

## 6. Modalità di rottura e criteri di resistenza

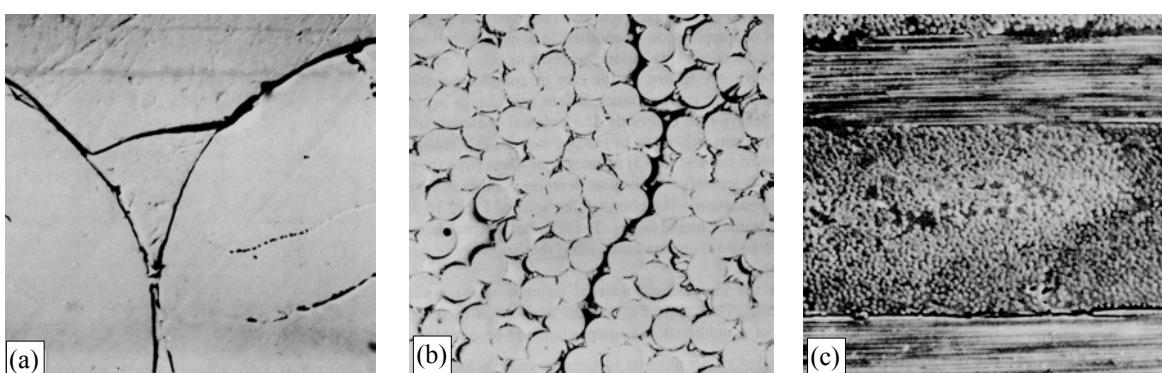
### 6.1. Generalità

Per definire un criterio di resistenza è necessario tener conto dei particolari processi che portano al cedimento inteso come il verificarsi di quelle condizioni per cui il materiale stesso cessa di rispondere in modo soddisfacente alle esigenze di progetto. Per un materiale fragile che ha un comportamento elastico lineare sino a rottura il cedimento corrisponde solitamente alla rottura mentre per un materiale duttile il cedimento corrisponde in pratica alla condizione di deviazione (snervamento ecc) dall'ipotizzato comportamento elastico lineare.

Con riferimento ad una lamina composita, il cedimento può essere in alcuni casi coincidente con la rottura (comportamento fragile), in altri casi può invece coincidere con la deviazione dal comportamento elastico lineare (comportamento duttile). Più in dettaglio, con riferimento alla intima struttura di un composito il cedimento può avvenire, oltre che per rottura delle fibre (1), secondo diverse modalità quali:

- 2) separazione fibra-matrice (debonding);
- 3) microfrattura della matrice (tipico della fatica)
- 4) separazione delle lamine nei laminati (delaminazione).

Tali modalità di cedimento talvolta avvengono separatamente, altre volte risultano coesistenti. A titolo di esempio la fig.1(a,b,c) riporta delle micrografie di laminati compositi danneggiati per debonding (a), per microfrattura della matrice (b), e delaminazione (c);

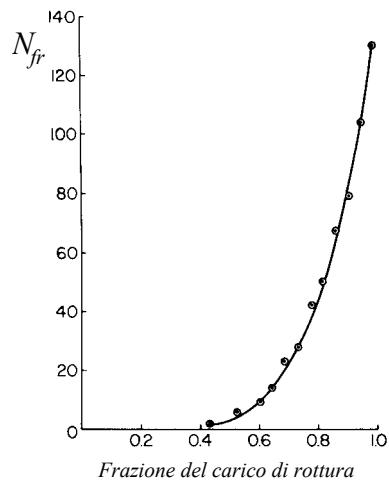


**Fig.1** - Modalità di cedimento dei laminati: (a) debonding, (b) frattura della matrice e (c) delaminazione.

In generale non esiste una relazione biunivoca tra modalità di rottura e caratteristiche del composito in quanto a causa della anisotropia del materiale e del diverso comportamento alle varie sollecitazioni, per uno stesso materiale, i meccanismi di rottura dipendono strettamente dalle modalità di sollecitazione (trazione, compressione, taglio ecc.).

### 6.2. Cedimento sotto sollecitazione di trazione longitudinale

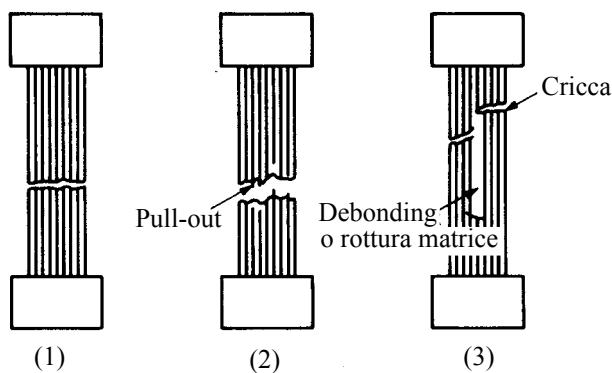
In un composito unidirezionale con fibre fragili soggetto a trazione longitudinale, il cedimento inizia sempre con la rottura di alcune fibre in corrispondenza della loro sezione più debole. Al crescere del carico segue la rottura di altre fibre causata anche dalla diminuzione della sezione resistente. Sperimentalmente si osserva che al crescere del carico applicato il numero cumulativo di fibre rotte  $N_{fr}$  cresce in modo esponenziale, sino alla rottura completa del materiale come mostra la figura seguente.



**Fig.2** – Numero di fibre rotte ( $N_{fr}$ ) al variare del carico applicato.

Da questa figura è possibile osservare come la rottura delle fibre inizia già a valori del carico relativamente bassi, pari a circa il 50% del carico di rottura.

La rottura progressiva delle fibre da luogo a fenomeni di concentrazione delle tensioni che possono produrre localmente oltre che la rottura fragile di altre fibre (1), fenomeni di sfilamento (pull-out) delle fibre (2) spesso accompagnata da rottura a taglio all'interfaccia della matrice (3a) o da rottura della matrice lungo la direzione delle fibre per debonding (3b). Tali modalità di rottura sono schematicamente illustrate in fig.3



**Fig.3** - Modi di rottura di composito unidirezionale: (1) rottura fragile, (2) pull-out e (3) debonding ecc.

Ovviamente il verificarsi o meno del pull-out nonché l'entità dello stesso dipendono strettamente dalla bontà della adesione fibra-matrice e dal meccanismo di trasferimento del carico dalla matrice alle fibre. La rottura a taglio della matrice ed i fenomeni di debonding possono avvenire separatamente o essere coesistenti.

Per un dato composito unidirezionale le modalità di rottura sono pure legate, oltre che alle caratteristiche di fibra e matrice, anche alla frazione in volume di fibre. Per esempio per un composito fibre di vetro-resina epossidica il cedimento avviene per rottura fragile per basse frazioni in volume di fibre ( $V_f < 0.4$ ), per rottura fragile accompagnata da pull-out per percentuali intermedie ( $0.4 < V_f < 0.65$ ), per rottura fragile accompagnata da taglio della matrice e/o debonding per elevate concentrazioni di fibre ( $V_f > 0.65$ ).

I compositi con fibre di carbonio cedono invece con rottura fragile e/o con rottura fragile e pull-out delle fibre (più rari sono i fenomeni di debonding e/o rottura della matrice).

Tutti questi fenomeni possono comunque essere significativamente influenzati dalla percentuale di vuoti presenti nel composito.

Le osservazioni sopra esposte permettono di comprendere come la resistenza a rottura di un

composito sotto sollecitazioni longitudinali di trazione, dipendendo dalle peculiari modalità di rottura, non sempre può essere accuratamente stimata per via teorica mediante la relazione:

$$\sigma_{c,R} = \sigma_{f,R} V_f + \sigma_m \Big|_{\varepsilon_{f,R}} (1 - V_f) \quad (1)$$

esposta al cap.2.2.2 (vedi eq.23) e basata su una semplificazione del processo di rottura del materiale e  $V_f > V_{min}$ . La (1) costituisce in generale una approssimazione della effettiva resistenza a rottura ed è utilizzata nella progettazione in assenza di precise informazioni sperimentali.

### 6.3. Cedimento sotto sollecitazione di compressione longitudinale

La presenza di un carico di compressione longitudinale induce facilmente nelle fibre (colonne di piccolissime dimensioni) fenomeni di instabilità dell'equilibrio elastico (buckling). In presenza di basse percentuali di fibre lo svergolamento avviene molto facilmente. Esso si verifica per bassi carichi con matrice ancora in campo elastico. Per i comuni valori di  $V_f$  l'instabilità delle fibre è invece preceduta dallo snervamento della matrice e/o da fenomeni di debonding e fessurazione (microcricche) della matrice. In alcuni casi il cedimento del composito avviene per separazione fibra-matrice causata dalle deformazioni trasversali positive dovute all'effetto Poisson. In altri casi la compressione può dare luogo a rottura della matrice per taglio.

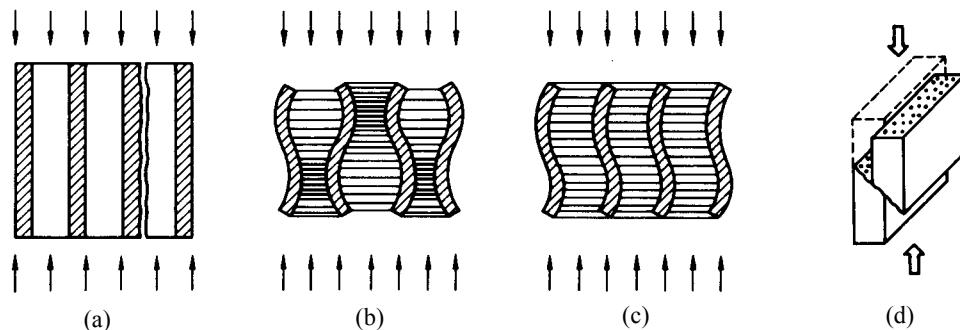
In sintesi il cedimento di un composito sotto compressione longitudinale può avvenire per:

1) rottura per trazione trasversale (effetto Poisson, vedi fig.4a);

2) microsvergolamento delle fibre (vedi fig.4b-c) con:

- (a) matrice elastica;
- (b) matrice plastica;
- (c) distacco dei componenti

3) rottura per taglio (fig.4d).



**Fig.4** - Modalità di rottura di composito unidirezionale soggetto a compressione longitudinale.

#### 6.3.1 Trazione trasversale

Per quanto concerne la modalità (1), la rottura si verifica allorquando la deformazione trasversale egualgia il corrispondente valore limite, cioè:

$$\varepsilon_T = \varepsilon_{T,R} \Rightarrow -\varepsilon_L v_{LT} = \varepsilon_{T,R} \quad (2)$$

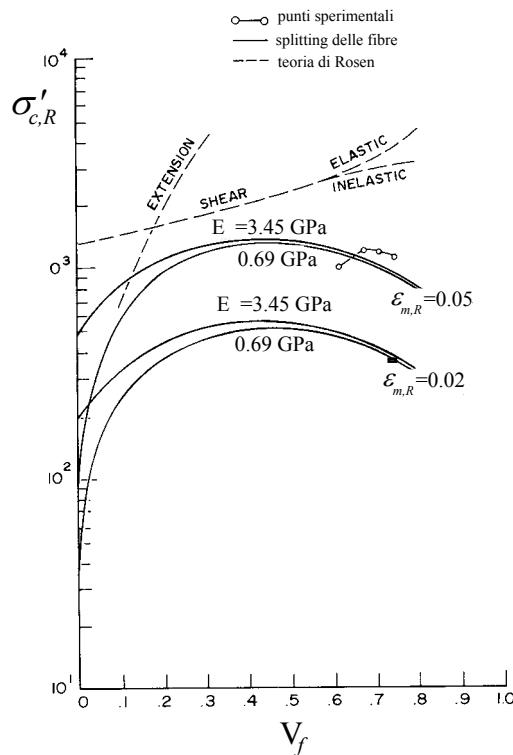
che in termini di tensioni si scrive come:

$$\frac{\sigma'_{L,R}}{E'_L} v_{LT} = \varepsilon_{T,R} \Rightarrow \sigma'_{L,R} = \frac{\varepsilon_{T,R} E'_L}{v_{LT}} \quad (3)$$

In questo caso pertanto la resistenza a compressione longitudinale  $\sigma'_{L,R}$  è legata alla deformazione limite trasversale legata a sua volta alla resistenza a trazione della matrice o alla resistenza al debonding a secondo che la rottura sia interna alla matrice o avvenga lungo l'interfaccia fibra-matrice. Considerando perfetta adesione fibra-matrice, cioè che la rottura avvenga nella matrice (anche in prossimità dell'interfaccia), con riferimento al valore della deformazione trasversale a rottura previsto empiricamente da Nielsen ed esprimendo il modulo di Young longitudinale a compressione ed il coefficiente di Poisson in funzione delle caratteristiche di fibra e matrice (vedi cap.2) si ottiene:

$$\sigma'_{L,R} = \frac{\varepsilon_{m,R} (1 - V_f^{1/3}) (E_f V_f + E_m V_m)}{(v_f V_f + v_m V_m)} \quad (4)$$

La previsione teorica della rottura a compressione longitudinale ottenuta mediante la (4) è riportata insieme ad alcuni risultati sperimentali al variare della frazione di volume di fibre, nella seguente figura 5.



**Fig.5** - Resistenza a compressione longitudinale al variare della percentuale di fibre.

Dalla fig.5 si osserva un buon accordo per composti con una deformazione a rottura della matrice pari a circa il 5% che è un valore molto prossimo a quello della resina epoxidica usata per le prove sperimentali. Si osserva inoltre come la deformazione di rottura della matrice influenza molto la resistenza a compressione del composito. Il valore della frazione di fibre cui corrisponde la massima resistenza a compressione longitudinale è generalmente compreso tra 0.4 e 0.6. Indipendentemente dalla deformazione a rottura della matrice la resistenza del composito decade rapidamente per frazione di fibre inferiore 0.1 circa.

### 6.3.2 Microsvergolamento delle fibre

In una lamina unidirezionale il microsvergolamento delle fibre può avvenire secondo due configurazioni distinte:

- fibre svergolate non in fase (vedi fig.4b)
- fibre svergolate in fase (fig.4c).

La prima configurazione è solitamente tipica dei compositi con bassa percentuale di fibre. In questo caso infatti le fibre sono relativamente distanti tra loro e quindi libere di deformarsi indipendentemente le une dalle altre. In queste condizioni la matrice tra due fibre adiacenti risulta sottoposta a sollecitazioni di trazione-compressione e per questo tale modo di microsvergolamento è anche detto *extension mode*.

Il microsvergolamento con fibre in fase è invece tipico dei comuni compositi con frazione di fibre medio-alta. In questo caso le fibre sono vicine e non possono deformarsi indipendentemente le une dalle altre. Questo modo di instabilità da luogo, come si intuisce facilmente, a sollecitazione di taglio della matrice e per questo tale modo di microsvergolamento è detto anche *shear mode*.

Queste modalità di rottura (microsvergolamento in fase e non) sono caratteristiche dei compositi con fibra di vetro.

Nella sopra riportata fig.5 sono rappresentate le previsioni teoriche del cedimento inteso come inizio dello svergolamento, eseguite da Rosen nei due casi di svergolamento in fase (*shear mode*) e fuori fase (*extension mode*). Si vede come per i comuni valori della frazione di fibre il modo *extension* da luogo ad una resistenza maggiore del modo *shear*. In entrambi i casi comunque le previsioni teoriche risultano molto più elevate dei valori sperimentali e quindi poco attendibili. Per una accurata progettazione è pertanto necessario fare riferimento a dati sperimentali.

### 6.3.3 Taglio

In presenza di compressione longitudinale la rottura della lamina può avvenire a seguito di rottura a taglio della matrice secondo piani disposti approssimativamente a  $\pm 45^\circ$  rispetto alla direzione di applicazione del carico, secondo lo schema illustrato in fig.4d. Tale modalità di rottura è caratteristico dei compositi in fibre di carbonio. Rilievi sperimentali mostrano comunque che questo modo di cedimento è accompagnato da rotazioni localizzate delle fibre.

Vista la complessità del fenomeno, anche in questo caso non è possibile eseguire attendibili stime teoriche della resistenza della lamina a partire dai dati di resistenza dei singoli componenti.

## 6.4. Cedimento sotto sollecitazione di trazione trasversale

In presenza di trazione trasversale il cedimento di una lamina composita può avvenire per:

- 1) cedimento della matrice (trazione);
- 2) debonding;
- 3) splitting delle fibre e rottura della matrice.

Nel modo (1) la superficie di frattura interessa esclusivamente la matrice, nel modo (2) invece essa si sviluppa all'interfaccia fibra-matrice mentre nel modo (3) essa si sviluppa inizialmente all'interno delle fibre. Quest'ultimo modo è piuttosto raro (la resistenza della matrice e/o l'adesione fibra-matrice sono molto più bassi della resistenza trasversale delle fibre) ed avviene quando la fibra presenta una marcata anisotropia ed una bassissima resistenza a trazione trasversale. I tre modi possono avvenire singolarmente o essere, a seconda dei casi, coesistenti (rottura mista). Per esempio nei compositi con fibre di carbonio ad elevata rigidezza solitamente il cedimento avviene per debonding e splitting delle fibre.

Nel caso comune in cui il cedimento avviene per rottura della matrice, la resistenza della lamina è

bene approssimata dalla relazione:

$$\sigma_{c,R} = \frac{\sigma_{m,R}}{S} \quad (5)$$

esposta al cap.2.3.2 (vedi eq.33) ed in cui il fattore correttivo S (coefficiente di concentrazione delle tensioni) può essere valutato facilmente mediante simulazioni numeriche.

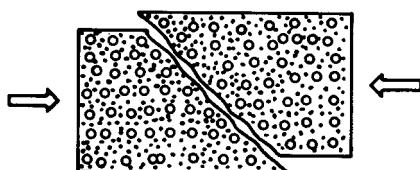
Negli altri casi la resistenza della lamina può essere stimata in modo accurato solo per via sperimentale.

## 6.5. Cedimento sotto sollecitazione di compressione trasversale

In presenza di compressione trasversale il cedimento di una lamina composita può avvenire per:

- 1) cedimento a taglio della matrice;
- 2) cedimento a taglio della matrice con debonding e/o rottura delle fibre;
- 3) rottura a taglio delle fibre.

La modalità più comune è la (1) per il semplice fatto che in genere la matrice ha una resistenza molto più bassa delle fibre. La rottura a taglio avviene in questi casi secondo piani paralleli alle fibre ed inclinati rispetto al carico di 45° (vedi fig.6).



**Fig.6** - Rottura tipica (a taglio) di compositi sotto compressione trasversale.

A questa modalità di rottura corrisponde una resistenza molto più bassa della resistenza a compressione longitudinale, nella quale si ha una significativa collaborazione delle fibre.

In presenza di bassa adesione fibra-matrice e/o scarsa resistenza trasversale delle fibre la rottura a taglio della matrice è accompagnata da debonding e rottura delle fibre.

Se la rottura a taglio della matrice è opportunamente prevenuta mediante irrigidimenti trasversali del provino che si oppongano allo scorrimento per taglio della matrice (es. *fabric*), allora la resistenza a compressione trasversale può divenire paragonabile a quella longitudinale. Ovviamente in questo caso essa cresce al crescere della frazione di fibre presenti.

Tutte e tre le modalità di rottura sono caratterizzate da significative interazioni fibra-matrice e per questo difficilmente è possibile ottenere attendibili valutazioni teoriche della resistenza della lamina a partire da quella dei singoli componenti. Una buona stima della resistenza sotto sollecitazione di compressione trasversale pertanto va valutata per via sperimentale.

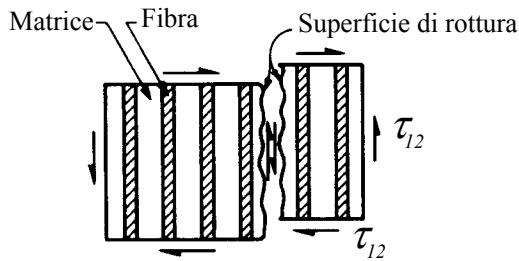
## 6.6. Cedimento sotto sollecitazione di taglio sul piano delle fibre

In presenza di sollecitazione di taglio sul piano della lamina la rottura di questa può avvenire per:

- 1) taglio della matrice;
- 2) taglio della matrice misto a debonding;
- 3) debonding.

In ogni caso, come mostra la figura seguente, la superficie di frattura risulta pressoché parallela alle fibre e può, a seconda dei casi, essere interna alla matrice (1), svilupparsi in parte sulla matrice ed

in parte lungo l'interfaccia fibra-matrice (2) oppure svilupparsi lungo l'interfaccia soltanto (3).



**Fig.7** - Rottura di compositi unidirezionali sotto sollecitazione di taglio nel piano

Anche in questo caso attendibili valutazioni della resistenza a taglio della lamina possono essere ottenute solo per via sperimentale.

## 6.7. Criteri di resistenza

Per la verifica di resistenza di un generico elemento è necessario confrontare il campo tensionale presente con il corrispondente campo tensionale massimo ammissibile (incipiente cedimento) determinato attraverso l'uso di un opportuno criterio di resistenza a partire da dati sperimentali sulla resistenza del materiale determinati solitamente attraverso prove condotte in presenza di sollecitazioni semplici (trazione, compressione, taglio).

Per un materiale isotropo la resistenza del materiale non dipende dall'orientamento della sollecitazione né dall'orientamento delle tensioni principali e, conseguentemente, i criteri di resistenza in uso forniscono delle relazioni tra le massime tensioni o deformazioni principali presenti e la resistenza a trazione e/o compressione (più raramente a taglio) del materiale senza tener conto dell'orientamento della sollecitazione.

Diversa è la situazione per un materiale ortotropo in quanto per questo la resistenza varia con l'orientamento. In particolare essa è individuata da 5 diversi parametri: resistenza a trazione longitudinale  $\sigma_{L,R}$  (1), resistenza a trazione trasversale  $\sigma_{T,R}$  (2), resistenza a taglio  $\tau_{LT,R}$  (3), resistenza a compressione longitudinale  $\sigma'_{L,R}$  (4) e resistenza a compressione trasversale  $\sigma'_{T,R}$  (5).

La verifica di resistenza di una lamina ortotropa consiste quindi nel confrontare lo stato tensionale presente con tali 5 parametri attraverso l'uso di un opportuno criterio di resistenza. I criteri di resistenza di uso comune nella progettazione meccanica con materiali compositi sono il criterio della *massima tensione*, il criterio della *massima deformazione*, il criterio del *massimo lavoro* (*Tsai-Hill*) ed il criterio di *Tsai-Wu*.

### 6.7.1 Criterio della massima tensione

Questa teoria afferma che la rottura della lamina avviene allorquando una delle tensioni cartesiane nel riferimento principale del materiale supera il corrispondente valore che provoca, da sola, la rottura del materiale. In presenza di trazione (tensioni normali positive) la condizione di resistenza è espressa pertanto dalle diseguaglianze:

$$\sigma_L < \sigma_{L,R}; \quad \sigma_T < \sigma_{T,R}; \quad \tau_{LT} < \tau_{LT,R} \quad (6-8)$$

Mentre in presenza di compressione (tensioni normali negative) si ha resistenza se risulta:

$$\sigma_L > \sigma'_{L,R}; \quad \sigma_T > \sigma'_{T,R}; \quad \tau_{LT} > -\tau_{LT,R} \quad (9-11)$$

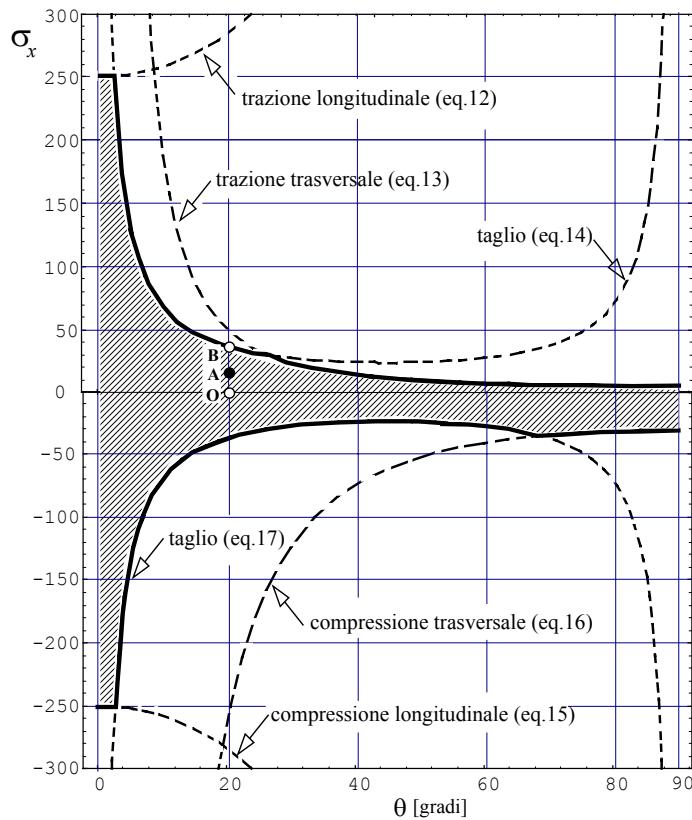
Il criterio è estremamente semplice e non considera affatto possibili interazioni tra le tensioni principali. Per applicare il criterio è necessario in genere determinare prima le tensioni nel riferimento principale e poi confrontare queste con i corrispondenti valori di rottura. A titolo di esempio per uno stato monoassiale di trazione applicato in direzione generica  $\theta$ , le condizioni di resistenza individuate dalle (6-8) si traducono semplicemente nelle relazioni:

$$\sigma_x < \sigma_{L,R} / \cos^2 \theta; \quad \sigma_x < \sigma_{T,R} / \sin^2 \theta; \quad \sigma_x < \tau_{LT,R} / \sin \theta \cos \theta \quad (12-14)$$

Per uno stato monoassiale di compressione invece la lamina resiste se risulta:

$$\sigma_x > \sigma'_{L,R} / \cos^2 \theta; \quad \sigma_x > \sigma'_{T,R} / \sin^2 \theta; \quad \sigma_x > -\tau_{LT,R} / \sin \theta \cos \theta \quad (15-18)$$

Nella ipotesi che sia  $\sigma_{L,R} = 250$  MPa,  $\sigma_{TR} = 6$  MPa,  $\tau_{LT,R} = 12$  MPa,  $\sigma'_{L,R} = -250$  MPa,  $\sigma'_{T,R} = -31$  MPa, diagrammando le (12-14) nel caso di trazione e le (15-18) nel caso di compressione si ha il corrispondente dominio di resistenza indicato nella seguente figura:



**Fig.8** - Criterio della massima tensione: dominio di resistenza per sollecitazione monoassiale.

Si vede come nel caso di trazione, per angoli inferiori a circa  $3^\circ$  la resistenza della lamina è limitata dalla resistenza a trazione longitudinale (rottura per trazione), per angoli compresi tra  $3^\circ$  e  $25^\circ$  circa la resistenza è limitata dalla resistenza a taglio (rottura a taglio), mentre per angoli maggiori di  $25^\circ$  circa la resistenza è limitata dalla resistenza a trazione trasversale (rottura per trazione trasversale). Simili considerazioni si hanno nel caso di compressione ove però, a causa della maggiore (in modulo) resistenza a compressione trasversale ( $| -31 | > 6$ ), la transizione dal taglio alla compressione trasversale si ha per angoli prossimi a  $70^\circ$  circa.

Si vede come in entrambi i casi, trazione o compressione, il carico sopportabile subisce un rapido decremento per angoli maggiori di  $3-4^\circ$  circa. Per esempio ad un disallineamento di circa  $5^\circ$  corrisponde una riduzione della resistenza di circa il 50%. Utilizzando pertanto compositi tipo *single*

*layer* è assolutamente necessario assicurare un accurato allineamento carico-fibre.

Il criterio di resistenza non considerando le interazioni tra le diverse sollecitazioni risulta in genere non conservativo. Altro difetto del criterio consiste nel passaggio non graduale da una modalità di rottura all'altra con presenza di punti angolosi nei domini di resistenza. L'osservazione sperimentale mostra infatti che il passaggio da una modalità di rottura ad un'altra avviene sempre in modo continuo con un campo intermedio in cui si assiste ad una rottura mista del materiale.

Nel caso di sollecitazione monoassiale la rappresentazione grafica del dominio di resistenza consente una immediata valutazione del coefficiente di sicurezza. Per esempio per un carico di trazione rappresentato dal punto A in fig.8, il coefficiente di sicurezza è dato dal rapporto tra il segmento OB ed il segmento OA, cioè  $\eta = OB/OA$ .

### 6.7.2 Criterio della massima deformazione

Secondo questa teoria, meno in uso della precedente, la rottura della lamina avviene allorquando una delle deformazioni cartesiane nel riferimento principale del materiale supera il corrispondente valore limite che determina, da sola, la rottura del materiale. In presenza di sollecitazioni di trazione (deformazioni lineiche positive) la condizione di resistenza è espressa pertanto dalle diseguaglianze:

$$\varepsilon_L < \varepsilon_{L,R}; \quad \varepsilon_T < \varepsilon_{T,R}; \quad \gamma_{LT} < \gamma_{LT,R} \quad (19-21)$$

Mentre in presenza di compressione (deformazioni lineiche negative) si ha resistenza se risulta:

$$\varepsilon_L > \varepsilon'_{L,R}; \quad \varepsilon_T > \varepsilon'_{T,R}; \quad \gamma_{LT} > -\gamma_{LT,R} \quad (22-24)$$

Come il criterio della massima tensione, esso non tiene conto delle possibili interazioni tra le deformazioni nel riferimento principale e pertanto, come questo, risulta non conservativo. Anche questo inoltre, contrariamente alle evidenze sperimentali, prevede un passaggio da una modalità di rottura ad un'altra.

Per applicare il criterio è necessario determinare le deformazioni nel riferimento principale e poi confrontare queste con i corrispondenti valori limite. A titolo di esempio, supponendo un comportamento elastico lineare del materiale sino a rottura (materiale fragile), per uno stato monoassiale di trazione applicato in direzione generica  $\theta$ , le condizioni di resistenza individuate dalle (19-21) utilizzando le equazioni costitutive si traducono nelle relazioni:

$$\sigma_x < \frac{E_L \varepsilon_{L,R}}{\cos^2 \theta - \nu_{LT} \sin^2 \theta}; \quad \sigma_x < \frac{E_T \varepsilon_{T,R}}{\sin^2 \theta - \nu_{TL} \cos^2 \theta}; \quad \gamma_x < \frac{G_{LT} \tau_{LT,R}}{\sin \theta \cos \theta} \quad (25-27)$$

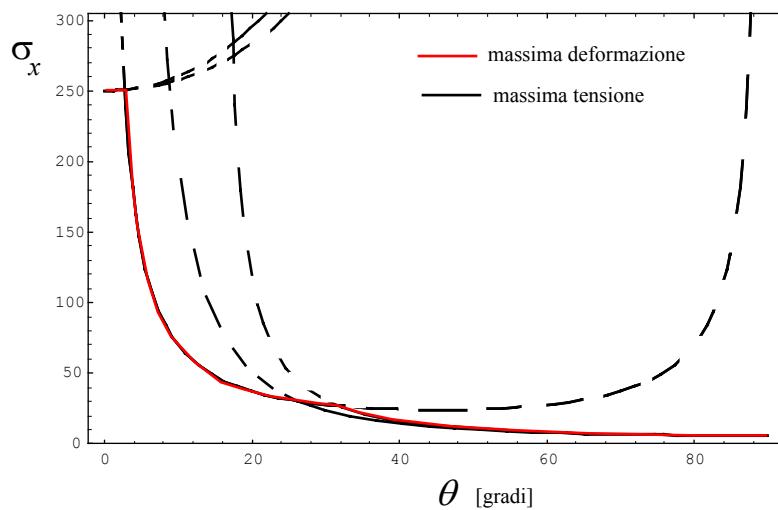
mentre per uno stato monoassiale di compressione si ha invece:

$$\sigma_x > \frac{E_L \varepsilon'_{L,R}}{\cos^2 \theta - \nu_{LT} \sin^2 \theta}; \quad \sigma_x > \frac{E_T \varepsilon'_{T,R}}{\sin^2 \theta - \nu_{TL} \cos^2 \theta}; \quad \sigma_x > -\frac{G_{LT} \gamma_{LT,R}}{\sin \theta \cos \theta} \quad (25'-27')$$

Nel caso di materiale fragile ( $\sigma_{x,R} = E_x \varepsilon_{x,R}$ ,  $x=L, T$ ;  $\tau_{LT,R} = G_{LT} \gamma_{LT,R}$ ), il criterio della massima deformazione si discosta poco dal criterio della massima tensione. In caso contrario si possono invece avere significative differenze.

A titolo di esempio la figura seguente riporta il confronto tra il dominio di resistenza per trazione semplice individuato dal criterio della massima tensione e quello della massima deformazione per il materiale considerato in fig.8, supposto avente comportamento fragile sino a rottura con  $\nu_{LT}=0.3$ ,

$E_L=40000$  MPa e  $E_T=10000$  MPa.



**Fig.8bis** - Criterio della massima tensione e della massima deformazione: confronto tra domini di resistenza per sollecitazione di trazione.

Dalla figura 8bis si vede come in questo caso le differenze tra i due metodi sono significative solo nell'intorno della zona di transizione dalla rottura per taglio alla rottura per trazione trasversale ( $\theta=25^\circ\text{-}30^\circ$ ).

### 6.7.3 Criterio del massimo lavoro (Tsai-Hill)

Questa teoria, proposta da Tsai utilizzando un criterio di snervamento per materiali anisotropi inizialmente messo a punto da Hill, afferma che la rottura della lamina avviene allorquando il lavoro (di distorsione) supera il corrispondente valore limite ammissibile. Si tratta in pratica della estensione del criterio di Von Mises ai materiali anisotropi. Secondo questo criterio il materiale cede se risulta violata la seguente diseguaglianza:

$$\left(\frac{\sigma_L}{\sigma_{L,R}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{\sigma_{T,R}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_L}{\sigma_{L,R}}\right)\left(\frac{\sigma_T}{\sigma_{T,R}}\right) + \left(\frac{\tau_{LT}}{\tau_{LT,R}}\right)^2 < 1 \quad (28)$$

La (28) è valida per stato piano di trazione (tensioni normali positive). In presenza di stato biassiale di compressione (tensioni normali negative) è necessario usare le relative resistenze caratteristiche: Si ha cioè:

$$\left(\frac{\sigma_L}{\sigma'_{L,R}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{\sigma'_{T,R}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_L}{\sigma'_{L,R}}\right)\left(\frac{\sigma_T}{\sigma'_{T,R}}\right) + \left(\frac{\tau_{LT}}{\tau_{LT,R}}\right)^2 < 1 \quad (29)$$

A differenza della teoria della massima tensione e della massima deformazione, le condizioni di resistenza della teoria del massimo lavoro tengono conto di tutte le componenti principali di tensione. In altre parole, a differenza dei precedenti, il criterio di Tsai-Hill tiene conto delle interazioni tra le tensioni nel riferimento principale. Essa pertanto risulta più conservativa e più aderente ai dati sperimentali dei criteri precedenti.

In presenza di uno stato monoassiale di trazione applicato in direzione generica  $\theta$ , la condizione di resistenza individuata dalla (28) utilizzando le formule di trasformazione dello stato di tensione

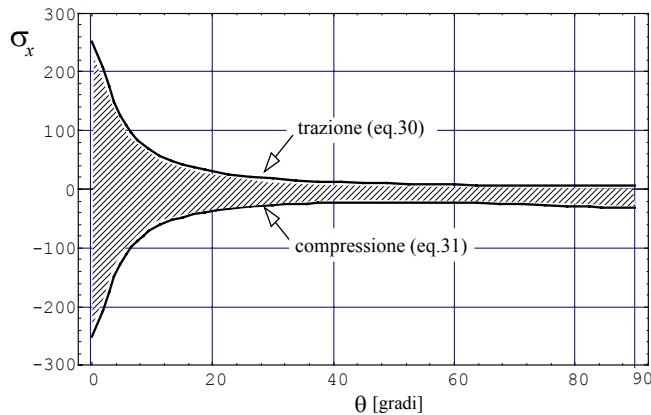
nell'intorno del punto, si traduce nella relazione:

$$\sigma_x^2 \left[ \left( \frac{\cos^2 \theta}{\sigma_{L,R}} \right)^2 + \left( \frac{\sin^2 \theta}{\sigma_{T,R}} \right)^2 - \left( \frac{\cos^2 \theta}{\sigma_{L,R}} \right) \left( \frac{\sin^2 \theta}{\sigma_{T,R}} \right) + \left( \frac{\sin \theta \cos \theta}{\tau_{LT,R}} \right)^2 \right] < 1 \quad (30)$$

Nel caso di sollecitazione di compressione si ha invece:

$$\sigma_x^2 \left[ \left( \frac{\cos^2 \theta}{\sigma'_{L,R}} \right)^2 + \left( \frac{\sin^2 \theta}{\sigma'_{T,R}} \right)^2 - \left( \frac{\cos^2 \theta}{\sigma'_{L,R}} \right) \left( \frac{\sin^2 \theta}{\sigma'_{T,R}} \right) + \left( \frac{\sin \theta \cos \theta}{\tau_{LT,R}} \right)^2 \right] < 1 \quad (31)$$

Esplicitando nelle (30) e (31) la tensione  $\sigma_x$  e diagrammando col segno di egualianza, si ottiene il dominio di resistenza per sollecitazioni semplici di trazione e compressione (vedi fig.9).



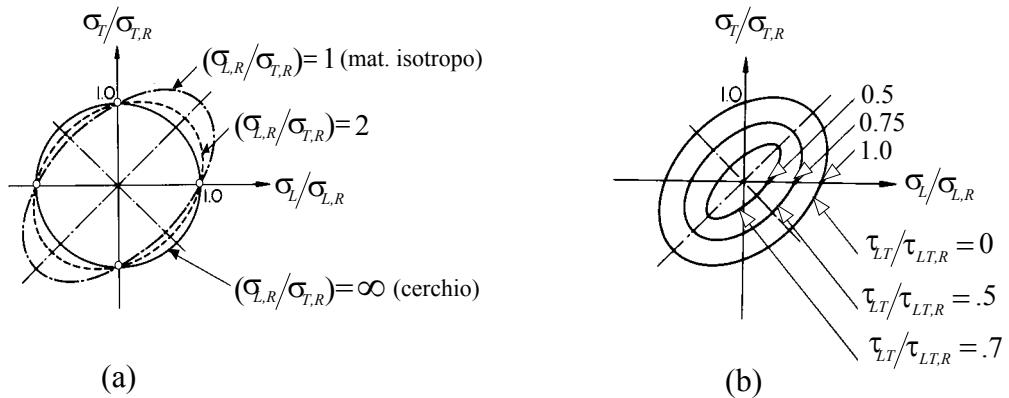
**Fig.9** - Criterio di Tsai-Hill: dominio di resistenza per sollecitazione monoassiale.

Si vede come, a differenza dei precedenti criteri, il criterio di Tsai-Hill facendo riferimento ad un'unica condizione di resistenza rappresentata da una unica funzione continua con derivata prima continua, da luogo ad un dominio di resistenza senza punti angolosi. Un confronto coi criteri illustrati precedentemente mostra un andamento del dominio qualitativamente simile con differenze relativamente elevate in corrispondenza dei punti angolosi di questi ultimi.

Nel caso generale di stato tensionale biassiale l'uso del dominio di resistenza nella progettazione meccanica è poco pratico in quanto, per la presenza di tre variabili ( $\sigma_L$ ,  $\sigma_T$ ,  $\tau_{LT}$ ) si ha un diagramma tridimensionale (problema analogo al caso di materiali isotropi e stato triassiale). Nel caso particolare di stato biassiale con tensioni principali  $\sigma_L, \sigma_T$  coincidenti con le tensioni cartesiane  $\sigma_L, \sigma_T$  essendo identicamente nulla la tensione tangenziale  $\tau_{LT}$ , le condizioni di resistenza involgono due sole variabili ed il dominio di resistenza diviene piano. Tale condizione, relativamente frequente si verifica per esempio in corrispondenza degli assi di simmetria di componenti caricati simmetricamente e con assi principali del materiale coincidenti con quelli di simmetria. Per esempio per uno stato piano di trazione la (28) diviene:

$$\left( \frac{\sigma_L}{\sigma_{L,R}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_T}{\sigma_{T,R}} \right)^2 - \left( \frac{\sigma_L}{\sigma_{L,R}} \right) \left( \frac{\sigma_T}{\sigma_{T,R}} \right) < 1 \quad (28bis)$$

che nel piano cartesiano  $\sigma_L/\sigma_{L,R}$  -  $\sigma_T/\sigma_{T,R}$  è l'equazione di una ellisse con assi coincidenti con le due bisettrici principali (vedi fig.10a).



**Fig.10** - Criterio di Tsai-Hill: dominio di resistenza per tensione tangenziale trascurabile (a) e fissata (b).

Per lamina con eguale resistenza in direzione longitudinale e trasversale ( $\sigma_{L,R}=\sigma_{T,R}$ ) tale ellisse diviene l'ellisse Von Mises (materiali isotropi). Nel caso invece di resistenza a trazione trasversale trascurabile (massima anisotropia), il dominio di resistenza diviene una circonferenza (vedi fig.10a). Fermo restando le caratteristiche del materiale, cioè fissati il rapporto  $\sigma_{L,R}/\sigma_{T,R}$  al crescere del rapporto tra tensione tangenziale  $\tau_{LT}$  presente e la corrispondente tensione limite  $\tau_{LT,R}$  il dominio di resistenza (ellisse) si rimpicciolisce via via mantenendo sempre la stessa forma ellittica (omologia, vedi fig.10b).

Il criterio ha per molti compositi una buona rispondenza coi dati sperimentali. Ciò ne ha determinato una larga applicazione nella previsione della resistenza statica in presenza di stati biassiali di tensione.

L'unico inconveniente del metodo consiste nella non unicità della relazione che esprime la condizione di resistenza: essa va opportunamente scritta per tensioni positive e/o negative.

#### 6.7.4 Criterio di Tsai-Wu

In questa teoria la condizione di rottura del materiale è individuata da una relazione quadratica involgente le 3 tensioni cartesiane nel riferimento principale del materiale. Nel caso tridimensionale la condizione di resistenza è assicurata allorquando risulta:

$$\sum_{i,j} F_{ij} \sigma_i \sigma_j + \sum_i F_i \sigma_i < 1 \quad \text{oppure} \quad \sum_{i,j} G_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j + \sum_i G_i \varepsilon_i < 1 \quad (32)$$

dove  $F_{ij}$  e  $G_{ij}$  sono parametri di resistenza determinati sperimentalmente. Per stato tensionale biassiale la prima delle (32) si semplifica come:

$$\begin{aligned} & F_{11} \sigma_L^2 + F_{22} \sigma_T^2 + F_{66} \tau_{LT}^2 + \\ & 2F_{12} \sigma_L \sigma_T + 2F_{16} \sigma_L \tau_{LT} + 2F_{26} \sigma_T \tau_{LT} + \\ & F_1 \sigma_L + F_2 \sigma_T + F_{12} \tau_{LT} < 1 \end{aligned} \quad (33)$$

Tenendo conto che nel riferimento principale il risultato deve essere invariante rispetto al segno della tensione tangenziale deve essere:

$$F_{16} = F_{26} = F_{12} = 0 \quad (34)$$

e quindi la formula (33) si semplifica ulteriormente come:

$$F_{11}\sigma_L^2 + F_{22}\sigma_T^2 + F_{66}\tau_{LT}^2 + 2F_{12}\sigma_L\sigma_T + F_1\sigma_L + F_2\sigma_T < 1 \quad (35)$$

L'applicazione del criterio al caso piano necessita pertanto della conoscenza di 6 parametri di resistenza del materiale (uno in più rispetto ai precedenti criteri). In particolare i parametri relativi alla tensione longitudinale possono essere determinati mediante prova di trazione e compressione semplice. Alla rottura si ha in questi casi:

$$\begin{aligned} F_{11}\sigma_{L,R}^2 + F_1\sigma_{L,R} &= 1 && \text{(trazione)} \\ F_{11}\sigma'_{L,R}^2 + F_1\sigma'_{L,R} &= 1 && \text{(compressione)} \end{aligned} \quad (36-37)$$

Risolvendo queste due relazioni si trova immediatamente la relazione tra i coefficienti di Tsai-Wu e le caratteristiche di resistenza longitudinale del materiale:

$$F_{11} = \frac{1}{\sigma_{L,R}\sigma'_{L,R}}; \quad F_1 = \frac{1}{\sigma_{L,R}} - \frac{1}{\sigma'_{L,R}} \quad (38-39)$$

I parametri relativi alla tensione trasversale si ottengono analogamente eseguendo una prova di trazione e compressione trasversale semplice. Con riferimento alla condizione di incipiente rottura si ha in questi casi:

$$\begin{aligned} F_{22}\sigma_{T,R}^2 + F_2\sigma_{T,R} &= 1 \\ F_{22}\sigma'_{T,R}^2 + F_2\sigma'_{T,R} &= 1 \end{aligned} \quad (40-41)$$

che risolvendo forniscono:

$$F_{22} = \frac{1}{\sigma_{T,R}\sigma'_{T,R}}; \quad F_2 = \frac{1}{\sigma_{T,R}} - \frac{1}{\sigma'_{T,R}} \quad (42-43)$$

Per determinare il parametro relativo al taglio si esegue una prova di taglio puro che fornisce immediatamente:

$$F_{66} = \frac{1}{\tau_{LT,R}^2} \quad (44)$$

Per determinare infine il coefficiente relativo al termine misto  $F_{12}$  è necessario eseguire una prova biassiale. Da questa prova, note le altre costanti si ottiene:

$$F_{12} = [1 - (F_{11}\sigma_L^2 + F_{22}\sigma_T^2 + F_{66}\tau_{LT}^2 + F_1\sigma_L + F_2\sigma_T)] / (2\sigma_L\sigma_T)_R \quad (45)$$

Nel caso piano il dominio di resistenza individuato dal criterio di Tsai-Wu è un ellissoide in ottimo accordo con i dati sperimentali. La bontà del metodo è pagata però dalla maggiore complessità delle prove sperimentali necessarie alla determinazione del coefficiente misto  $F_{12}$ .

Per uno stato monoassiale utilizzando le relazioni di trasformazione dello stato di tensione nell'intorno del punto, la condizione di resistenza (35) diviene:

$$\sigma_x^2 \left[ F_{11} \cos^4 \theta + F_{22} \sin^4 \theta + (F_{66} + 2F_{12}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right] + \sigma_x \left( F_1 \cos^2 \theta + F_2 \sin^2 \theta \right) < 1 \quad (46)$$

La fig.11 riporta il dominio di resistenza ottenuto diagrammando la (46) assieme al dominio individuato dalla teoria di Tsai-Hill, per il materiale di cui all'esempio precedente considerando che nella prova biassiale la rottura sia avvenuta per  $\sigma_L=0.8\sigma_{L,R}=200$  MPa e  $\sigma_T=0.8\sigma_{T,R}=5$  MPa.

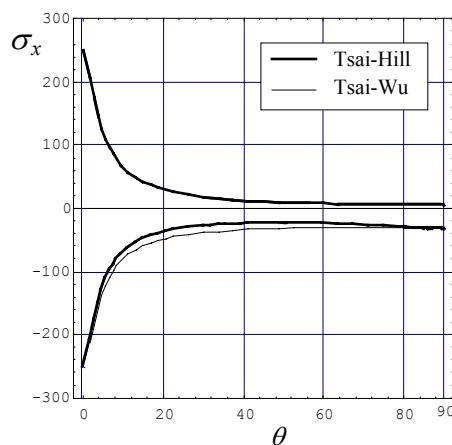
Utilizzando le relazioni (38-45) i coefficienti di Tsai-Wu per questo materiale assumono i valori [in  $\text{MPa}^{-1}$ ]:

$$F_{11} = \frac{1}{\sigma_{L,R}\sigma'_{L,R}} = \frac{1}{250*250} = 16*10^{-6}; \quad F_1 = \frac{1}{\sigma_{L,R}} - \frac{1}{\sigma'_{L,R}} = 0$$

$$F_{22} = \frac{1}{\sigma_{T,R}\sigma'_{T,R}} = \frac{1}{6*31} = 5.4*10^{-3}; \quad F_2 = \frac{1}{\sigma_{T,R}} - \frac{1}{\sigma'_{T,R}} = \frac{1}{6} - \frac{1}{31} = 0.134$$

$$F_{66} = \frac{1}{\tau^2_{LT,R}} = \frac{1}{12^2} = 6.9*10^{-3};$$

$$F_{12} = [1 - (16*10^{-6} * 200^2 + 5.4*10^{-3} * 5^2 + 0.134 * 5)] / (2 * 200 * 5) = -2.2 * 10^{-4}$$



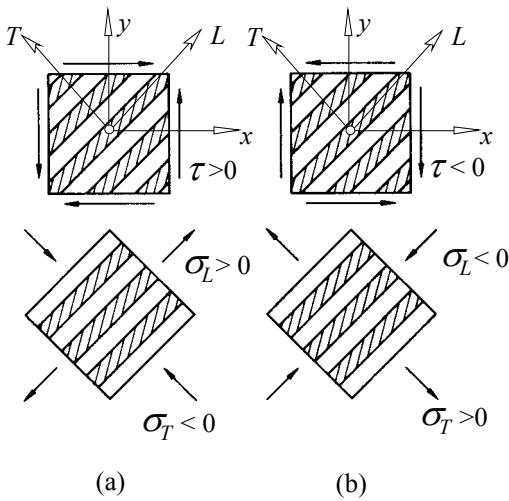
**Fig.11** - Criterio di Tsai-Wu: dominio di resistenza per sollecitazione monoassiale.

L'osservazione della fig.11 mostra che in questo caso il criterio di Tsai-Wu ed il criterio di Tsai-Hill praticamente coincidono per trazione, mentre per compressione il criterio di Tsai-Hill risulta più conservativo del criterio di Tsai-Wu che però risulta più vicino ai risultati sperimentali.

## 6.8. Influenza del segno della tensione tangenziale

A causa dell'anisotropia della lamina, nella verifica di resistenza è importante tener conto del segno corretto della tensione tangenziale, specialmente in presenza di stati tensionali di taglio puro. Per comprendere ciò si consideri una lamina soggetta ad uno stato di taglio puro con tensioni tangenziali agenti su piani inclinati di  $45^\circ$  rispetto alle direzioni principali del materiale (vedi figura seguente).

Dalla fig.12 si vede chiaramente che se le tensioni tangenziali sono positive (fig.12a), la tensione normale in direzione delle fibre è di trazione mentre la tensione in direzione ortogonale alle fibre è di compressione. Il contrario avviene se le tensioni tangenziali sono negative (fig.12b). Tenuto conto allora della diversa resistenza a trazione e compressione in direzione longitudinale e trasversale, si ha che due sollecitazioni di taglio eguali in modulo e direzione ma aventi verso (segno) opposto hanno effetti diversi sul materiale. Per esempio una può indurre la rottura mentre l'altra può essere sopportata dal materiale.



**Fig.12** - Tensioni lungo gli assi principali per taglio positivo (a) e negativo (b).

Considerando il materiale di cui all'esempio riportato al cap.4.5.1 ( $\sigma_{L,R} = 250 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{TR} = 6 \text{ MPa}$ ,  $\tau_{L,R} = 12 \text{ MPa}$ ,  $\sigma'_{L,R} = -250 \text{ MPa}$ ,  $\sigma'_{T,R} = -31 \text{ MPa}$ ) ed uno stato tensionale di taglio puro a  $45^\circ$  con  $\tau_{LT} = 10 \text{ MPa}$ , per tensioni tangenziali positive utilizzando il criterio di resistenza della massima tensione la verifica di resistenza è assicurata essendo:

$$\sigma_L = 10 \text{ MPa} < \sigma_{L,R} = 250 \text{ MPa}; \quad \sigma_T = -10 \text{ MPa} > \sigma'_{T,R} = -31 \text{ MPa}$$

Diversa è invece la conclusione nel caso di tensioni tangenziali negative (tensione di trazione in direzione normale) essendo:

$$\sigma_L = -10 \text{ MPa} > \sigma_{L,R} = -250 \text{ MPa}; \quad \sigma_T = 10 \text{ MPa} > \sigma_{T,R} = 6 \text{ MPa} !$$

In quest'ultimo caso pertanto il materiale (lamina) si rompe per cedimento in direzione normale alle fibre. Evidentemente se l'effettivo stato tensionale presente nel generico elemento in progetto è caratterizzato da tensioni negative, per un corretto sfruttamento del materiale è sufficiente orientare le fibre a  $-45^\circ$  piuttosto che a  $+45^\circ$ .

Ovviamente se le direzioni di taglio coincidono con le direzioni principali, il segno delle tensioni tangenziali non ha alcuna influenza.