ovviamente ancora essere stimato tramite le (33-34) con semplice sostituzione del rapporto caratteristico ( $W_r / t_r$ ) col suo reciproco. Se la rigidezza del composito nel piano delle fibre è praticamente costante al variare della direzione, la rigidezza in direzione ortogonale è, come è facile comprendere, sempre molto più bassa.

Per quanto concerne infine la resistenza a trazione, in direzione delle fibre essa risulta da espressioni simili a quelle viste per i compositi a fibre lunghe mentre in direzione ortogonale essa può essere confrontabile con quest'ultima se la rottura in questa direzione avviene, come in

direzione longitudinale, per rottura (splitting) delle fibre. Affinché ciò si verifichi è necessario che lo sforzo di taglio che produce la rottura della matrice sia superiore allo sforzo che produce lo splitting delle fibre, cioè con riferimento alla figura 14 si abbia:

$$B\tau_{m,R} > t_r \sigma_{f,R} \quad (35)$$

con ovvio significato dei simboli.

Per ottenere elevate resistenze è necessaria una elevata resistenza allo scollamento fibra-matrice. In presenza di buona resistenza allo scollamento la resistenza cresce al crescere della percentuale di fibre, che in caso contrario può determinare invece una diminuzione della resistenza stessa. Per una buona qualità e resistenza del composito è bene che la matrice sia molto duttile, che riempia bene gli spazi interfibra e che il procedimento di produzione non dia luogo a vuoti e/o zone con scarsa adesione fibra-matrice da cui possono originarsi facilmente fenomeni di danneggiamento progressivo.