

5. Laminati compositi

5.1. Generalità

L'uso di semplici lamine con rinforzo unidirezionale risulta insoddisfacente nella maggior parte delle applicazioni ingegneristiche a causa della bassissima resistenza e rigidezza in direzione trasversale. La resistenza e la rigidezza trasversale di una lamina unidirezionale, infatti, strettamente dominate da resistenza e rigidezza della matrice, risultano in genere insufficienti ad assicurare, anche in presenza di limitati (trascurabili) carichi trasversali, l'assenza di fenomeni di danneggiamento, la stabilità di forma e l'integrità dei manufatti.

Questo inconveniente è superato ricorrendo ai laminati compositi costituiti dalla unione di n lamine con rinforzo unidirezionale orientate in modo da soddisfare le varie esigenze di progetto quali, in particolare, resistenza e rigidezza.

Per la corretta progettazione di un laminato composito è necessario conoscere le relazioni che intercorrono, per dato tipo di lamine e sequenza di impacchettamento, tra le caratteristiche meccaniche delle lamine e quelle del laminato ottenuto. Sotto alcune ipotesi semplificative, tali relazioni sono individuate dalla cosiddetta "Teoria classica dei laminati".

5.2. Teoria classica dei laminati

L'andamento delle deformazioni e delle tensioni in un laminato composito può essere facilmente ottenuto se sono soddisfatte alcune ipotesi semplificative quali:

- 1) le lamine costituenti il laminato siano perfettamente incollate cosicché nessuno scorrimento reciproco si può verificare sotto l'azione dei carichi applicati (continuità di spostamenti e deformazioni all'interfaccia tra due lamine adiacenti);
- 2) il generico segmento rettilineo ortogonale al piano medio del laminato (vedi fig.1) rimane rettilineo ed ortogonale al piano medio anche a deformazione avvenuta, cioè $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$;
- 3) la deformazione ε_z sia piccola e trascurabile rispetto alle altre deformazioni ε_x ed ε_y ;
- 4) lo spessore del laminato sia piccolo rispetto alle altre dimensioni.

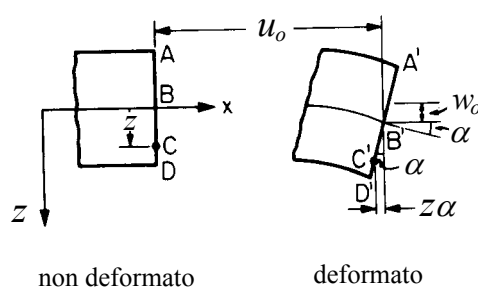


Fig.1 – Sezione non deformata e deformata di laminato di piccolo spessore: notazione generale

L'ipotesi 1) è generalmente ben soddisfatta dai laminati compositi commerciali essendo lo spessore dell'adesivo utilizzato molto piccolo rispetto alle stesse dimensioni delle lamine. In un laminato di spessore piccolo rispetto alle altre dimensioni, inoltre, le ipotesi 2) e 3) sono soddisfatte nelle zone lontane dai carichi applicati e dai bordi.

Sotto queste ipotesi, considerando un generico segmento rettilineo ortogonale al piano medio ed indicando con u_0 , v_0 ed w_0 le componenti lungo x , y e z dello spostamento subito dal punto appartenente al piano medio del laminato (fig.1), si ha allora che lo spostamento u lungo x subito dal generico punto del segmento distante z dal piano medio è dato da:

$$u(z) = u_0 - \alpha z \quad (1)$$

essendo α la rotazione subita dal segmentino considerato. Tenendo conto delle ipotesi fatte, tale rotazione è legata allo spostamento lungo z (abbassamento) dalla relazione:

$$\alpha = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_o}{\partial x} \quad (2)$$

Sostituendo la (2) nella (1) si ha pertanto:

$$u(z) = u_o - z \frac{\partial w_o}{\partial x} \quad (3)$$

Con analogo procedimento, considerando la deformazione in direzione y si ottiene anche:

$$v(z) = v_o - z \frac{\partial w_o}{\partial y} \quad (4)$$

Utilizzando le equazioni di congruenza, per le deformazioni nel piano x - y si ottengono le seguenti espressioni:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_o}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varepsilon_x^o + z k_x \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_o}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \varepsilon_y^o + z k_y \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \gamma_{xy}^o + z k_{xy} \end{cases} \quad (5-7)$$

avendo indicato con k_x , k_y e k_{xy} le curvature del piano medio del laminato rispettivamente nel piano x - z , y - z e x - y . Le (5-7) possono essere scritte in forma matriciale come:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

con ovvio significato dei simboli. La eq.(8) mostra che le componenti di deformazione significative variano tutte linearmente nello spessore z del laminato.

Se le deformazioni variano linearmente lungo z , non così avviene solitamente per le tensioni. In ciascuna lamina del laminato esse infatti sono legate alle deformazioni dalle relazioni tensioni-deformazioni viste al capitolo precedente. Per la k -esima lamina (vedi anche fig.3) la cui distanza dal piano medio del laminato varia tra z_{k-1} e z_k si ha quindi:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\tilde{E}]_k \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [\tilde{E}]_k \left\{ \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \right\} \quad (9)$$

Tenuto conto che la matrice di rigidezza $[\tilde{E}]_k$ varia da una lamina all'altra dipendendo oltre che dalle peculiari caratteristiche della lamina anche dal relativo orientamento, in virtù delle (9) si ha che a differenza delle deformazioni le tensioni non hanno un andamento lineare nella generica sezione del laminato, ma presentano in genere dei salti passando da una lamina all'altra. L'andamento è lineare invece all'interno di ciascuna lamina. A titolo di esempio la figura seguente mostra l'andamento qualitativo di una possibile distribuzione delle tensioni in un laminato costituito da tre lamine sovrapposte.

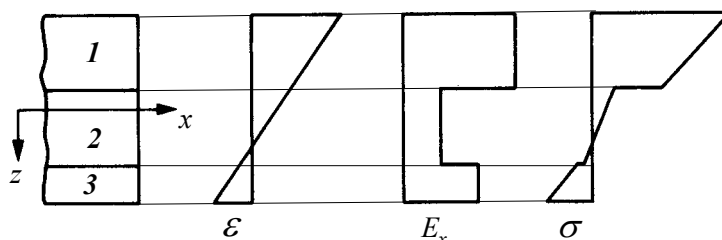


Fig.2 – Tipico andamento di deformazioni e tensioni in laminato composito.

5.3. Matrici di rigidezza del laminato

Le relazioni (9) legano le tensioni presenti su ciascuna lamina con le corrispondenti deformazioni e curvature del piano medio del laminato. A partire da queste è possibile individuare (in forma matriciale) il legame esistente tra le caratteristiche di sollecitazione del laminato (sforzo normale, momento torcente e flettente) per unità di larghezza del laminato e le componenti di deformazione del piano medio.

Si consideri il caso generale di un laminato costituito da n lamine, ed avente spessore complessivo h (vedi fig.3).

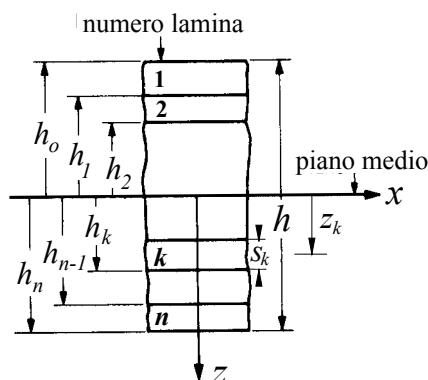


Fig.3 - Geometria di laminato con n lamine e notazione generale.

Da ovvie considerazioni di equilibrio, per le componenti cartesiane dello sforzo normale (per unità di larghezza) si ha:

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \\ N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz \end{aligned} \quad (10-11)$$

Per il taglio nel piano x - y del laminato si ha invece:

$$T_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz \quad (12)$$

Per le componenti del momento flettente:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \\ M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \end{aligned} \quad (13-14)$$

e per il momento torcente infine:

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \quad (15)$$

Sostituendo nelle (10-15) la relazione generale (9) è possibile legare le caratteristiche di sollecitazione alle componenti di deformazione del piano medio del laminato. Tenendo conto delle proprietà dell'integrale per lo sforzo normale ed il taglio si ottiene:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\tilde{E}]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z [\tilde{E}]_k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} dz = \\ &= \left[\sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \left[\sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \\ &= \left[\sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k (h_k - h_{k-1}) \right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \left[\sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) / 2 \right] \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

Ponendo quindi:

$$[A] = \sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k (h_k - h_{k-1}) = \sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k s_k ; \quad [B] = \sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) / 2 = \sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k s_k \frac{z_k}{2} \quad (17-18)$$

si ha così:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + [B] \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

essendo gli elementi della matrice A e B dati rispettivamente da:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\tilde{E}_{ij})_k (h_k - h_{k-1}); \quad B_{ij} = \sum_{k=1}^n (\tilde{E}_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) / 2; \quad (20-21)$$

Per i momenti flettenti e torcenti si ha invece ordinatamente:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\tilde{E}]_k z \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z^2 [\tilde{E}]_k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} dz = \\ &= \left[\sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \left[\sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \right] \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \\ &= \left[\sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) / 2 \right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \left[\sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) / 3 \right] \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

Ponendo quindi:

$$[D] = \left[\sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) / 3 \right] = \quad (23)$$

si ha così:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + [D] \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

essendo gli elementi della matrice D dati da:

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^n (\tilde{E}_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) / 3; \quad (25)$$

La (19) e la (24) possono infine essere riunite nell'unica espressione matriciale:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{A} & \overline{B} \\ \overline{B} & \overline{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \tilde{\varepsilon}^o \\ \tilde{k} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

che rappresenta l'equazione costitutiva del laminato. Le matrici A , B e D prendono il nome rispettivamente di matrice di rigidezza estensionale, di accoppiamento e di rigidezza flessionale.

La (19) mostra che, similmente a quanto accade in una singola lamina unidirezionale in cui uno sforzo normale semplice produce in genere oltre che una deformazione normale anche uno scorrimento e viceversa uno sforzo di taglio produce oltre che uno scorrimento anche una deformazione normale, in un laminato uno sforzo normale o un taglio producono in genere oltre che

una deformazione nel piano anche una curvatura flessionale e/o torsionale del piano medio. Analogamente la (24) mostra che un momento flettente o torcente produce in genere oltre che una corrispondente curvatura, anche deformazioni e scorrimenti nel piano medio del laminato.

Si osservi che tale accoppiamento è legato esclusivamente alle diverse caratteristiche meccaniche delle varie lamine ed alla sequenza di impacchettamento e non alla anisotropia di queste. La matrice di accoppiamento B infatti è non nulla anche in presenza di lamine in materiale isotropo come si verifica per esempio nelle strisce bimetalliche solitamente usate come dispositivi di controllo della temperatura.

Si osservi infine che le matrici A , B e D sono, come le matrici $[\tilde{E}]_k$ da cui dipendono, legate al particolare riferimento cartesiano considerato. Conseguentemente, così come l'accoppiamento tra deformazioni normali e scorrimenti per una lamina varia con la direzione, per un laminato l'accoppiamento tra deformazioni normali e curvature varia con la direzione del carico. In altre parole uno stesso laminato possono esistere riferimenti in cui la matrice B risulta identicamente nulla.

5.4. Matrici di rigidezza di laminati particolari

5.4.1 Laminati simmetrici ($B=0$)

Una particolare classe di laminati è costituita da quei laminati in cui l'accoppiamento tra flessione e sforzo normale è eliminata ($B=0$). In questi laminati l'applicazione di uno sforzo normale non produce flessione del piano medio né l'applicazione di un momento flettente produce deformazioni (estensione/contrazione) del piano medio. Tale caratteristica è molto importante al fine di evitare che l'applicazione di sollecitazioni nel piano del laminato produca deformazioni fuori dal piano (ingobbamenti). Inoltre, molto importante, l'assenza di accoppiamento permette di evitare che il raffreddamento del laminato dopo la cura dia luogo a fastidiose distorsioni dello stesso.

Tenendo conto delle equazioni costitutive trovate al capitolo precedente, si vede che un tale comportamento del laminato corrisponde alla condizione per cui la matrice di accoppiamento B risulta identicamente nulla. Tenendo conto che il generico termine della matrice B è dato dalla sommatoria estesa alle lamine degli omologhi termini della matrice $[\tilde{E}]_k$ moltiplicati per lo spessore della lamina e per la semi distanza media dal piano medio $s_k \bar{z}_k/2$, si ha che tali termini possono essere resi nulli se ad ogni lamina posta al di sopra (al di sotto) del piano medio corrisponde una lamina eguale e con identico orientamento disposta simmetricamente rispetto al piano medio. Un tale laminato dicesi perciò *laminato simmetrico*.

In letteratura un laminato simmetrico è indicato con un codice che riporta sinteticamente entro parentesi quadre l'orientamento delle lamine di metà laminato nella effettiva sequenza di impacchettamento, con il pedice S (simmetrico) fuori parentesi. L'orientamento delle lamine è indicato per semplicità omettendo il simbolo di gradi ($^\circ$). Nel caso di lamine consecutive aventi lo stesso orientamento, il numero di lamine è indicato con un pedice. Per esempio il laminato simmetrico costituito complessivamente da 8 lamine così orientate:

$$0^\circ \setminus 0^\circ \setminus +45^\circ \setminus -45^\circ \setminus -45^\circ \setminus +45^\circ \setminus 0^\circ \setminus 0^\circ$$

è sinteticamente indicato con il codice $[0_2 / \pm 45^\circ]_S$.

Nel caso in cui il laminato è ottenuto ripetendo m volte una sequenza di n lamine, allora la sua indicazione può essere semplificata indicando tra parentesi tonde la sequenza e mettendo m come pedice. Per esempio per un laminato costituito da una sequenza di 5 lamine

$$0^\circ \setminus 0^\circ \setminus +45^\circ \setminus -45^\circ \setminus 90^\circ$$

ripetuta 20 volte (laminato simmetrico) si indica sinteticamente con il codice $[(0_2 / \pm 45^\circ / 90^\circ)_{10}]_s$.

5.4.2 Laminati simmetrici con $A_{13}=A_{23}=0$ (laminati ortotropi)

Un'altra classe di laminati importante è quella che presenta disaccoppiamento tra sforzo normale e scorrimenti ovvero tra taglio e deformazioni normali. Considerando l'equazione costitutiva (19) è facile osservare che tale condizione si realizza se i termini A_{13} ed A_{23} della matrice A risultano nulli. Tenendo conto che tali termini risultano dalla sommatoria estesa alle lamine dei termini omologhi della matrice $[\tilde{E}]_k$ per lo spessore della lamina (costante per lamine eguali), e considerando che i termini \tilde{E}_{13} ed \tilde{E}_{23} sono funzioni dispari di θ (vedi eq.45-46 del cap.4.4), si ha che i termini A_{13} ed A_{23} della matrice A possono essere annullati se e solo se il laminato è costruito in modo che ad una lamina con orientamento θ corrisponde, indipendentemente dalla sequenza di impacchettamento, una lamina con orientamento opposto $-\theta$. E' infatti:

$$\tilde{E}_{13}(\theta) = (E_{11} - E_{12} - 2E_{33})\sin\theta \cos^3\theta - (E_{22} - E_{12} - 2E_{33})\sin^3\theta \cos\theta = -\tilde{E}_{13}(-\theta) \quad (27)$$

$$\tilde{E}_{23}(\theta) = (E_{11} - E_{12} - 2E_{33})\sin\theta^3 \cos\theta - (E_{22} - E_{12} - 2E_{33})\sin\theta \cos\theta^3 = -\tilde{E}_{23}(-\theta) \quad (28)$$

Ovviamente è possibile costruire un laminato che presenta disaccoppiamento tra sforzo normale e scorrimento e sia al tempo stesso simmetrico (disaccoppiamento tra sforzi normali o taglio e curvature). Basta a tal fine disporre le lamine in modo tale che la metà superiore (inferiore) del laminato sia costituita da lamine che soddisfano da sole la condizione $A_{13}=A_{23}=0$, cioè ad una lamina con orientamento θ corrisponda una lamina con orientamento $-\theta$, e che la parte inferiore (superiore) del laminato sia simmetrica di quella superiore (inferiore) rispetto al piano medio.

E' importante osservare che, similmente a quanto succede in una lamina ortotropa, il disaccoppiamento tra deformazioni normali e scorrimenti ($A_{13}=A_{23}=0$) dipende dalla direzione di applicazione del carico, cioè dal riferimento considerato. Così come per la lamina unidirezionale, per la quale il disaccoppiamento si verifica solo per carico agente lungo gli assi principali, per il laminato ciò si verifica solo se il carico agisce lungo gli assi x - y per cui risulta $A_{13}=A_{23}=0$. In altre parole gli assi x - y per cui risulta $A_{13}=A_{23}=0$ costituiscono in pratica gli assi principali del laminato. Con riferimento alla espressione analitica dei termini \tilde{E}_{13} ed \tilde{E}_{23} , considerando un nuovo riferimento cartesiano x' - y' ruotato di un angolo α (diverso da 0° e 90°) rispetto al riferimento principale x - y , si ha infatti:

$$\tilde{E}_{13}(\theta - \alpha) \neq -\tilde{E}_{13}(-\theta - \alpha) \quad (29)$$

$$\tilde{E}_{23}(\theta - \alpha) \neq -\tilde{E}_{23}(-\theta - \alpha) \quad (30)$$

A titolo di esempio il laminato simmetrico citato al punto precedente costituito da 8 lamine tutte eguali orientate secondo lo schema $[0_2 / \pm 45^\circ]_s$ è un laminato per cui risulta anche $A_{13}=A_{23}=0$. La sequenza di impacchettamento, come osservato, non ha alcuna importanza e pertanto fermo restando l'orientamento di ogni lamina essa può essere variata per il soddisfacimento di ulteriori esigenze di processo o produzione.

Laminati simmetrici con $A_{13}=A_{23}=0$ sono detti comunemente laminati ortotropi in quanto ammettono, come la lamina ortotropa, tre piani piani (x - y - z) di simmetria mutuamente ortogonali.

5.4.3 Laminati con $D_{13} \approx D_{23} \approx 0$

Un'altra classe di laminati notevoli infine è quella che realizza il disaccoppiamento tra sollecitazioni flettenti e curvatura torsionale e viceversa tra momento torcente e curvatures flessionali. In tali laminati un momento flettente produce solo una curvatura del laminato nel proprio piano essendo nulla quella nel piano ortogonale. Osservando la (24) si vede che tale condizione si realizza se e solo se risulta $D_{13}=D_{23}=0$. Tenendo conto che i termini della matrice D sono legati al prodotto dei termini della matrice $[\tilde{E}]_k$ per la differenza dei cubi delle distanze degli estremi della lamina dal piano medio, e che in particolare come già osservato i termini \tilde{E}_{13} ed \tilde{E}_{23} sono funzioni dispari di θ (vedi eq.27-28), si ha anzitutto che per un laminato simmetrico certamente non risulta soddisfatta la condizione $D_{13}=D_{23}=0$. In questo caso infatti per una coppia di lamine simmetriche i termini \tilde{E}_{13} ed \tilde{E}_{23} sono uguali ed uguali sono anche le differenze dei cubi delle distanze degli estremi delle lamine rispetto al piano medio.

Per annullare tali termini è necessario invece disporre sopra e sotto il piano medio lamine con orientamento opposto. Ma tale situazione non è vantaggiosa essendo il disaccoppiamento tra sforzo normale e flessione sempre desiderato (laminati simmetrici). Si osserva comunque che se si dispongono le lamine successive con orientamento opposto si ottiene una matrice con elementi D_{13} e D_{23} molto piccoli (essendo opposti gli omologhi termini della matrice di rigidezza e pressoché eguali i coefficienti legati ai cubi delle distanze), cosicché flessione e torsione sono pressoché disaccoppiati.

Come per il caso precedente, e per gli stessi motivi, la condizione di disaccoppiamento è strettamente legata all'orientamento.

Tenuto conto di quanto visto ai due capitoli precedenti, si ha che un laminato simmetrico ottenuto impacchettando coppie di lamine successive con orientamento opposto è un laminato che realizza il disaccoppiamento tra sforzo normale e flessione ($B=0$), il disaccoppiamento tra sforzo normale e scorrimento ($A_{13}=A_{23}=0$) nonché (quasi) il disaccoppiamento tra momento flettente e curvatura fuori dal piano di sollecitazione (torsione).

A titolo di esempio il laminato di cui al punto precedente $[0_2 / \pm 45]_s$ realizza in pratica tutte e tre le condizioni. Tale è pure il laminato $[0_2 / \pm 45/90_2]_s$.

5.4.4 Laminati quasi isotropi

Una quarta classe di laminati particolari è costituita dai cosiddetti laminati *quasi isotropi*. Un laminato si dice quasi isotropo se in pratica la sua rigidezza estensionale è indipendente dal particolare orientamento considerato, in altre parole la matrice A risulta isotropa. Tenendo conto che i termini della matrice A sono dati dalla sommatoria estesa alle lamine del prodotto dei termini omologhi delle matrici $[\tilde{E}]_k$ per lo spessore delle lamine, se le lamine hanno eguale spessore affinché ciò si verifichi è necessario che la sommatoria dei termini omologhi sia invariante rispetto ad una rotazione del riferimento. Ciò si verifica come è facile comprendere se:

- a) il numero totale n di lamine sia maggiore o eguale a 3;
- b) le lamine abbiano stessa costituzione e spessore;
- c) l'angolo $\Delta\theta$ tra due lamine sia costante, cioè $\Delta\theta=2\pi/n$ (lamine angolarmente equispaziate);

La denominazione di laminato quasi isotropo non è legata al fatto che tali laminati possono avere piccole (trascurabili) variazioni della rigidezza estensionale con la direzione, ma piuttosto al fatto che essi hanno comportamento isotropo solo rispetto alla trazione-compressione e non rispetto a flessione e torsione essendo in generale le altre matrici B e D non isotrope.

Con opportuno orientamento delle lamine si può ottenere un laminato simmetrico quasi isotropo che rispetti pure le condizioni di disaccoppiamento viste ai capitoli precedenti. Per esempio è tale un laminato simmetrico costituito da 12 lamine disposte secondo lo schema $[\pm 30/\pm 90/\pm 30]_s$. La metà del laminato è infatti costituita da 6 lamine angolarmente equispaziate di 60° ed inoltre le lamine

adiacenti hanno a coppia orientamento opposto cosicché soddisfano anche le altre sopra esposte condizioni di disaccoppiamento ($A_{13}=A_{23}=0$, $D_{13}=D_{23}=0$).

Laminati $[0^\circ/\pm 60^\circ]$ e $[0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ]$ sono laminati anche essi laminati quasi isotropi; il primo non è simmetrico mentre il secondo lo è ma non rispetta le altre condizioni di disaccoppiamento. Nella pratica costruttiva i laminati quasi isotropi non sono molto utilizzati in quanto, come più volte osservato, lo sfruttamento ottimale dei compositi si basa proprio sullo sfruttamento della anisotropia di questi che consente di orientare opportunamente le lamine in modo da avere la massima resistenza nella direzione delle massime sollecitazioni.

Il concetto di laminato quasi isotropo è comunque utile per la previsione delle proprietà caratteristiche (rigidezza e resistenza) di compositi a fibra corta con orientamento random. Le proprietà di tali compositi possono per esempio essere bene approssimate per esempio considerando il semplice laminato $[0^\circ/\pm 60^\circ]$.

5.5. Calcolo di tensioni e deformazioni

Determinate le tre matrici che intervengono nella equazione costitutiva di un laminato composito, la determinazione delle deformazioni e delle tensioni presenti su ciascuna lamina può essere eseguita manipolando tali relazioni al fine di esplicitare le variabili di interesse.

Nella teoria classica dei laminati deformazioni e tensioni di ciascuna lamina sono messe, come visto, in relazione con le componenti di deformazione del piano medio del laminato. Nella procedura di calcolo di deformazioni e tensioni è pertanto conveniente valutare prima le componenti di deformazione del piano medio e successivamente passare alla valutazione delle variabili locali per ciascuna lamina. Le componenti di deformazione del piano medio possono essere in linea di principio calcolate direttamente dalle caratteristiche di sollecitazione invertendo la (26). Ciò comporta però la inversione di una matrice 6×6 , cosa che può essere evitata mediante procedura alternativa che consiste nel considerare separatamente le eq.(19) e (24):

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + [B] \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + [D] \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (19)-(24)$$

Risolvendo la prima rispetto alle deformazioni nel piano e la seconda rispetto alle curvature si ha:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} = [A]^{-1} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} - [A]^{-1}[B] \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = [D]^{-1} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} - [D]^{-1}[B] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} \quad (31-32)$$

Sostituendo allora la (31) nella (32) si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = [D]^{-1} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} - [D]^{-1}[B][A]^{-1} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} + [D]^{-1}[B][A]^{-1}[B] \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (33)$$

Risolvendo la (33) rispetto alle curvature e indicando con

$$\begin{aligned} [F] &= \{[I] - [D]^{-1}[B][A]^{-1}[B]\}^{-1} \{-[D]^{-1}[B][A]^{-1}\} \\ [G] &= \{[I] - [D]^{-1}[B][A]^{-1}[B]\}^{-1} [D]^{-1} \end{aligned} \quad (34-35)$$

si ha:

$$\begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = [F] \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} + [G] \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (36)$$

Sostituendo a questo punto la (36) nella (31) si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} = [A]^{-1} \{[I] - [B][G]\} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} - [A]^{-1} [B][F] \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (37)$$

la quale ponendo:

$$\begin{aligned} [H] &= [A]^{-1} \{[I] - [B][G]\} \\ [L] &= -[A]^{-1} [B][F] \end{aligned} \quad (38)$$

si scrive anche come:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} = [H] \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} + [L] \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (39)$$

Riunendo infine la (36) e la (39) in un'unica relazione si ha:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\varepsilon}^o \\ k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{H} & \bar{L} \\ \bar{F} & \bar{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{M} \end{Bmatrix} \quad (40)$$

Con questa procedura è possibile calcolare le 6 componenti di deformazione mediante semplice manipolazione (inversione e moltiplicazione) di matrici di ordine 3x3. In ogni caso, sia si inverte direttamente la (26) sia che si usi la (40), per il calcolo delle componenti di deformazione del piano medio del laminato è conveniente far uso di uno strumento automatico.

Calcolate le componenti di deformazione del piano medio del laminato, è possibile calcolare le deformazioni e le tensioni (nel riferimento cartesiano del laminato x - y) in ogni punto delle singole lamine mediante le eq.(8) e (9). Per ciascuna lamina, le deformazioni e le tensioni nel riferimento locale principale possono essere infine calcolate (come è necessario nella verifica di resistenza) mediante successiva rotazione delle deformazioni e tensioni cartesiane eseguita utilizzando l'opportuna matrice di rotazione. In particolare, se si è interessati solo al calcolo delle tensioni nel riferimento locale principale della generica lamina, allora è più conveniente valutare per ciascuna lamina le sole deformazioni nel riferimento cartesiano mediante la (8), quindi ruotare queste nel

riferimento principale della lamina mediante la matrice di rotazione e calcolare infine le tensioni nel riferimento principale della lamina mediante le equazioni costitutive della lamina ortotropa (eq.8 del cap.4.2).

5.6. Tensioni termiche

Come è noto, una variazione di temperatura induce in genere in un materiale una deformazione ε^T proporzionale al coefficiente di dilatazione termica α ed alla variazione di temperatura ΔT , cioè:

$$\varepsilon^T = \alpha \Delta T \quad (41)$$

Per un materiale anisotropo, in particolare, la deformazione subita varia con la direzione essendo il coefficiente di dilatazione, come le altre caratteristiche termo-meccaniche, variabile con la direzione. Per un materiale ortotropo, come una lamina composita con rinforzo unidirezionale, si hanno due coefficienti di dilatazione termica lineare, α_L e α_T rispettivamente in direzione longitudinale e trasversale. Tenendo conto che, per ovvie considerazioni di simmetria, una variazione di temperatura non produce distorsioni nel riferimento principale, le deformazioni principali conseguenti ad una variazione di temperatura sono date da:

$$\begin{cases} (\varepsilon_L)^T = \alpha_L \Delta T \\ (\varepsilon_T)^T = \alpha_T \Delta T \\ (\gamma_{LT})^T = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{Bmatrix}^T = \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_L \\ \alpha_T \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (42)$$

Come per le deformazioni meccaniche, le deformazioni termiche in un generico riferimento cartesiano si ottengono da quelle principali mediante semplice rotazione. Si ha:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix}^T = [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT}/2 \end{Bmatrix}^T = \Delta T [T] \begin{Bmatrix} \alpha_L \\ \alpha_T \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (43)$$

Dividendo entrambi i membri per ΔT e definendo $\alpha_{xy} = \gamma_{xy}/\Delta T$ dalla (43) si ha:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy}/2 \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \alpha_L \\ \alpha_T \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (44)$$

Si può scrivere pertanto in generale:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^T = \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix} \quad (45)$$

essendo praticamente per la (44), tenuto conto della espressione della matrice di rotazione:

$$\begin{cases} \alpha_x = \alpha_L \cos^2 \theta + \alpha_T \sin^2 \theta \\ \alpha_y = \alpha_L \sin^2 \theta + \alpha_T \cos^2 \theta \\ \alpha_{xy} = 2(\alpha_L - \alpha_T) \sin \theta \cos \theta \end{cases} \quad (46-48)$$

Dalla (48) si vede come, contrariamente a quanto avviene in un isotropo, in un anisotropo una variazione di temperatura produce in un qualunque riferimento cartesiano diverso da quello principale ($\theta=0^\circ$, $\theta=90^\circ$) oltre che dilatazioni anche scorrimenti.

Noti i due coefficienti di dilatazione termica lineare α_L e α_T , la (45) permette di valutare le deformazioni che una lamina libera subirebbe a seguito di una variazione di temperatura ΔT . A tali deformazioni (dilatazioni) non corrispondono a scala macroscopica tensioni termiche se la lamina è libera di deformarsi. Si hanno soltanto tensioni interne dovute alla diversa dilatazione di fibra e matrice (vedi per questo cap.2.6).

Se la lamina invece appartiene ad un laminato allora questa non è completamente libera di deformarsi essendo le deformazioni termiche parzialmente impedito dalle altre lamine del laminato che presentano nella stessa direzione caratteristiche termo-meccaniche diverse a causa del diverso orientamento. In altre parole la presenza delle altre lamine induce nella generica lamina una deformazione meccanica ε^M pari alla differenza tra la deformazione effettiva ε e la deformazione termica ε^T . Tenendo conto della teoria classica dei laminati si ha quindi:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^M = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} - \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix} \quad (49)$$

Alle deformazioni meccaniche della lamina sono associate, tramite le equazioni costitutive, le corrispondenti tensioni termiche:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^T = [\tilde{E}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^M = [\tilde{E}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z [\tilde{E}] \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} - \Delta T [\tilde{E}] \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix} \quad (50)$$

Per calcolare quindi le tensioni termiche è necessario valutare le componenti di deformazione del piano medio del laminato. Queste possono essere valutate tenendo conto che le tensioni termiche, in assenza di carichi esterni applicati al laminato, costituiscono un sistema autoequilibrato con risultate e momento risultante nullo. Risulteranno pertanto nulle le caratteristiche di sollecitazione (o sforzi per unità di larghezza del laminato). Dalla definizione di queste ultime nonché delle matrici A , B e D , utilizzando la (50) risulta:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = [A] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix}^T + [B] \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}^T - \Delta T \begin{Bmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (51)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = [B] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix}^T + [D] \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}^T - \Delta T \begin{Bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (52)$$

avendo posto:

$$\begin{Bmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix} S_k; \quad \begin{Bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix} S_k \bar{z}_k \quad (53-54)$$

Le (51) e (52) permettono, insieme alle (53-54) di definire delle caratteristiche di sollecitazione termiche apparenti, dette anche *forze e momenti termici*, che consentono di valutare le deformazioni termiche del piano medio con formule analoghe a quelle già viste per le sollecitazioni meccaniche. Si ha:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix}^T = \Delta T \begin{Bmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_{xy} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix}^T + [B] \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}^T \quad (55)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}^T = \Delta T \begin{Bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_{xy} \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix}^T + [D] \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}^T \quad (56)$$

Le (55-56) mostrano come una variazione di temperatura ΔT induce in un laminato generico sia sollecitazioni normali che flettenti ovvero, in termini di deformazioni, sia dilatazioni che curvature e distorsioni. Le curvature del piano medio sono nulle se e solo se il laminato ha $B=0$, cioè se il laminato è simmetrico. In un laminato non simmetrico pertanto le inevitabili variazioni di temperatura che si hanno durante il raffreddamento dalla temperatura di cura (sovente superiori a 100° C) alla temperatura ambiente producono fastidiose distorsioni.

La simmetria elimina le distorsioni ma non le tensioni residue termiche, calcolabili utilizzando l'equazione generale (40) e quindi l'equazione costitutiva (8).

Le tensioni termiche residue si sommano alla tensioni di esercizio influenzando la resistenza e la stabilità dimensionale del laminato. Per una corretta ed accurata progettazione pertanto è necessario tener conto delle tensioni residue presenti nel laminato.

A rigore, alle tensioni termiche sopra calcolate, dovute essenzialmente al fatto che le dilatazioni termiche di ciascuna lamina sono parzialmente impiedate dalle altre lamine, è necessario aggiungere le tensioni termiche residue “interne” che pure si hanno in una lamina libera a causa del diverso coefficiente di dilatazione termica lineare di matrice e fibra. A tal proposito si osserva che, essendo sempre il coefficiente di dilatazione della matrice più grande di quello delle fibre, il raffreddamento del laminato produce nella matrice una tensione parallela alle fibre di trazione ed una tensione ortogonale alle fibre di compressione. Tenendo conto del modello utilizzato al cap.2.6 si hanno in pratica per fibra e matrice le seguenti tensioni iniziali medie:

$$\sigma_f = (\alpha_L - \alpha_f) \Delta T; \quad \sigma_m = (\alpha_L - \alpha_m) \Delta T; \quad (57-58)$$

In un piano ortogonale alle fibre infatti la matrice tende a contrarsi più delle fibre sottoponendo queste a compressione (la matrice ingloba le fibre e quindi contraendosi le comprime). Tale tensione di compressione all'interfaccia produce benefici effetti sulla resistenza del laminato in quanto assicura una buona trasmissione degli sforzi tra fibra e matrice anche in assenza di un buon incollaggio a causa della presenza di benefiche forze di attrito all'interfaccia fibra-matrice.