

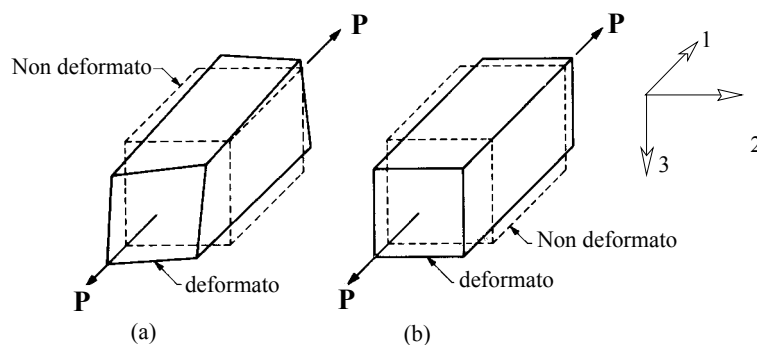
## 4. Analisi della lamina ortotropa

### 4.1. Generalità

Una lamina di composito con rinforzo unidirezionale o bidirezionale è un elemento di spessore generalmente troppo piccolo (compreso tra 0.1 e 5 mm circa) per essere utilizzata direttamente per la produzione di componenti strutturali. Per questo essa viene solitamente utilizzata per la costruzione dei laminati compositi le cui caratteristiche (spessore, numero lamine, orientamento ecc.) sono determinate sulla base delle specifiche esigenze di progetto. L'analisi di un laminato presuppone pertanto la conoscenza del comportamento meccanico della singola lamina ed in particolare delle sue equazioni costitutive.

Una lamina di composito è un elemento eterogeneo essendo la sua composizione praticamente variabile da punto a punto. Dal punto di vista macroscopico, cioè considerando una scala grande rispetto alla dimensione delle fibre, essa può però considerarsi omogenea. In questa scala, inoltre, essa esibisce un comportamento meccanico anisotropo, in particolare ortotropo. Si ricordi che un materiale si dice anisotropo quando le sue caratteristiche variano continuamente con la direzione considerata. In particolare se il materiale ammette tre piani di simmetria mutuamente ortogonali, esso dicesi ortotropo (ortogonalmente anisotropo) ed i piani di simmetria sono anche detti piani di ortotropia. In una lamina di composito tali piani sono individuati dal piano medio della lamina e dai piani a questo ortogonali paralleli alle due direzioni principali (direzione delle fibre e direzione ortogonale per rinforzo unidirezionale, direzioni delle fibre per rinforzo bidirezionale).

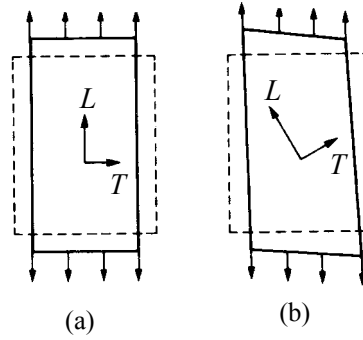
Per comprendere meglio la differenza tra un materiale anisotropo generico ed uno ortotropo è utile osservare per esempio che l'applicazione di un carico di trazione ad un elemento di forma cubica in materiale anisotropo, produce deformazioni e scorrimenti lungo tutti i lati dell'elemento (vedi fig.1a). Ciò si verifica indipendentemente dalla particolare direzione di applicazione del carico. Se invece il materiale anisotropo è in particolare ortotropo allora esistono tre direzioni mutuamente ortogonali (direzioni principali o assi naturali del materiale) tale che l'applicazione di uno sforzo normale (trazione o compressione) in tali direzioni produce, come per un isotropo, deformazioni lineiche nelle tre direzioni principali mentre sono nulle le distorsioni nei piani da queste individuati (vedi fig.1b). Ciò è immediata conseguenza della simmetria del materiale e della sollecitazione applicata: la presenza di eventuali scorrimenti violerebbe infatti tale simmetria.



**Fig.1** - Deformazione tipica di materiale anisotropo (a) ed ortotropo (b) soggetto a sforzo normale secondo una direzione principale.

Considerando piuttosto che un cubetto di materiale, una lamina composita “bidimensionale”, si ha che se la direzione di applicazione del carico coincide con una direzione principale (vedi figura seguente) allora ad uno sforzo normale semplice corrisponde uno stato di deformazione uniforme senza scorrimenti (fig.2a), mentre se la direzione del carico è deviata rispetto alle direzioni

principali il carico produce anche scorrimenti nel piano (fig.2b).



**Fig.2** - Deformazione di lamina ortotropa con carico secondo una direzione principale (a) e deviato (b).

Vediamo ora quali sono le relazioni costitutive di una lamina composita ortotropa nella usuale ipotesi di comportamento elastico lineare e piccole deformazioni.

#### 4.2. Legge di Hooke

Come è noto dalla Scienza delle Costruzioni, lo stato di tensione presente in un generico materiale nell'intorno del punto è univocamente descritto da 9 componenti di tensione  $\sigma_{ij}$  ( $i,j=1,2,3$ ). Lo stesso dicasi per lo stato di deformazione, descritto dalle nove componenti di deformazione  $\varepsilon_{kl}$  ( $k,l=1,2,3$ ). Conseguentemente, nella ipotesi di comportamento elastico lineare, la relazione lineare più generale tra tensioni e deformazioni (legge di Hooke generalizzata) si scrive in termini matriciali come:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & E_{1112} & E_{1113} & E_{1121} & E_{1122} & E_{1131} & E_{1132} \\ E_{2211} & E_{2222} & E_{2233} & E_{2212} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ E_{3311} & E_{3322} & E_{3333} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ E_{1211} & E_{1222} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

In alternativa essa può essere scritta in forma analitica mediante il seguente sistema di 9 relazioni:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l} E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (i,j,k,l=1,2,3) \quad (2)$$

Nel caso di materiale completamente anisotropo, pertanto, il legame tensioni-deformazioni, coinvolge  $9 \times 9 = 81$  costanti elastiche  $E_{ijkl}$  ( $i,j,k,l=1,2,3$ ). In realtà, poiché i tensori  $\sigma_{ij}$  e  $\varepsilon_{ij}$  sono simmetrici, cioè solo 6 componenti sono indipendenti, la relazione matriciale (1) per un materiale anisotropo può essere scritta in modo più compatto come:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & E_{1112} & E_{1113} & E_{1123} \\ E_{2211} & E_{2222} & E_{2233} & E_{2212} & E_{2213} & E_{2223} \\ E_{3311} & E_{3322} & E_{3333} & E_{3312} & E_{3313} & \cdot \\ E_{1211} & E_{1222} & E_{1233} & \cdot & \cdot & \cdot \\ E_{1311} & E_{1322} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ E_{2311} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Le costanti elastiche che descrivono il comportamento di un materiale anisotropo sono pertanto complessivamente  $6 \times 6 = 36$ . La matrice  $[E]$  così definita e detta matrice di rigidezza del materiale anisotropo.

Considerazioni di natura termodinamica, inoltre, permettono di mostrare che le costanti elastiche indipendenti sono soltanto 21. Considerando l'espressione generale dell'energia di deformazione  $U$ :

$$U = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (4)$$

Derivando questa rispetto alla generica componente di tensione  $\sigma_{ij}$  ed utilizzando la relazione (2) si ha:

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} = \sum_{k,l} E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (5)$$

Derivando la (5) rispetto alla generica componente di deformazione  $\varepsilon_{kl}$  si ottiene così:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{kl}} \sum_{k,l} E_{ijkl} \varepsilon_{kl} = E_{ijkl} \quad (6)$$

Derivando invece la funzione energia di deformazione rispetto alla deformazione  $\varepsilon_{kl}$  e successivamente la componente di tensione  $\sigma_{kl}$  rispetto alla deformazione  $\varepsilon_{kl}$  si ottiene:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} \sum_{k,l} E_{ijkl} \varepsilon_{kl} = E_{klij} \quad (7)$$

Essendo la funzione energia di deformazione continua rispetto alle deformazioni, in applicazione del teorema di invertibilità dell'ordine di derivazione si ottiene:

$$E_{klij} = E_{ijkl} \quad (8)$$

Cioè il tensore  $[E]$  che lega le componenti di tensione con le corrispondenti componenti di deformazione è simmetrico. Esso è pertanto univocamente definito dagli elementi della diagonale principale più gli elementi che stanno al di sopra (o al disotto) della diagonale principale. Per una matrice di ordine 6 tali elementi sono complessivamente pari a  $(6 \times 7)/2 = 21$ . In definitiva pertanto è possibile affermare che il comportamento elastico (lineare) di un materiale anisotropo è univocamente individuato da 21 costanti elastiche indipendenti e l'equazione costitutiva in termini matriciali assume la forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & E_{1112} & E_{1113} & E_{1123} \\ E_{1122} & E_{2222} & E_{2233} & E_{2212} & E_{2213} & E_{2223} \\ E_{1133} & E_{2233} & E_{3333} & E_{3312} & E_{3313} & E_{3323} \\ E_{1112} & E_{2212} & E_{3312} & E_{1212} & E_{1213} & E_{1223} \\ E_{1113} & E_{2213} & E_{3313} & E_{1213} & E_{1313} & E_{1323} \\ E_{1123} & E_{2223} & E_{3323} & E_{1223} & E_{1323} & E_{2323} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Se il materiale anisotropo è in particolare ortotropo, cioè presenta tre piani di simmetria mutuamente ortogonali allora è facile mostrare che le relative leggi costitutive involgono solo 9 costanti elastiche indipendenti.

Indicando infatti con 1,2,3 i tre assi principali del materiale, come osservato in precedenza, l'applicazione di una tensione  $\sigma_{ii}$  ( $i=1,2,3$ ) non produce distorsioni  $\varepsilon_{ij}$  ( $i \neq j$ ), cioè non si ha associazione tra tensioni normali agenti nelle direzioni principali e scorrimenti. Per esempio uno stato di tensione monoassiale  $\sigma_{11}$  produce deformazioni lineiche  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$  e  $\varepsilon_{33}$ , mentre saranno identicamente nulli gli scorrimenti  $\varepsilon_{ij}$  ( $i \neq j$ ). In applicazione della (2) si avrà quindi:

$$\sigma_{11} = \sum_{k,l} E_{11kl} \varepsilon_{kl} = E_{1111} \varepsilon_{11} + E_{1122} \varepsilon_{22} + E_{1133} \varepsilon_{33} + 0 + 0 + 0 \quad (9)$$

In altre parole, se la tensione  $\sigma_{11}$  non produce scorrimenti  $\varepsilon_{ij}$  ( $i \neq j$ ), allora deve risultare:

$$E_{11kl} = 0 \quad (k \neq l) \quad (10)$$

Cioè dovranno essere nulli gli ultimi tre termini della prima riga della matrice di rigidezza. Ripetendo il ragionamento per le altre due componenti di tensione normale  $\sigma_{22}$  e  $\sigma_{33}$  si ottiene in definitiva:

$$E_{22kl} = 0 \quad (k \neq l) \quad (11)$$

$$E_{33kl} = 0 \quad (k \neq l) \quad (12)$$

Risulteranno quindi identicamente nulli anche gli ultimi tre termini della seconda e terza riga della matrice di rigidezza. Tenuto conto della simmetria della matrice, per un materiale ortotropo si avrà pertanto:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ E_{1122} & E_{2222} & E_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ E_{1133} & E_{2233} & E_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{1212} & E_{1213} & E_{1223} \\ 0 & 0 & 0 & E_{1213} & E_{1313} & E_{1323} \\ 0 & 0 & 0 & E_{1223} & E_{1323} & E_{2323} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Inoltre, per la simmetria rispetto ai piani 1-2, 1-3 e 2-3, l'applicazione di uno sforzo di taglio  $\sigma_{ij}$  ( $i \neq j$ ,  $i,j=1,2,3$ ) non produce distorsioni  $\varepsilon_{kl}$  ( $k \neq l$ ) negli altri piani ( $ij \neq kl$ ), cioè in applicazione della (2) deve essere anche:

$$\sigma_{12} = \sum_{k,l} E_{12kl} \varepsilon_{kl} = E_{1212} \varepsilon_{12} + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \quad (14)$$

$$\sigma_{13} = \sum_{k,l} E_{13kl} \varepsilon_{kl} = E_{1313} \varepsilon_{13} + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \quad (15)$$

$$\sigma_{23} = \sum_{k,l} E_{23kl} \varepsilon_{kl} = E_{2323} \varepsilon_{23} + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \quad (16)$$

In virtù delle (14)-(16) saranno quindi identicamente nulli i termini della matrice di rigidezza:

$$E_{ij\,kl} = 0 \quad (i \neq j, k \neq l, ij \neq kl) \quad (17)$$

Risulteranno quindi identicamente nulli anche gli ultimi due termini della quarta riga della matrice di rigidezza, il sesto della quinta riga (quindi anche il quarto della quinta riga ed il quinto della sesta riga per la simmetria della matrice). Tenuto conto della simmetria della matrice, per un materiale ortotropo si avrà pertanto:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ E_{1122} & E_{2222} & E_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ E_{1133} & E_{2233} & E_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{2323} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

Si noti che il numero di costanti elastiche (9) che definiscono completamente il tensore [E] e quindi il comportamento elastico (lineare) di un materiale ortotropo, coincide con il numero di costanti ingegneristiche. Tenuto conto del legame tra moduli di Young e coefficienti di Poisson le costanti ingegneristiche indipendenti di un materiale ortotropo sono infatti:

$$E_L, E_T, E_{T'}, G_{LT}, G_{LT'}, G_{TT'}, \nu_{LT}, \nu_{LT'}, \nu_{TT'} \quad (19)$$

Il legame (biunivoco) tra i coefficienti della matrice di rigidezza e le costanti ingegneristiche può essere determinato considerando i casi di sollecitazione semplice considerati nella valutazione delle costanti ingegneristiche e cioè, sforzo normale semplice nelle tre direzioni principali e taglio puro (vedi anche capitolo successivo).

Se in particolare, come succede per la lamina con rinforzo unidirezionale, il materiale ortotropo è anche trasversalmente isotropo allora il numero di costanti indipendenti si riduce a 5. In questo caso infatti essendo il comportamento nelle due direzioni trasversali T e T' eguale, si ha:

$$E_T = E_{T'}, \nu_{LT} = \nu_{LT'}, G_{LT} = G_{LT'}, G_{TT'} = \frac{E_T}{2(1 + \nu_{TT'})} \quad (20)$$

cosicché le costanti elastiche indipendenti sono soltanto:

$$E_L, E_T, G_{LT}, \nu_{LT}, \nu_{TT'} \quad (21)$$

Con riferimento ai termini della matrice di rigidezza, per l'eguaglianza del comportamento nelle due direzioni trasversali 2 e 3 (isotropia trasversale) si ha:

$$E_{1122} = E_{1133}; \quad E_{2222} = E_{3333}; \quad E_{1212} = E_{1313}; \quad E_{2323} = (E_{2222} - E_{2233})/2; \quad (22)$$

La relazione matriciale (18) per un ortotropo trasversalmente isotropo assume pertanto la forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ E_{1122} & E_{2222} & E_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ E_{1122} & E_{2233} & E_{2222} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{1212} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (E_{2222} - E_{2233})/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

che coinvolge appunto solo 5 termini indipendenti:  $E_{1111}$ ,  $E_{1122}$ ,  $E_{2222}$ ,  $E_{2233}$ ,  $E_{1212}$ .

In presenza di stato piano di tensione, quale è quello che si verifica sovente in laminati soggetti a sollecitazioni parallele al piano medio ( $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ ), le tre componenti di tensione significative sono legate alle corrispondenti componenti di deformazione dalla relazione matriciale che si ottiene direttamente dalla (23) eliminando terza, quarta e quinta colonna nonché terza, quarta e quinta riga:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & 0 \\ E_{1122} & E_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & E_{1212} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

Semplificando la notazione tensoriale la (24) può essere scritta come:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

Per stato piano di tensione le costanti elastiche indipendenti sono pertanto solo 4. Ciò è in accordo con l'approccio ingegneristico che prevede in questo caso l'uso delle 4 costanti ingegneristiche:

$$E_L, E_T, G_{LT}, \nu_{LT}$$

A partire dalla (25) è possibile, mediante semplice inversione della matrice di rigidezza, ottenere la relazione tra deformazioni e tensioni, cioè:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

La matrice  $[S]$  prende il nome di matrice di cedevolezza della lamina ortotropa. I termini significativi di essa sono legati ai termini della matrice di rigidezza dalle note relazioni di

inversione della matrice, cioè:

$$S_{11} = \frac{E_{22}}{E_{11}E_{22} - E_{12}^2}; E_{22} = \frac{E_{11}}{E_{11}E_{22} - E_{12}^2}; S_{12} = -\frac{E_{12}}{E_{11}E_{22} - E_{12}^2}; S_{33} = \frac{1}{E_{33}}. \quad (27)$$

ovvero dalle inverse:

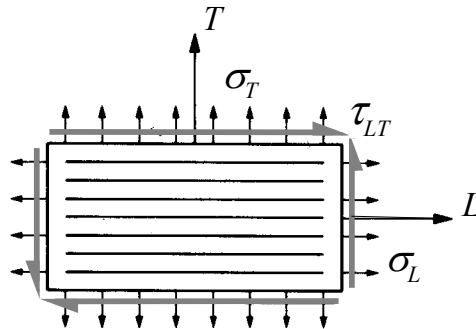
$$E_{11} = \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}; E_{22} = \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}; E_{12} = -\frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}; E_{33} = \frac{1}{S_{33}}. \quad (28)$$

In conclusione, si può affermare che le equazioni costitutive di un materiale anisotropo involgono 21 costanti elastiche indipendenti (ovvero matrici 6x6 piene simmetriche, vedi eq.9), quelle di un materiale ortotropo 9 costanti elastiche indipendenti (matrici 6x6 sparse, vedi eq.18), quelle di un materiale ortotropo trasversalmente isotropo 5 costanti elastiche indipendenti (matrici 6x6 sparse, vedi eq.23). Infine nel caso di stato piano di tensione le equazioni costitutive di un ortotropo involgono solo 4 costanti elastiche (matrici 3x3 sparse, vedi eqs.24 e 26). In ogni caso si ha una maggiore complessità rispetto al caso di materiali isotropi che involgono, per stati bidimensionali e tridimensionali, solo 2 costanti elastiche ( $E, \nu$ ). Ovviamente le equazioni costituite per materiale isotropo si ottengono immediatamente dalla (25) semplicemente ponendo  $E_{11}=E_{22}$ ;  $E_{12}=(E_{11}-E_{12})/2$ :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{11} & 0 \\ 0 & 0 & (E_{11} - E_{12})/2 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

#### 4.3. Relazioni tra costanti elastiche e termini delle matrici di rigidezza e cedevolezza

In presenza di uno stato di tensione biassiale il comportamento meccanico di una lamina ortotropa (vedi fig.3) è definito univocamente dalle 4 costanti elastiche ingegneristiche  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $G_{LT}$ ,  $\nu_{LT}$  (si ricordi che  $\nu_{TL}$  è legato a  $E_L$ ,  $E_T$  e  $\nu_{LT}$ ).



**Fig.3** - Schema di lamina ortotropa caricata con tensioni nel riferimento naturale.

Il legame tra tali costanti elastiche ed i termini della matrice di rigidezza si ottiene considerando la lamina soggetta ad uno stato monoassiale di tensione diretto secondo le direzioni principali ed ad uno stato di taglio puro.

Per uno stato di tensione monoassiale lungo la direzione longitudinale del materiale ( $\sigma_1 \neq 0$ ,  $\sigma_2 = \tau_{12} = 0$ ), la (26) fornisce immediatamente:

$$\begin{aligned}\varepsilon_L &= S_{11}\sigma_L \\ \varepsilon_T &= S_{12}\sigma_L\end{aligned}\quad (30)$$

Considerando pertanto le definizioni di modulo di Young e coefficiente di Poisson dalle (30) si ottiene immediatamente:

$$\begin{aligned}E_L &= \frac{\sigma_L}{\varepsilon_L} = \frac{1}{S_{11}} \Rightarrow S_{11} = \frac{1}{E_L} \\ \nu_{LT} &= -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L} = -\frac{S_{12}}{S_{11}} \Rightarrow S_{12} = \frac{-\nu_{LT}}{E_L}\end{aligned}\quad (31)$$

analogamente considerando uno stato di tensione monoassiale nella direzione trasversale del materiale ( $\sigma_2 \neq 0$ ,  $\sigma_1 = \tau_{12} = 0$ ) si ha:

$$E_T = \frac{\sigma_T}{\varepsilon_T} = \frac{1}{S_{22}} \Rightarrow S_{22} = \frac{1}{E_T}\quad (32)$$

Considerando invece uno stato di taglio puro nel piano della lamina ( $\tau_{12} \neq 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ) la eq.(26) fornisce:

$$\gamma_{12} = S_{33}\tau_{12}\quad (33)$$

per cui si ha immediatamente:

$$G_{LT} = \frac{\tau_{12}}{\gamma_{12}} = \frac{1}{S_{33}} \Rightarrow S_{33} = \frac{1}{G_{LT}}\quad (34)$$

In virtù delle (31)-(34), in termini di costanti elastiche ingegneristiche l'equazione costitutiva (26) si può scrivere come:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}\quad (35)$$

Utilizzando le relazioni (28) è possibile individuare le relazione tra i termini della matrice di rigidezza e le costanti elastiche ingegneristiche; si ha:



$$\begin{aligned}
E_{11} &= \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{1}{E_T} \frac{1}{\frac{1}{E_L} \frac{1}{E_T} - \frac{\nu_{LT}^2}{E_L^2}} = \frac{1}{E_T} \frac{1}{\frac{1}{E_L} \frac{1}{E_T} - \frac{\nu_{LT}}{E_L} \frac{\nu_{TL}}{E_T}} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}}; \\
E_{22} &= \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}; \frac{1}{E_L} \frac{1}{\frac{1}{E_L} \frac{1}{E_T} - \frac{\nu_{LT}^2}{E_L^2}} = \frac{1}{E_L} \frac{1}{\frac{1}{E_L} \frac{1}{E_T} - \frac{\nu_{LT}}{E_L} \frac{\nu_{TL}}{E_T}} = \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}}; \\
E_{12} &= -\frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}; -\frac{\nu_{LT}}{E_L} \frac{1}{\frac{1}{E_L} \frac{1}{E_T} - \frac{\nu_{LT}^2}{E_L^2}} = \frac{1}{E_T} \frac{1}{\frac{1}{E_L} \frac{1}{E_T} - \frac{\nu_{LT}}{E_L} \frac{\nu_{TL}}{E_T}} = \frac{\nu_{LT}E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}}; \\
E_{33} &= \frac{1}{S_{33}} = G_{LT}.
\end{aligned} \tag{36}$$

In termini di costanti elastiche ingegneristiche la equazione costitutiva (25) si scrive quindi come:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{\nu_{LT}E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ \frac{\nu_{LT}E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{37}$$

Per un materiale isotropo [ $E_L=E_T=E$ ,  $\nu_{LT}=\nu_{TL}=\nu$ ,  $G_{LT}=G=E/2(1+\nu)$ ], infine, le (35) e (37) forniscono immediatamente le seguenti equazioni costitutive valide ovviamente nel generico riferimento cartesiano ortogonale:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \tag{35'}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{37'}$$

#### 4.4. Matrici di rigidezza e cedevolezza in un riferimento cartesiano arbitrario

Le matrici di rigidezza e di cedevolezza individuate al capitolo precedente permettono di scrivere le equazioni costitutive, cioè le relazioni tensioni-deformazioni (e viceversa), nel riferimento principale L-T della lamina ortotropa. Sovente nella progettazione si conoscono le tensioni o le

deformazioni in un riferimento non coincidente con quello principale del materiale. E' il caso per esempio dei laminati angle-ply, o di elementi in composito di cui si conosce facilmente la relazione tra sollecitazioni esterne e tensioni in un riferimento diverso da quello principale del materiale. Se si considera un riferimento cartesiano arbitrario le relazioni tra tensioni e deformazioni divengono più complesse: le matrici di rigidezza sono ora matrici piene, cioè con elementi tutti diversi da zero ed aventi in genere espressione relativamente complessa.

Le matrici di rigidezza e di cedevolezza in un generico riferimento cartesiano formante col riferimento principale un angolo generico  $\theta$  (fig.4), si possono ottenere considerando le equazioni di trasformazione dello stato di tensione e di deformazione nell'intorno del punto, note dalla Scienza delle Costruzioni.

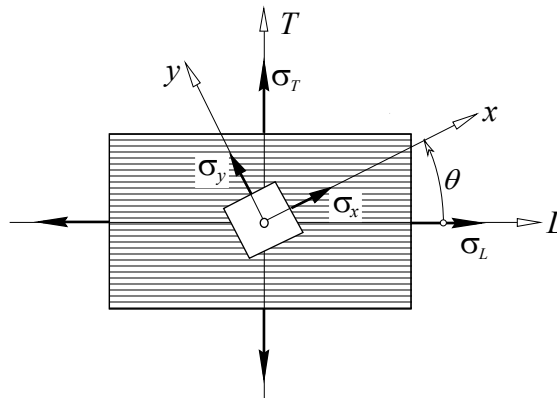


Fig.4 - Lamina ortotropa con riferimento cartesiano generico.

Tali relazioni infatti, essendo derivate da semplici considerazioni di equilibrio (le prime) e geometriche (le seconde) sono valide tanto per materiali isotropi che per materiali anisotropi. Dalle relazioni generali per tensioni e deformazioni:

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \frac{(\sigma_L + \sigma_T)}{2} + \frac{(\sigma_L - \sigma_T)}{2} \cos 2\theta + \tau_{LT} \sin 2\theta = \sigma_L \cos^2 \theta + \sigma_T \sin^2 \theta + 2\tau_{LT} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_\theta = -\frac{(\sigma_L - \sigma_T)}{2} \sin 2\theta + \tau_{LT} \cos 2\theta = -\sigma_L \sin \theta \cos \theta + \sigma_T \sin \theta \cos \theta + \tau_{LT} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{cases} \quad (38)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_\theta = \frac{(\varepsilon_L + \varepsilon_T)}{2} + \frac{(\varepsilon_L - \varepsilon_T)}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{LT}}{2} \sin 2\theta = \varepsilon_L \cos^2 \theta + \varepsilon_T \sin^2 \theta + \gamma_{LT} \sin \theta \cos \theta \\ \gamma_\theta / 2 = -\frac{(\varepsilon_L - \varepsilon_T)}{2} \sin 2\theta + \frac{\gamma_{LT}}{2} \cos 2\theta = -\varepsilon_L \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_T \sin \theta \cos \theta + \frac{\gamma_{LT}}{2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{cases} \quad (39)$$

con riferimento alla fig.4 si ha:

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_L \cos^2 \theta + \sigma_T \sin^2 \theta + 2\tau_{LT} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_y = \sigma_L \sin^2 \theta + \sigma_T \cos^2 \theta - 2\tau_{LT} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_{xy} = -\sigma_L \sin \theta \cos \theta + \sigma_T \sin \theta \cos \theta + \tau_{LT} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{cases} \quad (40)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_L \cos^2 \theta + \varepsilon_T \sin^2 \theta + \tau_{LT} \sin \theta \cos \theta \\ \varepsilon_y = \varepsilon_L \sin^2 \theta + \varepsilon_T \cos^2 \theta - \tau_{LT} \sin \theta \cos \theta \\ \gamma_{xy} / 2 = -\varepsilon_L \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_T \sin \theta \cos \theta + \gamma_{LT} / 2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{cases} \quad (41)$$

che in forma matriciale possono essere scritte come:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T] \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} / 2 \end{Bmatrix} = [T] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} / 2 \end{Bmatrix} \quad (42-43)$$

avendo indicato con  $[T]$  la nota matrice di rotazione data da:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (44)$$

Utilizzando le (42-43) è infine possibile scrivere a partire dalle (25-26) le corrispondenti relazioni valide in un generico riferimento cartesiano. Per la relazione tensioni-deformazioni si ha:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T] \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{Bmatrix} = [T] \cdot [E] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{Bmatrix} = [T] \cdot [\bar{E}] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} / 2 \end{Bmatrix} = [T] \cdot [\bar{E}] \cdot [T]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} / 2 \end{Bmatrix} \quad (45)$$

avendo indicato con  $\bar{E}$  la matrice che si ottiene dalla matrice  $E$  (riferita agli assi naturali del materiale) semplicemente sostituendo il termine  $G_{LT}$  con  $2G_{LT}$ . Dividendo per due i termini della terza colonna della matrice  $T^{-1}$  ed indicando con  $\bar{T}$  la matrice così ottenuta, la (45) si scrive in forma compatta come:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\tilde{E}] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{con} \quad [\tilde{E}] = [T] \cdot [\bar{E}] \cdot [\bar{T}]^{-1} \quad (46)$$

A differenza della matrice  $[E]$  la matrice  $[\tilde{E}]$  è una matrice piena i cui elementi sono in pratica dati dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{11} &= E_{11} \cos^4 \theta + E_{22} \sin^4 \theta + 2(E_{12} + 2E_{33}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \tilde{E}_{12} &= (E_{11} + E_{22} - 4E_{33}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + E_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \tilde{E}_{22} &= E_{11} \sin^4 \theta + E_{22} \cos^4 \theta + 2(E_{12} + 2E_{33}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \tilde{E}_{13} &= (E_{11} - E_{12} - 2E_{33}) \sin \theta \cos^3 \theta - (E_{22} - E_{12} - 2E_{33}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \tilde{E}_{23} &= (E_{11} - E_{12} - 2E_{33}) \sin^3 \theta \cos \theta - (E_{22} - E_{12} - 2E_{33}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \tilde{E}_{33} &= (E_{11} + E_{22} - 2E_{12} - 2E_{33}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + E_{33} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned} \quad (47-52)$$

Invertendo la (46) si ottiene immediatamente la relazione generale tra deformazioni e tensioni involgente la matrice di cedevolezza  $[\tilde{E}]$  nel riferimento cartesiano generico:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [\tilde{S}] \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad [\tilde{S}] = [\tilde{E}]^{-1} = [\bar{\bar{T}}] \cdot [\bar{S}] \cdot [T]^{-1} \quad (53)$$

avendo indicato con  $[\bar{\bar{T}}]$  la matrice che si ottiene dalla matrice di rotazione moltiplicando per 2 gli elementi della terza riga, e con  $[\bar{S}]$  la matrice che si ottiene dividendo per 2 il termine  $S_{33}$  ( $=1/G_{LT}$ ) della matrice di cedevolezza  $[S]$ . Come la matrice  $[\tilde{E}]$  la matrice  $[\tilde{S}]$  è una matrice piena i cui elementi sono in pratica dati dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{11} &= S_{11} \cos^4 \theta + S_{22} \sin^4 \theta + (2S_{12} + S_{33}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \tilde{S}_{12} &= (S_{11} + S_{22} - S_{33}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \tilde{S}_{22} &= S_{11} \sin^4 \theta + S_{22} \cos^4 \theta + (2S_{12} + S_{33}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \tilde{S}_{13} &= (2S_{11} - 2S_{12} - S_{33}) \sin \theta \cos^3 \theta - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{33}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \tilde{S}_{23} &= (2S_{11} - 2S_{12} - S_{33}) \sin^3 \theta \cos \theta - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{33}) \cos^3 \theta \sin \theta \\ \tilde{S}_{33} &= 2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{33}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{33} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned} \quad (54-59)$$

Le eq.(47-52) e le (54-59) mostrano che i termini delle matrici di rigidezza e cedevolezza della lamina ortotropa nel generico riferimento cartesiano sono forniti da espressioni relativamente complesse, specie per un calcolo manuale. Per questo nel calcolo manuale la legge di Hooke viene applicata sovente previa riduzione di deformazioni o tensioni nel riferimento principale del materiale utilizzando le relazioni generali di trasformazione dello stato tensionale e di deformazione nell'intorno del punto (eq.38-39). Per esempio se sono note le tensioni nel generico riferimento cartesiano, le corrispondenti componenti di deformazione si ottengono tramite i seguenti tre successivi passaggi:

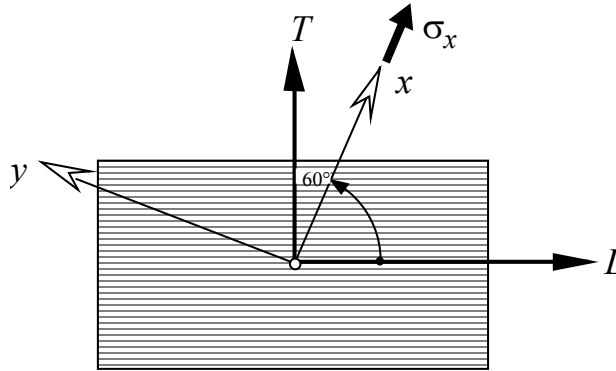
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}; \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{Bmatrix} = [S] \begin{Bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{Bmatrix}; \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix} = [T] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT}/2 \end{Bmatrix}. \quad (60-62)$$

Analogamente se sono note le deformazioni nel riferimento cartesiano generico, le corrispondenti componenti di tensione si ottengono mediante i seguenti tre successivi passaggi:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT}/2 \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{Bmatrix} = [E] \begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{Bmatrix}; \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T] \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{Bmatrix} \quad (63-65)$$

Un esempio pratico di valutazione dello stato di deformazione nel generico riferimento cartesiano (riferimento globale) è utile a chiarire meglio la procedura utilizzata nel calcolo manuale. Nel seguito è riportato un esempio applicativo.

Una lamina composita unidirezionale è soggetta ad uno stato tensionale monoassiale  $\sigma_x=100$  MPa, formante un angolo di  $60^\circ$  con la direzione longitudinale, come indicato in fig.5.



**Fig.5** - Lamina ortotropa soggetta a stato monoassiale di tensione.

Si calcolino le componenti di deformazione nel riferimento cartesiano  $x$ - $y$  essendo note le 4 costanti elastiche indipendenti:  $E_L=14$  GPa,  $E_T=1.75$  GPa,  $G_{LT}=3.5$  GPa e  $\nu_{LT}=0.4$ .

Si ha anzitutto in virtù della relazione tra moduli di Young e coefficienti di Poisson:

$$\nu_{TL} = \nu_{LT} \frac{E_T}{E_L} = 0.4 \frac{1.75}{14} = 0.4 / 8 = 0.05. \quad (66)$$

Le componenti di tensione nel riferimento principale del materiale si ottengono mediante la relazione generale di rotazione, essendo l'angolo  $\theta$  che interviene nella matrice di rotazione (dal vecchio riferimento al nuovo) pari a  $-60^\circ$ , cioè:

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(-60^\circ) & \sin^2(-60^\circ) & 2\sin(-60^\circ)\cos(-60^\circ) \\ \sin^2(-60^\circ) & \cos^2(-60^\circ) & -2\sin(-60^\circ)\cos(-60^\circ) \\ -\sin(-60^\circ)\cos(-60^\circ) & \sin(-60^\circ)\cos(-60^\circ) & \cos^2(-60^\circ) - \sin^2(-60^\circ) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (67)$$

Eseguendo i calcoli si ha:

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & -\sqrt{3}/2 \\ 3/4 & 1/4 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/4 & -\sqrt{3}/4 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 75 \\ 43 \end{bmatrix} \quad (68)$$

A questo punto è facile ottenere le componenti di deformazione mediante la matrice di cedevolezza:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{LT}}{E_T} & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & -\frac{0.4}{1.75} & 0 \\ -\frac{0.4}{14} & \frac{1}{1.75} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3.5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 75 \\ 43 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15357 \mu m / m \\ 41457 \mu m / m \\ 1228 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} \quad (69)$$

Dalla (69) si ottengono le componenti di deformazione sul piano cartesiano  $x$ - $y$ , come:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(60^\circ) & \sin^2(60^\circ) & 2\sin(60^\circ)\cos(60^\circ) \\ \sin^2(60^\circ) & \cos^2(60^\circ) & -2\sin(60^\circ)\cos(60^\circ) \\ -\sin(60^\circ)\cos(60^\circ) & \sin(60^\circ)\cos(60^\circ) & \cos^2(60^\circ) - \sin^2(60^\circ) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT}/2 \end{bmatrix} \quad (70)$$

cioè:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & \sqrt{3}/2 \\ 3/4 & 1/4 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/4 & \sqrt{3}/4 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15357 \mu m \\ 41457 \mu m \\ 1228 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35944 \mu m \\ 20819 \mu m \\ 10674 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} \quad (70')$$

La (70') mostra come l'applicazione di un carico di trazione semplice in una generica direzione diversa dalle direzioni principali del materiale produce anche uno scorrimento nel piano della lamina.

Dai risultati ottenuti è possibile calcolare il modulo di Young esibito dal materiale in direzione  $x$  nonché il coefficiente di Poisson  $\nu_{xy}$ . Si ha:

$$E_x = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{100}{35944} 10^6 = 2.78 \text{ GPa}; \quad \nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{20819}{35944} = 0.58 \text{ GPa}. \quad (71-72)$$

La presenza dello scorrimento consente per i materiali ortotropi di definire un coefficiente di accoppiamento  $m_x$  tra scorrimento  $\gamma_{xy}$  e corrispondente tensione normale  $\sigma_x$ , definito come:

$$m_x = -\frac{\gamma_{xy}}{\sigma_x / E_L} = \frac{21348 \cdot 10^{-6}}{100/14000} = 2.99 \quad (73)$$

#### 4.5. Relazioni tra costanti elastiche e matrice di cedevolezza

Le costanti elastiche della lamina ortotropa nel generico riferimento cartesiano possono essere determinate in modo sistematico considerando uno stato di tensione monoassiale ed uno stato di taglio puro agente nella generica direzione. Considerando uno stato monoassiale  $\sigma_x$  dalle (53) si ha dopo semplici passaggi:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} & \tilde{S}_{13} \\ \tilde{S}_{12} & \tilde{S}_{22} & \tilde{S}_{23} \\ \tilde{S}_{13} & \tilde{S}_{23} & \tilde{S}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = \tilde{S}_{11} \sigma_x \\ \varepsilon_y = \tilde{S}_{12} \sigma_x \\ \gamma_{xy} = \tilde{S}_{13} \sigma_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_x = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{1}{\tilde{S}_{11}} \\ \nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\tilde{S}_{12} \sigma_x}{\tilde{S}_{11} \sigma_x} = -\frac{\tilde{S}_{12}}{\tilde{S}_{11}} \\ m_x = -\frac{\gamma_{xy}}{\sigma_x} E_L = \tilde{S}_{13} E_L \end{cases} \quad (74-76)$$

Considerando invece uno stato di tensione monoassiale in direzione  $y$ , con procedura analoga si ottiene il coefficiente di accoppiamento  $m_y$ :

$$m_y = -\frac{\gamma_{xy}}{\sigma_y} E_L = -\tilde{S}_{23} E_L \quad (77)$$

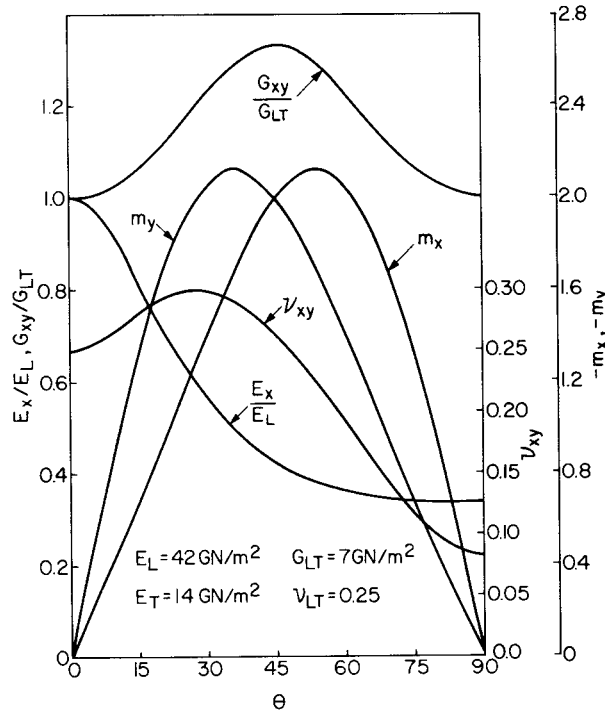
Considerando invece uno stato di taglio puro è possibile individuare la relazione generale che fornisce il modulo di taglio nella generica direzione, nonché una definizione alternativa dei coefficienti di accoppiamento:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} & \tilde{S}_{13} \\ \tilde{S}_{12} & \tilde{S}_{22} & \tilde{S}_{23} \\ \tilde{S}_{13} & \tilde{S}_{23} & \tilde{S}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = \tilde{S}_{13} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y = \tilde{S}_{23} \tau_{xy} \\ \gamma_{xy} = \tilde{S}_{33} \tau_{xy} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_x = -\frac{\varepsilon_x}{\tau_{xy}} E_L = -\tilde{S}_{13} E_L \\ m_y = -\frac{\varepsilon_y}{\tau_{xy}} E_L = -\tilde{S}_{23} E_L \\ G_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} = \frac{1}{\tilde{S}_{33}} \end{cases} \quad (78-80)$$

Le (74)-(80) insieme alle (54-59) consentono di valutare immediatamente le costanti elastiche della lamina nel generico riferimento cartesiano in funzione dei termini della corrispondente matrice di cedevolezza.

A titolo di esempio in fig.6 è rappresentato l'andamento del modulo di Young, del modulo di elasticità trasversale, del coefficiente di Poisson e dei coefficienti di accoppiamento al variare della direzione  $\theta$  considerata per una lamina unidirezionale in fibra di vetro-resina epossidica.

Si vede come il modulo di Young subisce un rapido abbassamento per piccoli disallineamenti tra la direzione di applicazione del carico e quella delle fibre: tale situazione quindi va tenuta debitamente sotto controllo in esercizio e/o nella produzione dei manufatti in composito.



**Fig.6** - Andamento tipico delle costanti elastiche al variare della direzione per lamina unidirezionale in fibra di vetro-resina epossidica.

Si noti inoltre come i coefficienti di accoppiamento  $m_x$  e  $m_y$  risultano massimi per angoli prossimi rispettivamente a  $35^\circ$  e  $55^\circ$  e si annullano in corrispondenza delle direzioni principali del materiale. Il modulo di elasticità trasversale assume il suo massimo valore in corrispondenza di  $\theta=45^\circ$ , cioè la lamina esibisce la massima rigidezza a taglio per  $\theta=\pm 45^\circ$ , la minima rigidezza nelle direzioni principali.

Si noti anche come il modulo di Young è in pratica compreso tra i due moduli principali mentre il coefficiente di Poisson non è compreso tra il coefficiente di Poisson “major”  $\nu_{LT}$  e quello “minor”  $\nu_{TL}$ . E' questo un risultato piuttosto generale: il modulo di Young di una lamina composita varia generalmente tra i due estremi costituiti dai moduli nelle due direzioni principali (limitate eccezioni si hanno per alcune lamine rinforzate con fibre di boro o carbonio), mentre il coefficiente di Poisson può assumere valori esterni all'intervallo individuato dai due coefficienti principali. In particolare, a differenza di quanto accade per i materiali isotropi, per gli anisotropi il coefficiente di Poisson può essere superiore a 0.5. L'unica limitazione al coefficiente di Poisson “major”  $\nu_{LT}$  è data dalla seguente relazione:

$$\nu_{LT} \leq \sqrt{\frac{E_L}{E_T}} \quad (81)$$

La (81) mostra che per una lamina unidirezionale di composito a matrice polimerica, per la quale risulta  $E_L \gg E_T$ , il coefficiente di Poisson “major” può assumere anche valori ben superiori ad 1.

Utilizzando la relazione tra moduli di Young e coefficienti di Poisson, dalla (81) si ha dopo semplici passaggi:

$$\nu_{TL} \leq \sqrt{\frac{E_T}{E_L}} \quad (82)$$

Per gli stessi motivi sopra richiamati quindi il coefficiente di Poisson “minor” può assumere valori anche molto piccoli.

#### 4.6. Lamine con rinforzo bidirezionale

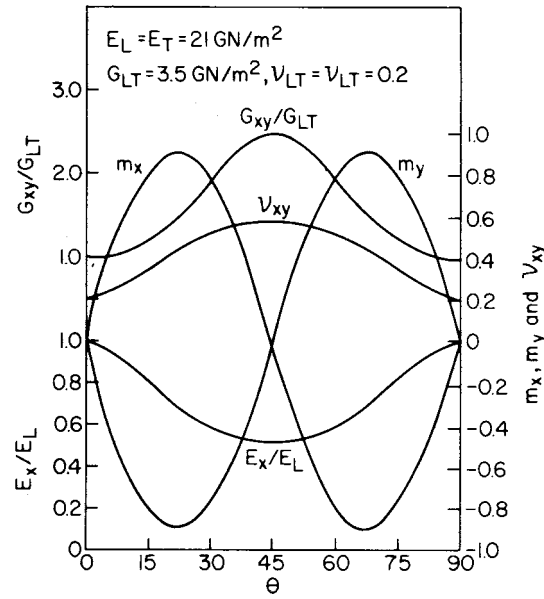
Tutte le formule sopra esposte sono valide per qualunque lamina ortotropa e quindi esse sono applicabili non solo a lamine con rinforzo unidirezionale ma anche a lamine bidirezionali aventi fibre disposte secondo due direzioni ortogonali (*woven* e *non-woven fabrics*) o inclinate di un certo angolo (*braided mat*).

Una lamina bidirezionale molto utilizzata è quella che presenta la stessa percentuale di fibre in entrambe le direzioni e, conseguentemente le stesse caratteristiche elastiche nelle due direzioni principali ( $E_L=E_T$ ,  $\nu_{LT}=\nu_{TL}$ ).

Una tale lamina, detta “*lamina ortotropa bilanciata*” presenta ovviamente un comportamento simmetrico anche rispetto agli assi disposti a  $\pm 45^\circ$ , cioè anche gli assi a  $\pm 45^\circ$  sono assi principali come mostra la seguente figura riportante l'andamento delle costanti elastiche al variare della direzione per un lamina ortotropa bilanciata in fibra di vetro-resina epossidica.

I due rapporti  $m_x$  e  $m_y$  si annullano infatti oltre che in corrispondenza delle direzioni delle fibre, anche in corrispondenza delle direzioni a  $\pm 45^\circ$ .





**Fig.7** - Andamento tipico delle costanti elastiche con la direzione per lamina bidirezionale (cross-ply) bilanciata in fibra di vetro-resina epossidica.

La matrice di rigidezza di una lamina rinforzata con fibre disposte a  $0^\circ$  e  $90^\circ$  può essere determinata in modo piuttosto semplice utilizzando il principio di sovrapposizione. Per una lamina a  $0^\circ$  (assi  $L$ - $T$  coincidenti con gli assi 1-2) e  $90^\circ$  (assi  $L$ - $T$  coincidenti con gli assi 2-1) si può scrivere rispettivamente:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_L}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_L}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (83)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_T \\ \sigma_L \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ \frac{E_L}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{E_L}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (84)$$

Si noti che nella (84) la matrice di rigidezza della lamina a  $90^\circ$  si ottiene da quella scritta nel riferimento naturale della lamina, mediante semplice permutazione delle prime due righe e delle prime due colonne.

Le tensioni medie agenti nella lamina con rinforzo bidirezionale si ottengono dalla media di quelle fornite dalle (83) e (84):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}_{bidir} = \frac{1}{2} \left[ \begin{bmatrix} \frac{E_L}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{E_L}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (85)$$

La (85), dopo semplici passaggi fornisce:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}_{bidir} = \begin{bmatrix} \frac{(E_L + E_T)/2}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{(E_L + E_T)/2}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (86)$$

La (86) mostra come la lamina cross-ply bilanciata ha una rigidità longitudinale inferiore a quella della lamina unidirezionale  $[(E_L + E_T)/2 < E_L]$  e la stessa rigidità trasversale.

Con lo stesso procedimento usato per la lamina cross-ply può essere determinata la matrice di rigidità di una lamina tipo “braided mat” considerando però per ciascuna delle due (sotto) lamine la corrispondente matrice di rigidità  $[\tilde{E}]$ .

#### 4.7. Invarianti di una lamina ortotropa

Manipolando opportunamente le relazioni che forniscono i termini della matrice di rigidità nel generico riferimento cartesiano (eq.47-52) è possibile mostrare che questi sono forniti in alternativa dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{11} &= U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \\ \tilde{E}_{22} &= U_1 - U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \\ \tilde{E}_{12} &= U_4 - U_3 \cos 4\theta \\ \tilde{E}_{13} &= \frac{1}{2}U_2 \sin 2\theta + U_3 \sin 4\theta \\ \tilde{E}_{23} &= \frac{1}{2}U_2 \sin 2\theta - U_3 \sin 4\theta \\ \tilde{E}_{33} &= \frac{1}{2}U_1 - \frac{1}{2}U_4 - U_3 \cos 4\theta \end{aligned} \quad (86-91)$$

essendo:

$$\begin{aligned}
U_1 &= \frac{1}{8}(3E_{11} + 3E_{22} + 2E_{12} + 4E_{33}); \\
U_2 &= \frac{1}{2}(E_{11} - E_{22}); \\
U_3 &= \frac{1}{8}(E_{11} + E_{22} - 2E_{12} - 4E_{33}); \\
U_4 &= \frac{1}{8}(E_{11} + E_{22} + 6E_{12} - 4E_{33});
\end{aligned} \tag{92-95}$$

Le 4 costanti  $U_i$  ( $i=1,2,..4$ ) sono invarianti rispetto ad una rotazione del riferimento; esse pertanto sono considerate le vere caratteristiche elastiche di un materiale ortotropo.

Le (86-91) possono essere utilizzate anche per la verifica dei valori dei termini della matrice di rigidezza nel generico riferimento cartesiano, calcolati mediante le relazioni (47-52). In termini matriciali le (86-91) possono scriversi come:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{E}_{11} \\ \tilde{E}_{22} \\ \tilde{E}_{33} \\ \tilde{E}_{12} \\ \tilde{E}_{13} \\ \tilde{E}_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos 2\theta & \cos 4\theta & 0 \\ 1 & -\cos 2\theta & \cos 4\theta & 0 \\ 1/2 & 0 & -\cos 4\theta & -1/2 \\ 0 & 0 & -\cos 4\theta & 1 \\ 0 & \frac{\sin 2\theta}{2} & \sin 4\theta & 0 \\ 0 & \frac{\sin 2\theta}{2} & -\sin 4\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} \tag{96}$$

In modo analogo anche i termini della matrice di cedevolezza possono essere scritte in funzione di 4 invarianti:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_{11} &= V_1 + V_2 \cos 2\theta + V_3 \cos 4\theta \\
\tilde{S}_{22} &= V_1 - V_2 \cos 2\theta + V_3 \cos 4\theta \\
\tilde{S}_{12} &= V_4 - V_3 \cos 4\theta \\
\tilde{S}_{13} &= V_2 \sin 2\theta + 2V_3 \sin 4\theta \\
\tilde{S}_{23} &= V_2 \sin 2\theta - 2V_3 \sin 4\theta \\
\tilde{S}_{33} &= 2V_1 - 2V_4 - 4V_3 \cos 4\theta
\end{aligned} \tag{97-102}$$

essendo:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{1}{8}(3S_{11} + 3S_{22} + 2S_{12} + S_{33}); \\
V_2 &= \frac{1}{2}(S_{11} - S_{22}); \\
V_3 &= \frac{1}{8}(S_{11} + S_{22} - 2S_{12} - S_{33}); \\
V_4 &= \frac{1}{8}(S_{11} + S_{22} + 6S_{12} - S_{33});
\end{aligned} \tag{103-106}$$