

7. Analisi dei laminati compositi

7.1. Generalità

Nella costruzione dei laminati compositi, ottenuti sovrapponendo lamine composite unidirezionali, bidirezionali o random, le caratteristiche e l'orientamento di ciascuna lamina sono fissate in modo da soddisfare le varie esigenze di progetto quali, resistenza, rigidità ecc.

Su ciascuna lamina le tensioni e le deformazioni causate dalla applicazione del carico di esercizio, possono essere determinate con la teoria classica dei laminati vista al cap.5. Confrontando tali valori con i corrispondenti valori ammissibili, mediante uso di un opportuno criterio di resistenza (vedi cap.6) è possibile stabilire se il laminato è capace di sopportare il carico imposto senza alcun danneggiamento (tutte le lamine resistono) o meno. Per ciascuna lamina è così possibile determinare il relativo coefficiente di sicurezza. Per esempio, utilizzando il criterio della massima tensione, per la k -esima lamina del laminato il coefficiente di sicurezza è dato da:

$$\eta_k = \min \left[\frac{(\sigma_{ij,R})_k}{(\sigma_{ij})_k} \right] \quad (i, j = L, T) \quad (1)$$

Similmente, utilizzando il criterio della massima deformazione, il coefficiente di sicurezza della k -esima lamina è dato da:

$$\eta_k = \min \left[\frac{(\varepsilon_{ij,R})_k}{(\varepsilon_{ij})_k} \right] \quad (i, j = L, T) \quad (2)$$

Utilizzando invece il criterio di Tsai-Hill o il criterio di Tsai-Wu, e tenendo conto che il coefficiente di sicurezza è anche la “distanza” che lo stato tensionale di esercizio ha dallo stato di tensione omologo che produce una condizione di incipiente cedimento della lamina, dopo semplici passaggi si ha rispettivamente:

$$\text{(Tsai-Hill)} \quad \eta_k = \left(\sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{\sigma_{L,R}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{\sigma_{T,R}} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_L}{\sigma_{L,R}} \right) \left(\frac{\sigma_T}{\sigma_{T,R}} \right) + \left(\frac{\tau_{LT}}{\tau_{LT,R}} \right)^2} \right)^{-1} \quad (3)$$

e

$$\text{(Tsai-Wu)} \quad \eta_k^2 (F_{LLLL} \sigma_{LL}^2 + F_{TT} \sigma_{TT}^2 + F_{LTLT} \tau_{LT}^2 + 2F_{LLTT} \sigma_{LL} \sigma_{TT}) + \eta_k (F_{LL} \sigma_{LL} + F_{TT} \sigma_{TT} + F_{LT} \tau_{LT}) = 1 \quad (4)$$

La (4) è una equazione di secondo grado nel coefficiente di sicurezza, pertanto risulta in pratica:

$$\eta_k = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{con} \quad \begin{cases} a = (F_{LLLL} \sigma_{LL}^2 + F_{TT} \sigma_{TT}^2 + F_{LTLT} \tau_{LT}^2 + 2F_{LLTT} \sigma_{LL} \sigma_{TT}) \\ b = (F_{LL} \sigma_{LL} + F_{TT} \sigma_{TT} + F_{LT} \tau_{LT}) \\ c = -1 \end{cases} \quad (5)$$

Ovviamente la lamina del laminato che si romperà per prima, è quella cui corrisponde il più basso coefficiente di sicurezza. Al crescere del carico applicato, con la rottura di tale lamina inizia il danneggiamento del laminato. Tale fenomeno è sempre un processo progressivo in quanto quasi mai la rottura di un laminato avviene di schianto e segue immediatamente la rottura della prima lamina.

La rottura di una lamina, cioè, sovente della lamina il cui rinforzo è ortogonale alla direzione del carico (o pressoché tale), non produce la rottura del laminato. Anzi, in molti casi la rottura della prima lamina, proprio per l'esiguo carico sopportato da questa, non altera in modo apprezzabile le caratteristiche (rigidezza ecc) del laminato. Inoltre, sovente il carico di rottura è molto più alto del carico di inizio danneggiamento del laminato, cioè del carico P_{FPF} (FPF =first ply failure, nella letteratura anglosassone) che determina la rottura della prima lamina.

La rottura successiva delle lamine del laminato, all'aumentare del carico applicato porta ovviamente via via ad una diminuzione progressiva della rigidezza del laminato. Nella ipotesi di lamine tutte con comportamento elastico lineare sino alla rottura (comportamento fragile), al crescere del carico applicato il diagramma carico-deformazione è rappresentato da una poligonale del tipo illustrato nella seguente fig.1.

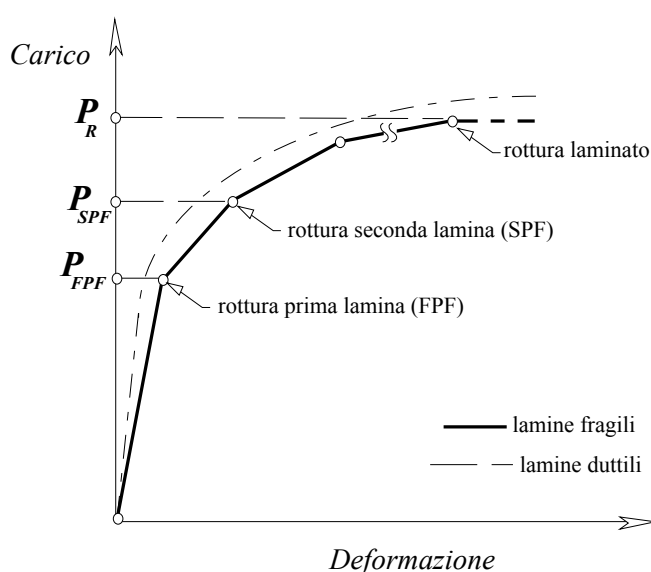


Fig.1 - Diagramma carico-deformazione caratteristico di un laminato composito.

In presenza di comportamento elasto-plastico delle lamine, la poligonale non presenta più spigoli vivi ma arrotondati (curva a tratto e punto in fig.1).

Eseguire l'analisi di un laminato composito significa pertanto determinare il carico di rottura della prima lamina P_{FPF} , il carico di rottura della seconda lamina P_{SPF} (SPF =second ply failure), della terza lamina e così via sino alla rottura definitiva del laminato. In pratica l'analisi si può dividere in due passi successivi quali: (a) analisi del carico di FPF e (b) analisi post-FPF. Nella usuale ipotesi di lamine fragili, il carico di FPF può essere determinato tramite analisi lineare del laminato condotta utilizzando la TCL, mentre l'analisi post-FPF può essere eseguita mediante opportuna analisi lineare incrementale (step by step) del laminato.

7.2. Determinazione del carico di FPF

Per un carico di intensità compresa tra 0 ed il valore che produce la rottura della prima lamina, tensioni e deformazioni del laminato si ottengono facilmente mediante uso della TCL, con le formule risolutive già viste al cap.6. In dettaglio, calcolate le componenti di deformazione del piano medio a partire dalla relazione matriciale generale:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \tilde{\varepsilon}^o \\ \tilde{k} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

ovvero mediante la nota relazione risolvente (vedi cap.5):

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\varepsilon}^o \\ \tilde{k} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H & L \\ F & G \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{M} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Le deformazioni corrispondenti alla k -esima lamina si calcolano immediatamente con la equazione fondamentale della teoria classica dei laminati:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad z_{k-1} < z < z_k \quad (8)$$

Da queste è in genere conveniente valutare le deformazioni nel riferimento principale della lamina attraverso la nota relazione:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} / 2 \end{Bmatrix}_k = [T(\theta_k)] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} / 2 \end{Bmatrix}_k \quad z_{k-1} < z < z_k \quad (9)$$

A questo punto le tensioni nella generica lamina si calcolano utilizzando la matrice di rigidezza della lamina secondo la eq. costitutiva:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{Bmatrix}_k = [E]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{Bmatrix}_k \quad z_{k-1} < z < z_k \quad (10)$$

con ovvio significato dei simboli. Tenuto conto che la distribuzione delle tensioni nello spessore della lamina è sempre di tipo lineare, su ciascuna lamina le massime tensioni si hanno sempre in corrispondenza della superficie superiore (*top*, $z=z_k$) o della superficie inferiore (*bottom*, $z=z_{k-1}$). Utilizzando pertanto un opportuno criterio di resistenza il coefficiente di sicurezza di ciascuna lamina è pari al più piccolo dei due coefficienti di sicurezza valutati in corrispondenza della superficie superiore ed inferiore, cioè:

$$\eta_k = \min(\eta_{k,top}, \eta_{k,bottom}) \quad (11)$$

con $\eta_{k,top}$, $\eta_{k,bottom}$ calcolati utilizzando una delle equazioni (1-5). Valutato per ciascuna lamina il coefficiente di sicurezza η_k , il corrispondente carico di rottura della lamina $\{\tilde{N} \ \tilde{M}\}_{R,k}^T$ è dato semplicemente da:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{M} \end{Bmatrix}_{R,k} = \eta_k \begin{Bmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{M} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Evidentemente la lamina che si rompe per prima è quella cui compete il minimo coefficiente di sicurezza. Tale coefficiente di sicurezza coincide pertanto con il coefficiente di sicurezza η_{FPF} del

laminato rispetto al danneggiamento della prima lamina, cioè:

$$\eta_{FPF} = \min[(\eta_k (k = 1, \dots, n))] \quad (13)$$

Il carico di FPF del laminato è quindi fornito dalla relazione:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{M} \end{Bmatrix}_{FPF} = \eta_{FPF} \begin{Bmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{M} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Determinato così il carico di FPF, è possibile conoscere immediatamente quale è il corrispondente stato di deformazione e di tensione presente su ciascuna lamina. Si ha:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix}_{k,FPF} = \eta_{FPF} \begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix}_k \quad z_{k-1} < z < z_k \quad (15)$$

e similmente:

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{bmatrix}_{k,FPF} = \eta_{FPF} \begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \tau_{LT} \end{bmatrix}_k \quad z_{k-1} < z < z_k \quad (16)$$

7.3. Analisi dopo FPF

Superato il carico di FPF le relazioni (6-7) non sono più valide in quanto viene meno alla rigidità del laminato il contributo della lamina che ha ceduto. Per eseguire l'analisi del laminato dopo la rottura della prima lamina è necessario in pratica aggiornare le matrici A, B, D caratteristiche del laminato con le nuove matrici A', B' e D' ottenute modificando opportunamente la matrice di rigidità della lamina danneggiata. Non è però sufficiente sostituire nella (6) o nella (7) le nuove matrici A', B', D' per potere analizzare il comportamento del laminato dopo FPF. Infatti, nella usuale ipotesi di lamine fragili, dopo la rottura della prima lamina non vi è proporzionalità diretta tra carichi applicati e deformazioni, come mostra la stessa figura 1. Il tratto di poligonale compreso tra P_{FPF} e P_{SPF} infatti non è un segmento di retta passante per l'origine e quindi ad una deformazione nulla non corrisponde un carico nullo come invece previsto dalle (6) e (7). Il comportamento del laminato è di tipo lineare se si opera una traslazione del riferimento cartesiano carico-deformazione in modo da portare l'origine del riferimento nel punto rappresentativo del cedimento della prima lamina. In altre parole, la (6) e la (7) possono essere scritte solo in termini incrementali: l'incremento della deformazione subita dal laminato a partire dalla deformazione corrispondente alla rottura della prima lamina è legata all'incremento di carico tramite relazioni analoghe alla (6), cioè:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \tilde{N} \\ \Delta \tilde{M} \end{Bmatrix}_{AFPF} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ B' & D' \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \Delta \tilde{\varepsilon}^o \\ \Delta \tilde{k} \end{Bmatrix}_{AFPF} \quad (17)$$

in cui l'incremento di carico è dato dalla differenza tra il carico corrente ed il carico di FPF:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \tilde{N} \\ \Delta \tilde{M} \end{Bmatrix}_{AFPF} = \begin{Bmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{M} \end{Bmatrix}_{AFPF} - \begin{Bmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{M} \end{Bmatrix}_{FPF} \quad (18)$$

Nelle (17,18) l'acronimo *AFPF* sta per *after FPF*. Le matrici A' , B' e D' differiscono dalle matrici A , B e D relative al laminato integro per la correzione apportata alla matrice di rigidezza della lamina che ha ceduto. Tale correzione dipende dalle particolari modalità di cedimento della lamina e non sempre è possibile una correzione accurata. Per esempio, se la prima lamina ha ceduto per trazione trasversale può essere ragionevole annullare il modulo di Young trasversale E_T di questa e lasciare invariato quello longitudinale E_L se la resistenza longitudinale legata alle fibre (integre) rimane praticamente invariata. Ciò equivale ad assumere per la lamina rotta la seguente matrice di rigidezza modificata:

$$[E]_{\text{mod}} = \begin{bmatrix} \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Nella (19) si assume per ipotesi che la rigidezza a taglio della lamina danneggiata rimanga invariata. Nel caso di laminati costituiti da molte lamine variamente orientate, essendo non facile prevedere l'esatto comportamento della lamina (inglobata nel laminato) dopo rottura, in modo conservativo si può annullare la resistenza e la rigidezza della lamina in tutte le direzioni, annullando praticamente tutti i termini della corrispondente matrice di rigidezza. Per esempio se la lamina danneggiata è la lamina q -esima si avrà allora:

$$A' = \sum_{k=1}^N [\tilde{E}]_k s_k; \quad B' = \sum_{k=1}^N [\tilde{E}]_k s_k \bar{z}_k; \quad D' = \sum_{k=1}^N [\tilde{E}]_k \frac{(z_k^3 - z_{k-1}^3)}{3}; \quad \text{con } k \neq q \quad (20-22)$$

Si osservi che nel caso di semplice rottura trasversale della lamina tale ipotesi può risultare troppo conservativa in quanto finisce per trascurare la elevata resistenza longitudinale della lamina ed il suo significativo contributo alla resistenza del laminato. In ogni caso, modificando le matrici del laminato e considerando incrementi delle caratteristiche di sollecitazione ΔM e ΔN arbitrari ma proporzionali al carico applicato (ipotesi di carico che cresce mantenendosi proporzionale a se stesso), risolvendo la (17) si determinano deformazioni e curvature incrementali del piano medio dopo la *FPF*. Si ottiene in pratica una relazione formalmente identica a quella ottenuta nella analisi lineare (eq.7) e cioè:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \tilde{\epsilon}^o \\ \Delta \tilde{k} \end{Bmatrix}_{AFPF} = \begin{bmatrix} H' & L' \\ F' & G' \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \Delta \tilde{N} \\ \Delta \tilde{M} \end{Bmatrix}_{AFPF} \quad (23)$$

con ovvio significato dei simboli. La (23) consente di calcolare anzitutto i valori incrementali delle deformazioni cartesiane e quindi le deformazioni principali di ciascuna lamina secondo la stessa teoria dei laminati:

$$\begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_x \\ \Delta \varepsilon_y \\ \Delta \gamma_{xy} \end{bmatrix}_{k,AFPF} = \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_x^o \\ \Delta \varepsilon_y^o \\ \Delta \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \Delta k_x \\ \Delta k_y \\ \Delta k_{xy} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_L \\ \Delta \varepsilon_T \\ \Delta \gamma_{LT}/2 \end{Bmatrix}_{k,AFPF} = [T(\theta_k)] \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_x \\ \Delta \varepsilon_y \\ \Delta \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix}_{k,AFPF} \quad z_{k-1} < z < z_k \quad (24-25)$$

Da queste, utilizzando al solito le equazioni costitutive si calcolano le tensioni incrementali su ciascuna lamina mediante la relazione:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \sigma_L \\ \Delta \sigma_T \\ \Delta \tau_{LT} \end{Bmatrix}_{k,AFPF} = [E]_k \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_L \\ \Delta \varepsilon_T \\ \Delta \gamma_{LT} \end{Bmatrix}_{k,AFPF} \quad (26)$$

E' così possibile infine calcolare le tensioni totali sommando le tensioni incrementali con le tensioni calcolate al momento della rottura della prima lamina (eq.16):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{Bmatrix}_{AFPF} = \begin{Bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{Bmatrix}_{FPF} + \begin{Bmatrix} \Delta \sigma_L \\ \Delta \sigma_T \\ \Delta \tau_{LT} \end{Bmatrix}_{AFPF} \quad (27)$$

A questo punto, per ciascuna lamina è possibile definire un secondo coefficiente di sicurezza $\eta_{k,AFPF}$. Poiché il carico applicato è somma di una aliquota costante (il carico di FPF) e di una aliquota variabile (l'incremento di carico $AFPF$), tale coefficiente di sicurezza va definito con riferimento all'incremento di tensione e non alla tensione totale. In altre parole esso è pari al rapporto tra l'incremento di carico che porta a rottura e l'incremento di carico considerato. Per esempio utilizzando il criterio della massima tensione si ha:

$$\eta_{k,AFPF} = \min \left[\frac{(\Delta \sigma_{ij,R})_k}{(\Delta \sigma_{ij,AFPF})_{k,z}}, (z = z_k, z_{k-1}) \right] = \min \left[\frac{(\sigma_{ij,R} - \sigma_{ij,FPF})_k}{(\Delta \sigma_{ij,AFPF})_k}, (z = z_k, z_{k-1}) \right] \quad (i, j = L, T) \quad (28)$$

Relazione formalmente simile si ha per il criterio della massima deformazione. Utilizzando invece il criterio di Tsai-Hill e tenendo conto della stessa definizione di coefficiente di sicurezza si scrive:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sigma_{L,FPF} + \eta_{k,AFPF} \Delta \sigma_L}{\sigma_{L,R}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{T,FPF} + \eta_{k,AFPF} \Delta \sigma_T}{\sigma_{T,R}} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_{L,FPF} + \eta_{k,AFPF} \Delta \sigma_L}{\sigma_{L,R}} \right) \\ & * \left(\frac{\sigma_{T,FPF} + \eta_{k,AFPF} \Delta \sigma_T}{\sigma_{T,R}} \right) + \left(\frac{\tau_{LT,FPF} + \eta_{k,AFPF} \Delta \tau_{LT}}{\tau_{LT,R}} \right)^2 = 1 \end{aligned} \quad (29)$$

Risolvendo la relazione quadratica (29) per $z=z_k$ e $z=z_{k-1}$, è possibile valutare per ciascuna lamina i due coefficienti di sicurezza $\eta_{k,AFPF,bot}$ e $\eta_{k,AFPF,top}$ e quindi l'effettivo coefficiente di sicurezza. Relazione formalmente simile si ha per il criterio di Tsai-Wu.

Determinato così il coefficiente di sicurezza di ciascuna lamina, la lamina che si romperà “per seconda” è ovviamente quella caratterizzata dal più basso coefficiente di sicurezza $\eta_{k,AFPF}$.

Indicando con η_{SPF} tale valore, cioè:

$$\eta_{SPF} = \min[(\eta_{k,AFP}(k = 1, \dots, n)] \quad (30)$$

l'incremento di carico corrispondente alla rottura della seconda lamina sarà quindi pari a:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \tilde{N} \\ \Delta \tilde{M} \end{Bmatrix}_{SPF} = \eta_{SPF} \begin{Bmatrix} \Delta \tilde{N} \\ \Delta \tilde{M} \end{Bmatrix} \quad (31)$$

Per ciascuna lamina si può così determinare mediante la teoria dei laminati lo stato di tensione e deformazione incrementale e quindi lo stato di deformazione e di tensione totale presente alla rottura della seconda lamina:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{Bmatrix}_{SPF} = \begin{Bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{Bmatrix}_{FPF} + \eta_{SPF} \begin{Bmatrix} \Delta \sigma_L \\ \Delta \sigma_T \\ \Delta \tau_{LT} \end{Bmatrix}_{AFP} \quad (32)$$

Dopo la rottura della seconda lamina, modificata opportunamente la corrispondente matrice di rigidezza, reiterando il procedimento incrementale si può determinare il carico che porta alla rottura la terza lamina e così via sino ad arrivare alla rottura completa del laminato.

Nella analisi post-FPF del laminato può succedere che dopo l'aggiornamento delle matrici del laminato successivo alla rottura della i -esima lamina, l'analisi incrementale mostri che ad una o più lamine compete un coefficiente di sicurezza negativo. Ciò evidentemente significa che la corrispondente lamina cede immediatamente dopo la rottura della lamina i -esima. È necessario pertanto eliminare tali lamine ed aggiornare ulteriormente le matrici di rigidezza del laminato. Ovviamente, se dopo la rottura della M -esima lamina tutte le rimanenti lamine presentano un coefficiente di sicurezza negativo, ciò indica la rottura completa del laminato, ovvero che il carico di rottura del laminato corrisponde al carico di rottura della M -esima lamina, cioè:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{M} \end{Bmatrix}_{rottura} = \begin{Bmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{M} \end{Bmatrix}_{MPF} = \begin{Bmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{M} \end{Bmatrix}_{FPF} + \sum_{i=2}^M \begin{Bmatrix} \Delta \tilde{N} \\ \Delta \tilde{M} \end{Bmatrix}_{iPF} \quad (33)$$

Determinati così il carico di inizio danneggiamento (FPF), i carichi corrispondenti alla rottura delle successive lamine e quindi il carico di rottura totale del laminato, è possibile confrontare questi con il carico di esercizio e quindi vedere se il carico di esercizio produce danneggiamento o meno e in questa ultima ipotesi quale è l'entità del danneggiamento prodotto (numero di lamine danneggiate). A tal proposito si osserva che il carico di rottura di un laminato è in genere molto superiore del carico di FPF cosicché per un buon sfruttamento del laminato è in genere necessario tollerare un certo danneggiamento dello stesso. D'altra parte se le lamine che si rompono per prima sono quelle trasversali (direzione delle fibre ortogonale al carico principale), allora alla rottura di queste segue solo una ridotta diminuzione delle performance del laminato sia in termini di rigidezza che di resistenza. Sperimentalmente è sovente difficile evidenziare per esempio la rottura trasversale della prima lamina dalla osservazione della rigidezza del laminato, visto il contributo molto piccolo dato dalla rigidezza trasversale di una singola lamina. Per questo in generale nella progettazione strutturale il coefficiente di sicurezza del laminato viene definito nei confronti della rottura piuttosto che nei confronti del danneggiamento della prima lamina. Nella verifica di resistenza a rottura il coefficiente di sicurezza del laminato risulta pari a:

$$\eta_{rott} = \frac{\left\{ \tilde{N} \quad \tilde{M} \right\}_{rottura}^T}{\left\{ \tilde{N} \quad \tilde{M} \right\}_{applicato}^T} = \frac{N_{x,rottura}}{N_{x,applicato}} = \frac{N_{y,rottura}}{N_{y,applicato}} = \dots \quad (34)$$

Solo nel caso particolare in cui non è tollerato alcun danneggiamento del laminato, si considera il coefficiente di sicurezza nei confronti del danneggiamento definito come il rapporto tra il carico di FPF ed il carico applicato:

$$\eta_{FPF} = \frac{\left\{ \tilde{N} \quad \tilde{M} \right\}_{FPF}^T}{\left\{ \tilde{N} \quad \tilde{M} \right\}_{applicato}^T} = \frac{N_{x,FPF}}{N_{x,applicato}} = \frac{N_{y,FPF}}{N_{y,applicato}} = \dots \quad (35)$$

Per una migliore comprensione del metodo di analisi, a titolo di esempio di seguito è riportata l'analisi di un laminato cross-ply soggetto a sforzo normale semplice allineato con una delle direzioni principali delle lamine.

7.4 Analisi di un laminato cross-ply

L'analisi di un laminato cross-ply può essere eseguita in modo semplificato mediante semplici considerazioni sulle modalità di cedimento delle lamine. In particolare, in presenza di sollecitazioni semplici è possibile determinare il carico di FPF ed il carico di rottura senza per questo dovere ricorrere alla teoria classica dei laminati.

7.4.1 Analisi del carico di FPF

Si consideri un laminato cross-ply costituito complessivamente da n lamine di cui l a 0° (allineate con il carico applicato) ed m a 90° , soggetto ad un carico di trazione semplice. Indicando con E_L ed E_T i moduli di Young longitudinale e trasversale di ciascuna lamina, il modulo di Young del laminato integro, detto modulo di Young primario E_p , si ottiene immediatamente tenendo conto che un laminato cross-ply è in pratica un sistema costituito da elementi elastici posti in parallelo, la cui rigidezza K è quindi somma delle rigidezze delle singole lamine, cioè:

$$E_p = \frac{K}{AL} = \frac{\sum_{i=1}^n E_i A_i L_i}{AL} = \frac{\sum_{i=1}^n E_i A_i}{A} = \frac{\sum_{i=1}^l E_L A_i + \sum_{i=1}^m E_T A_i}{n A_i} = \frac{E_L \cdot l + E_T \cdot m}{n} \quad (36)$$

avendo indicato con L la lunghezza del laminato e con A_i l'area della singola lamina.

All'aumentare del carico applicato il materiale esibisce un comportamento elastico lineare con pendenza della retta pari ad E_p (vedi fig.2), e ciò sino alla rottura delle lamine trasversali che sono evidentemente quelle "più deboli". Tenuto conto che tali lamine sono soggette in pratica ad uno stato pressoché monoassiale di tensione (trascurando gli effetti legati al diverso coefficiente di Poisson delle lamine a 0° e 90°), per l'individuazione del carico di rottura non è necessario ricorrere alla TCL in quanto la condizione di incipiente rottura si verifica allorquando la deformazione del laminato eguaglia il valore limite di rottura trasversale $\varepsilon_{T,R}$. Ciò si verifica quando la tensione del laminato è pari a σ_A (vedi fig.2) essendo:

$$\sigma_A = \sigma_{FPF} = E_p \varepsilon_{T,R} \quad (37)$$

7.4.2 Analisi post-FPF

Determinato così il carico di FPF, anche il carico di rottura del laminato (rottura delle lamine a 0°) può essere determinato in modo relativamente semplice. Nella ipotesi che tutte le lamine a 90° cedano contemporaneamente con rotture diffuse, il modulo di Young del laminato subisce una riduzione venendo meno il contributo (sovente piccolo ma non trascurabile) alla rigidità delle lamine a 90° . Il modulo di Young del laminato dopo la rottura delle lamine trasversali è indicato come modulo di Young secondario E_s del laminato. Applicando ancora la (32) e tenendo conto che le lamine rotte esibiscono un modulo di Young praticamente nullo, tale modulo vale:

$$E_s = \frac{E_L l + 0 * m}{n} = E_L \frac{l}{n} \quad (38)$$

In pratica il modulo di Young secondario E_s è eguale al modulo longitudinale delle lamine corretto della riduzione di area l/n . Dopo la rottura delle lamine trasversali la caratteristica del laminato è rappresentata da una retta con pendenza pari a E_s (vedi fig.2).

Nella ipotesi che le tensioni sopportate dalle lamine rotte non subiscono significativo rilassamento, cioè nella ipotesi che le lamine trasversali continuino a sopportare il carico che ne ha determinato la rottura, il legame tensioni deformazioni del laminato è rappresentato ancora da una linea retta con pendenza E_s che si diparte dal punto A (fig.2) ove la curva presenta un più o meno evidente ginocchio.

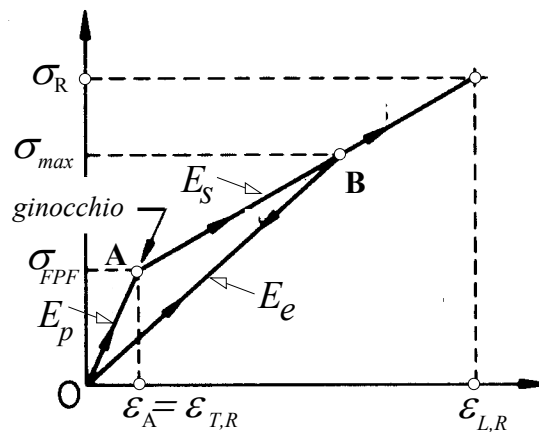


Fig.2 - Diagramma carico deformazione di laminato cross-ply

L'osservazione sperimentale mostra che tale condizione si verifica in presenza di rotture localizzate delle lamine e contestuali significativi fenomeni di “bridging” del carico. In pratica, come mostra la seguente fig.3, grazie alla levata rigidità della lamine a 0° il carico sopportato dalle lamine rotte localmente passa dalle lamine a 90° a quelle a 0° per poi passare nuovamente a quelle a 90° .

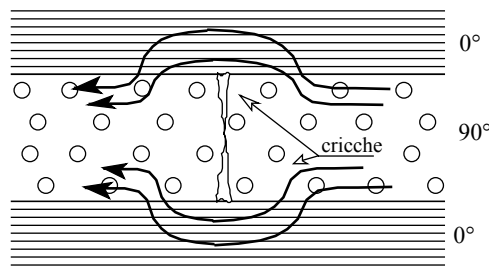


Fig.3 – Effetti di *bridging* in laminato cross-ply dopo rottura delle lamine trasversali.

Il carico sopportato dalle lamine a 90° rimane pressoché invariato oltre che per effetti di bridging, anche per eventuale scorrimento plastico della matrice. In alcuni laminati cross-ply tale scorrimento plastico coesiste con il “bridging” del carico.

Sovente le curve sperimentali non presentano un ginocchio marcato a causa del fatto che il cedimento risulta in qualche modo progressivo e caratterizzato da rotture localizzate che danno luogo ad un trasferimento progressivo del carico sul materiale adiacente, similmente a quanto avviene nella rottura di una singola fibra in una lamina unidirezionale soggetta a carico assiale: in presenza di una buona adesione fibra matrice in prossimità dell'estremità rotta il carico si trasferisce alle fibre adiacenti attraverso la matrice. Anche in presenza di scorrimento plastico la curva tensioni deformazioni può essere ben approssimata da una spezzata. In ogni caso pertanto la curva caratteristica del laminato, prima e dopo la rottura delle lamine trasversali, è lineare e si ha in particolare (vedi fig.2):

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\sigma}{E_p} && \text{per } \sigma \leq \sigma_{FPF} \\ \varepsilon &= \frac{\sigma_{FPF}}{E_p} + \frac{\sigma - \sigma_{FPF}}{E_s} && \text{per } \sigma > \sigma_{FPF}\end{aligned}\tag{39-40}$$

Per un laminato cross-ply il carico di *SPF* coincide in pratica con il carico di rottura delle lamine longitudinali ovvero con il carico di completa rottura del laminato. Al crescere del carico applicato la rottura delle lamine a 0° avverrà allorquando la deformazione longitudinale eguaglia la deformazione limite longitudinale $\varepsilon_{L,R}$ della singola lamina. La tensione di rottura σ_R è data quindi da (vedi fig.2):

$$\sigma_R = \sigma_A + E_s(\varepsilon_{L,R} - \varepsilon_{T,R}) = E_p \varepsilon_{T,R} + E_s(\varepsilon_{L,R} - \varepsilon_{T,R}) = E_s \varepsilon_{L,R} + (E_p - E_s) \varepsilon_{T,R}\tag{41}$$

Si noti che la (41) fornisce la tensione media presente nel laminato nelle condizioni di incipiente rottura e rappresenta la regola delle miscele. In particolare il primo termine dell'ultimo membro rappresenta il contributo delle lamine a 0° mentre il secondo termine rappresenta il contributo della lamine a 90° . Esplicitando i moduli di Young E_s ed E_p (eq.36,38) la (41) per un materiale fragile può essere scritta come:

$$\sigma_R = E_L \frac{l}{n} \varepsilon_{L,R} + E_T \frac{m}{n} \varepsilon_{T,R} = (E_L \varepsilon_{L,R}) \frac{l}{n} + (E_T \varepsilon_{T,R}) \frac{m}{n} = \sigma_{L,R} \frac{l}{n} + \sigma_{T,R} \frac{m}{n}\tag{41'}$$

che esprime appunto la regola delle miscele. Si osservi inoltre che se il caricamento del composito avviene secondo la spezzata OAB di fig.2, lo scaricamento dopo FPF non segue lo stesso percorso in quanto, come mostra l'osservazione sperimentale, esso avviene in modo lineare secondo la retta congiungente il punto B generico con l'origine del riferimento. In altre parole in fase di scaricamento il composito esibisce anche dopo FPF un comportamento elastico lineare con modulo di Young E_e pari a:

$$E_e = \frac{\sigma_B}{\varepsilon_B} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_A / E_p + (\sigma_{\max} - \sigma_{FPF}) / E_s} = \frac{E_s E_p}{E_p - (\sigma_{FPF} / \sigma_{\max})(E_p - E_s)}\tag{42}$$

La (42) mostra come il modulo di Young esibito dal laminato nel processo di scaricamento ed

eventuale ricaricamento dipende dal valore della massima sollecitazione applicata, ed in particolare decresce con questa.

Il comportamento post-FPF sopra illustrato è strettamente legato alla ipotesi fatta che le lamine trasversali sopportino il carico di rottura anche dopo il cedimento. Se invece al cedimento delle lamine trasversali segue il rilassamento totale delle corrispondenti tensioni, cosa che si verifica allorquando il legame tra le varie lamine è debole (bridging trascurabile) e il cedimento comporta rottura diffusa delle lamine, l'andamento della curva carico deformazioni dopo FPF risulta diverso. In particolare se la prova di trazione è eseguita in *controllo di carico* (carico crescente in modo monotono) al cedimento delle lamine trasversali segue un brusco aumento della deformazione a causa dell'istantaneo passaggio del carico sopportato dalle lamine trasversali a quelle longitudinali (percorso B di fig.4). La variazione istantanea della deformazione del laminato risulta pari a:

$$\Delta \varepsilon_{(B)} = \frac{\sigma_A}{E_s} - \frac{\sigma_A}{E_p} = \sigma_A \left(\frac{E_p - E_s}{E_s E_p} \right) = \varepsilon_{T,R} \left(\frac{E_p - E_s}{E_s} \right) \quad (43)$$

Se invece la prova è eseguita in *controllo di deformazione* allora al rilassamento delle lamine trasversali conseguente alla rottura si verifica una brusca diminuzione del carico applicato a causa della brusca diminuzione della rigidezza del laminato causata dal venir meno del contributo delle lamine trasversali rotte. (percorso C di fig.4). In questo caso la variazione della tensione presente globalmente nel laminato è pari a:

$$\Delta \sigma_{(C)} = \sigma_A - \sigma_C = E_p \varepsilon_{T,R} - E_s \varepsilon_{T,R} = \varepsilon_{T,R} (E_p - E_s) \quad (44)$$

Nella realtà operativa di un componente in laminato composito cross-ply possono pure verificarsi ovviamente condizioni intermedie tra le due situazioni limite di controllo di carico e controllo di deformazione (percorso D di fig.4).

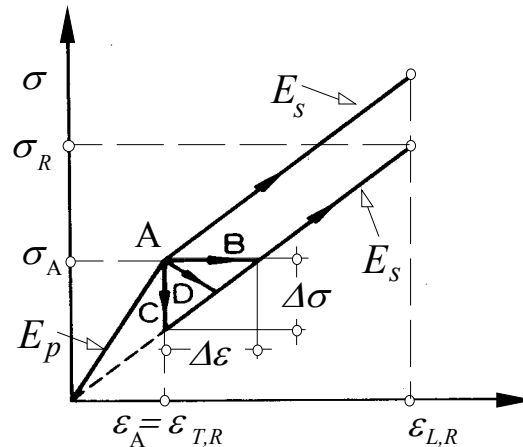


Fig.4 - Diagramma σ - ε di laminato cross-ply nel caso di rilassamento totale delle tensioni.

Ovviamente in ogni caso, poiché la rottura delle lamine annulla completamente il loro contributo alla sopportazione del carico, dopo il cedimento delle lamine trasversali il composito si comporta come costituito dalle sole lamine longitudinali.

Dopo la rottura delle lamine trasversali pertanto la curva tensioni deformazioni è rappresentata sia per caricamento che scaricamento dalla retta passante per l'origine ed avente inclinazione pari al modulo secondario del composito (vedi fig.4). È importante osservare come significativi effetti di bridging danno luogo ad una maggiore resistenza del laminato, in quanto ciò determina la

collaborazione della lamine trasversali. In presenza di bridging la tensione di rottura è data dalla (38) mentre in assenza di bridging la tensione di rottura per caricamento a controllo di carico o di deformazione è dato da (vedi anche fig.4):

$$\sigma_R = E_s \varepsilon_{L,R} \quad (45)$$

Il confronto della (45) con la (41) mostra appunto come in assenza di bridging la tensione di rottura del laminato diminuisce della quantità:

$$\Delta\sigma_R = (E_s - E_s) \varepsilon_{T,R} \quad (46)$$

che costituisce il contributo delle lamine trasversali.

A titolo di esempio la fig.5 mostra l'andamento teorico e sperimentale della curva tensioni-deformazioni di un laminato cross-ply in fibra di vetro e resina epossidica del tipo $[(0/90)_2]_S$ (laminato simmetrico in cui ciascuna metà è costituito da una sequenza $0^\circ/90^\circ$ ripetuta due volte, quindi complessivamente 8 lamine alternate).

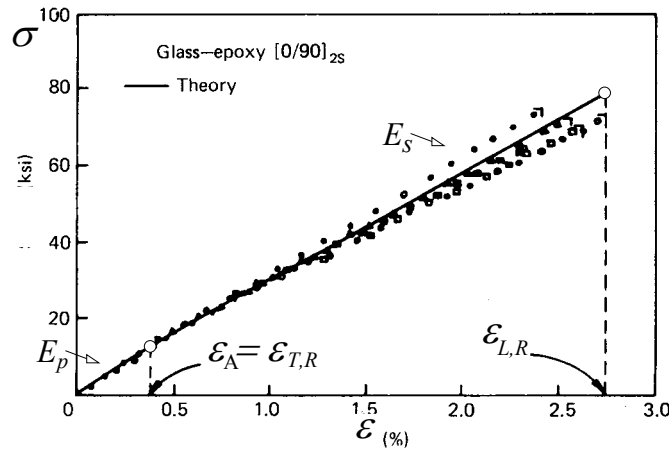


Fig.5 - Diagramma carico deformazione di laminato composito cross-ply $[0/90]_{2S}$

Dalla fig.5 si vede come per un tale laminato in corrispondenza della deformazione $\varepsilon_{T,R}$ non si ha in pratica un vero e proprio ginocchio della curva caratteristica essendo in realtà la rottura delle lamine trasversali progressiva e tenuto conto del forte legame interlaminare presente, essendo ciascuna lamina trasversale stretta da due lamine adiacenti longitudinali. Ciò dà luogo ad un ottimo accordo con l'ipotesi di assenza di rilassamento del carico supportato dalle lamine trasversali (rotture localizzate, ottimo bloccaggio operato dalle lamine longitudinali). È importante osservare come il carico di FPF risulta in pratica pari a circa il 18% soltanto del carico di rottura, mentre il modulo di Young secondario è in pratica molto vicino al modulo primario.

Diverso risulta essere il comportamento di un laminato cross-ply con sequenza di impacchettamento $[0/90_2]_S$ (laminato simmetrico in cui ciascuna metà è costituita da una lamina a 0° e due lamine a 90° , quindi complessivamente 6 lamine), come mostrato in fig.6

Rispetto al caso precedente si osserva ora un ginocchio più evidente con un incremento progressivo delle deformazioni (andamento sub-orizzontale) in prossimità del ginocchio. Ciò prova come il comportamento del laminato è pure significativamente influenzato dalla sequenza di impacchettamento che determina un minore o maggiore effetto di bloccaggio delle lamine trasversali.

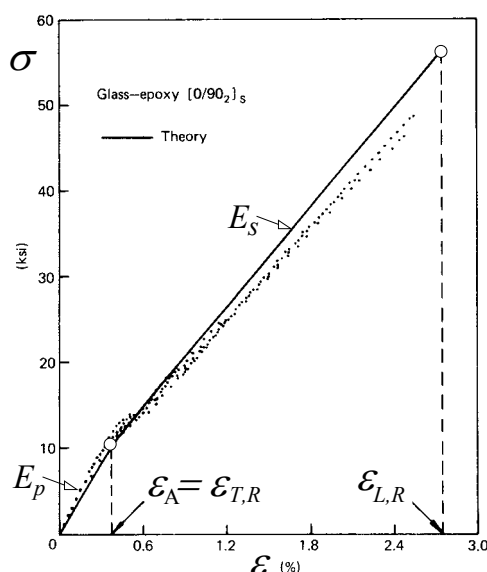


Fig.6 - Diagramma tensione-deformazione di laminato composito cross-ply $[0/90_2]_s$

Evidentemente la sequenza di impacchettamento $[0/90_2]_s$ che vede in pratica 4 lamine trasversali interposte tra due lamine di estremità, non dà luogo a significativi fenomeni di bridging e conseguentemente il comportamento reale si avvicina localmente a quello corrispondente al percorso OAB relativo al caricamento a controllo di carico illustrato in fig.4.

Si osserva inoltre anche in questo caso come la tensione di rottura $\sigma_R \approx 50$ kpsi, sia molto più elevata della tensione di FPF $\sigma_{FPF} \approx 13$ kpsi (cioè $\sigma_{FPF} \approx \frac{1}{4} \sigma_R$). Conseguentemente se si tiene il carico di esercizio al di sotto del carico di FPF, allora non è possibile sfruttare sufficientemente le capacità di resistenza del laminato. Per questo di solito nella progettazione dei laminati si tollera il danneggiamento delle lamine “trasversali” e si assume come condizione limite quella di rottura.

7.5. Analisi di laminati mediante codici di calcolo automatico

In base a quanto visto ai capitoli precedenti, si ha che il comportamento e la resistenza di un laminato, costituito da n lamine unidirezionali, possono essere valutati mediante:

- 1) calcolo sistematico delle proprietà di ciascuna lamina eseguito a partire dalle proprietà di matrice e fibre e relativa percentuale in volume (micromeccanica);
- 2) calcolo delle matrici caratteristiche del laminato tenuto conto di spessori, orientamento e sequenza di impacchettamento delle lamine;
- 3) analisi lineare del laminato mediante la teoria classica dei laminati e determinazione del carico di FPF (inizio del danneggiamento) mediante uso di un opportuno criterio di resistenza;
- 4) analisi incrementale iterativa del laminato e calcolo della sequenza di rottura delle lamine e quindi del carico di rottura del laminato mediante uso di un opportuno criterio di resistenza.

Tutto ciò può essere vantaggiosamente eseguito utilizzando uno strumento di calcolo automatico che consenta di introdurre, per ciascuna lamina, le caratteristiche di fibra e matrice e la percentuale relativa, lo spessore, l'orientamento e la sequenza di impacchettamento.

Esistono vari codici di calcolo espressamente realizzati per questo scopo, alcune dei quali sono dotati già di una libreria di materiali compositi commerciali e permettono allo stesso tempo la definizione di nuovi materiali (lamine) che possono anche essere memorizzati con un relativo nome che ne permette il richiamo e l'uso ogni volta che l'utente lo richiede. Ovviamente quando le caratteristiche della lamina sono stimate teoricamente mediante le formule della micromeccanica, è

bene ove possibile cercare di valutare l'attendibilità di tali stime per esempio confrontando queste con valori sperimentali di materiali simili. Si ricordi a tal proposito che le caratteristiche di resistenza longitudinali sono in genere stimate dalla micromeccanica in modo relativamente accurato mentre quelle trasversali possono essere influenzati da errori anche grossolani. Mentre infatti la resistenza longitudinale è fortemente legata alle proprietà delle fibre, quella trasversale dipende fortemente dalla interazione fibra-matrice e dalla bontà della adesione fibra-matrice, fenomeni che in generale non è possibile valutare accuratamente mediante metodi teorici.

Una volta valutate le caratteristiche di ciascuna lamina, il codice automatico seguendo le istruzioni date circa sequenza di impacchettamento, spessori delle lamine e carico applicato (meccanico, termico e/o legato a variazioni di umidità) è in grado di valutare, utilizzando le formule della teoria classica dei laminati, le tensioni e le deformazioni su ciascuna lamina. Scelto il criterio di resistenza, il codice di calcolo, seguendo la procedura sopra esposta, può infine in modo automatico valutare il carico di FPF, i valori di carico che portano alla successiva rottura delle altre lamine ed il carico di rottura finale del laminato.

I risultati forniti circa la sequenza di rottura delle lamine ed il carico di rottura del laminato consentono all'utente, specie in casi di sollecitazione semplice, di operare una successiva ottimizzazione del materiale in termini di lamine usate, orientamento e sequenza di impacchettamento.

7.6. Analisi post-FPF mediante metodo semplificato.

L'analisi lineare incrementale esposta al capitolo 7.3 per la determinazione del carico di rottura di un laminato, risulta relativamente laboriosa specie per laminati costituiti da un elevato numero di lamine. Inoltre, essa pone non pochi problemi legati alla corretta approssimazione delle matrici di rigidezza delle lamine danneggiate ed alle effettive interazioni tra le lamine integre e danneggiate. Ancora, per ottenere risultati attendibili sulla sequenza delle rotture è necessario avere delle buone stime della resistenza trasversale delle lamine, mentre in genere la teoria fornisce solo grossolane approssimazioni di tale parametro. Infine, al progredire del danneggiamento il calcolo può complicarsi in quanto si può passare da un laminato inizialmente simmetrico ed ortotropo ad uno danneggiato non simmetrico e/o non ortotropo.

Tenuto conto che per un laminato correttamente progettato la rottura definitiva corrisponde sempre alla rottura delle fibre (della lamina parallele al carico principale) successiva in generale al danneggiamento della matrice (es. rottura delle lamine ortogonali al carico), un approccio alternativo semplificato per la determinazione del carico di rottura del laminato che consente di evitare i sopra citati inconvenienti del metodo iterativo, consiste nella introduzione di un fattore di degrado f_d , compreso tra 0 e 1, utilizzato per tener conto del danneggiamento subito dalla matrice all'aumentare del carico applicato. In pratica il carico di rottura del laminato si valuta modificando le caratteristiche elastiche delle lamine influenzate significativamente dal danneggiamento della matrice, nonché i criteri di resistenza in modo da considerare solo la condizione di cedimento legata alla rottura delle fibre. In pratica le caratteristiche elastiche sono modificate assumendo:

$$E'_L = E_L; \quad E'_T = f_d E_T; \quad G'_{LT} = f_d G_{LT}; \quad v'_{LT} = f_d v_{LT}; \quad v'_{TL} = f_d v_{TL}; \quad (47)$$

mentre i criteri di resistenza si riducono alle sole relazioni che considerano il cedimento per trazione e compressione longitudinale delle lamine:

1) criterio della massima tensione:

$$\sigma_L < \sigma_{L,R}; \quad \sigma_L > \sigma'_{L,R}. \quad (48, 49)$$

2) criterio della massima deformazione:

$$\varepsilon_L < \varepsilon_{L,R}; \quad \varepsilon_L > \varepsilon'_{L,R}. \quad (50, 51)$$

3) criterio di Tsai-Hill:

$$\sigma_L < \sigma_{L,R}; \quad \sigma_L > \sigma'_{L,R}. \quad (52, 53)$$

4) criterio di Tsai-Wu

$$F_{LLL}\sigma_L^2 + F_{LL}\sigma_L < 1 \quad (54)$$

In queste condizioni, eseguendo una analisi lineare mediante TCL, il carico di rottura del laminato, indicato nella letteratura anglosassone anche con il simbolo P_{FF} (FF =fiber failure), si assume pari al carico che produce la rottura (delle fibre) della lamina caratterizzata dal più basso coefficiente di sicurezza.

In assenza di specifiche informazioni il valore del coefficiente di degrado f_d è solitamente assunto pari a 0.2-0.4; una stima accurata di esso può essere ottenuta, per data tipologia di laminato, confrontando i risultati teorici con quelli sperimentali.

Come il metodo incrementale, il metodo semplificato fornisce in genere risultati sufficientemente approssimati se il laminato è correttamente progettato, cioè se la percentuale di fibre in una data direzione è proporzionale alla entità del relativo carico applicato. Evidentemente per un laminato non correttamente progettato in cui la rottura può avvenire per cedimento della matrice, il metodo semplificato può dar luogo a grossolane sovrastime della resistenza. Ovviamente in questi casi occorre migliorare il lay-up del laminato piuttosto che ricorrere a metodi di analisi più accurati.

E' questo il caso per esempio di un laminato cross-ply soggetto a taglio (rottura per cedimento a taglio della matrice con fibre integre). Sebbene infatti lamine così disposte (0/90) sono in genere necessarie in un laminato, per migliorare la resistenza a taglio è necessario sempre aggiungere lamine disposte a $\pm 45^\circ$. In definitiva, per una buona progettazione è praticamente sempre necessario avere almeno un 10% delle lamine disposte a 0° , 90° e $\pm 45^\circ$. Il rimanente 70% può essere invece orientato opportunamente in funzione delle sollecitazioni prevalenti di esercizio.

7.7. Il criterio della massima deformazione delle fibre

Nessuno degli approcci sopra esposti per l'analisi dei laminati tiene in debita considerazione gli eventuali fenomeni di delaminazione né i fenomeni di interazione delle lamine in un laminato. Per una corretta analisi del laminato è pertanto in generale affiancare alle verifiche delle singole lamine una verifica alla delaminazione (tensione tangenziale interlaminare inferiore alla tensione di delaminazione), sebbene sovente è difficile avere stime attendibili della resistenza alla delaminazione di un generico laminato. Con riferimento invece alla interazione tra le lamine adiacenti, è utile osservare che la presenza di lamine variamente orientate fa sì che il danneggiamento della matrice di una lamina in genere non porta ad un diffuso danneggiamento della stessa in quanto localmente si verificano effetti di bridging che di fatto bloccano il progredire del danneggiamento stesso anche all'aumentare della entità del carico applicato. In definitiva pertanto un significativo danneggiamento del laminato si ha soltanto se si verifica rottura della fibre. Queste considerazioni portano al cosiddetto criterio della massima deformazione delle fibre, molto utilizzato per la sua semplicità in campo aeronautico. In pratica il criterio assume che la rottura del laminato si verifica allorquando la deformazione longitudinale di una o più lamine raggiunge il corrispondente valore che si ha in condizioni di incipiente rottura in una prova di trazione o compressione semplice della lamina. In altre parole la condizione di resistenza è

espressa:

$$\varepsilon'_{L,R} \leq \varepsilon_L \leq \varepsilon'_{L,R} \quad (55)$$

Per assicurare un ottimo concatenamento delle lamine, il criterio assume implicitamente che ad ogni lamina con orientamento θ ve ne sia almeno una adiacente con orientamento $\theta \pm 90^\circ$; conseguentemente la verifica di quest'ultima lamina può essere fatta in pratica utilizzando la deformazione trasversale della lamina con orientamento θ mediante la relazione:

$$\varepsilon'_{L,R} \geq \varepsilon_L \geq \varepsilon'_{L,R} \quad (55)$$

Poiché il criterio assume implicitamente

Una variante del criterio della massima deformazione delle fibre è il cosiddetto “truncated-maximum-strain criterion” che alle (55) aggiunge una ulteriore condizione di resistenza legata al cedimento per scorrimento. In particolare il metodo ipotizza che le direzioni principali del materiale coincidono con quelle delle deformazioni principali e pertanto il cedimento per scorrimento si verifica allorquando si ha:

$$|\gamma_{LT}| = \left| \frac{\varepsilon_L - \varepsilon_T}{2} \right| \geq \gamma'_{LT,R} = \max \left\{ \frac{\varepsilon_{L,R} - (-\nu_{LT} \varepsilon_{L,R})}{2}, \frac{\varepsilon'_{L,R} - (-\nu_{LT} \varepsilon'_{L,R})}{2} \right\} = \frac{(1 + \nu_{LT})}{2} \max \{ \varepsilon_{L,R}, \varepsilon'_{L,R} \} \quad (56)$$

Si osservi che il criterio non fa riferimento alla resistenza a taglio del materiale $\gamma_{LT,R}$ derivata da un apposita prova di taglio, ma con la (56), che fa riferimento ad una prova di trazione o compressione, tiene conto soltanto della interazione tra sollecitazioni longitudinali e trasversali che si ha allorquando queste hanno segno opposto. In presenza di sollecitazioni longitudinali e trasversali concordi, infatti, la (56) è superflua in quanto individua una condizione di rottura sempre meno restrittiva delle (55).

7.7. Carpet plots

La procedura di analisi dei laminati esposta ai capitoli precedenti, facente uso della TCL e di un opportuno criterio di resistenza, consente in generale di eseguire la verifica di un laminato generico (angle-ply, cross-ply ecc) una volta assegnate le principali caratteristiche del laminato e le sollecitazioni applicate. Essa invece non consente in generale di eseguire il progetto del laminato, neppure in presenza di sollecitazioni semplici. Evidentemente, la progettazione di un laminato è compito ben più complesso della progettazione di un elemento in materiale tradizionale (omogeneo ed isotropo). Essa infatti prevede la definizione di un certo numero di parametri quali principalmente:

- a) materiale di fibre e matrice;
- b) percentuale di fibre;
- c) orientamento delle lamine;
- d) sequenza di impacchettamento (lay-up);
- e) spessore del laminato (o n° di lamine totali fissato lo spessore della singola lamina);

In sintesi, i parametri di cui al punto a) sono strettamente legati alle specifiche esigenze e limitazioni del progetto quali per esempio, fattori ambientali, rigidità, resistenza, costo ecc; la percentuale di fibre è legata alle performance della lamina che si vuole ottenere ma anche ai relativi

costi sopportabili visto che il costo della lamina in genere aumenta con la percentuale di fibre. I parametri di cui ai punti c) e d) sono legati alla tipologia delle sollecitazioni applicate (monoassiali, biassiali ecc), al particolare tipo di laminato che si vuole ottenere (simmetrico, ortotropo ecc) nonché alle performance richieste in termini di resistenza statica, a fatica ecc (effetti di bridging, tensioni interlaminari ecc). Fissati i parametri a)-d) lo spessore del laminato è infine legato direttamente alla entità del carico di esercizio.

Nella maggior parte delle applicazioni industriali si utilizzano laminati simmetrici ortotropi con sequenza di impacchettamento del tipo:

$$[0_\alpha/90_\beta/\pm45_\gamma]_s \quad (57)$$

in cui α, β e γ indicano la percentuale di lamine aventi rispettivamente orientamento 0° , 90° e $\pm45^\circ$. Indicando con n_α , n_β e n_γ il numero di lamine a 0° , 90° e $\pm45^\circ$ si ha ovviamente:

$$\alpha = \frac{n_\alpha}{n}; \quad \beta = \frac{n_\beta}{n}; \quad \gamma = \frac{n_\gamma}{n}; \quad (58)$$

Evidentemente per $\gamma=0$ la (57) individua in particolare un laminato cross-ply; per $\beta=\gamma=0$ si ha invece un laminato unidirezionale.

Fissata così la sequenza di impacchettamento, tutte le caratteristiche elastiche e meccaniche del laminato possono essere legate a due di tali percentuali essendo:

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \quad (59)$$

E' possibile pertanto costruire dei diagrammi a curve di livello, indicati col termine *carpet plots* nella letteratura anglosassone, che forniscono immediatamente le principali caratteristiche elastiche e di resistenza globali del laminato al variare della percentuale di lamine disposte a 0° , 90° e $\pm45^\circ$. In particolare le caratteristiche elastiche globali del laminato sono definite considerando la piastra omogenea ortotropa equivalente. Il concetto di equivalenza è in questo caso legato al tipo di sollecitazione applicata.

Considerando per esempio un laminato ortotropo del tipo descritto dalla (44) soggetto a sollecitazioni di sforzo normale e/o taglio (assenza di sollecitazioni di flessione e/o taglio), confrontando la prima equazione costitutiva del laminato:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (60)$$

con l'equazione costitutiva di una piastra in materiale omogeneo ortotropo:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [E] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (61)$$

e tenuto conto della definizione delle caratteristiche di sollecitazione nonché della espressione della matrice di rigidezza estensionale nel riferimento globale xy del laminato (vedi cap.5), dalle (60) e (61) si ottiene immediatamente:

$$[E] = \frac{[A]}{h} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{\nu_{xy}E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ \frac{\nu_{xy}E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \quad (62)$$

Confrontando i termini delle due matrici si ottiene dopo semplici passaggi:

$$\nu_{xy} = \frac{A_{12}}{A_{22}}; \quad \nu_{yx} = \frac{A_{12}}{A_{11}}; \quad E_x = \frac{A_{11}}{h} \left(1 - \frac{A_{12}^2}{A_{11}A_{22}}\right); \quad E_y = \frac{A_{22}}{h} \left(1 - \frac{A_{12}^2}{A_{11}A_{22}}\right); \quad G_{xy} = \frac{A_{33}}{h} \quad (63-67)$$

Le (49-53) consentono la valutazione delle costanti elastiche del laminato a partire dalla matrice di rigidezza estensionale che nel caso in studio è legata alla percentuale di lamine α e γ dalla relazione:

$$[A] = \sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k S_k = h(\alpha[E] + (1-\alpha-\gamma)[\tilde{E}]_{90} + \frac{\gamma}{2}[\tilde{E}]_{45} + \frac{\gamma}{2}[\tilde{E}]_{-45}) \quad (68)$$

Fissato il tipo di lamina da utilizzare, le (63-67) insieme alla (68) consentono di diagrammare l'andamento delle costanti elastiche di E_x , E_y , ν_{xy} e G_{xy} del laminato al variare delle percentuali α e γ . A titolo di esempio nella seguente figura è rappresentato il carpet plot (diagramma a curve di livello) relativo al modulo di Young E_x di laminati in fibre di vetro-poliestere con $V_f=0.5$.

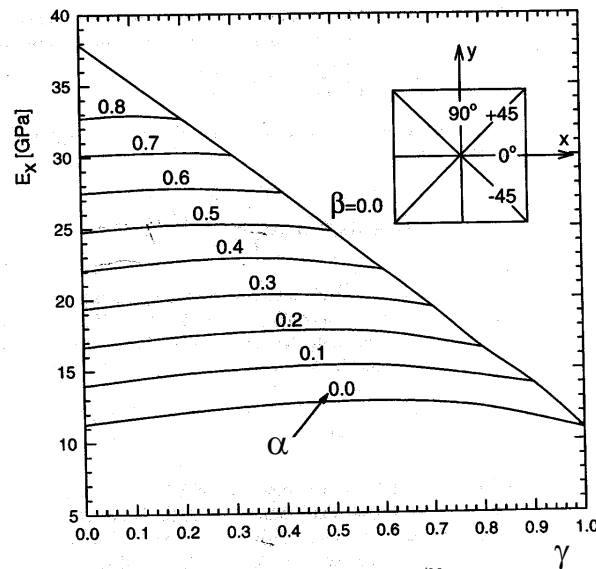


Fig.7 – Carpet plot del modulo di Young E_x di laminato in fibre di vetro-poliestere con $V_f=0.5$.

Si osserva come il modulo di Young subisce piccole variazioni con la percentuale di lamine a $\pm 45^\circ$. In altre parole la sostituzione di lamine a 90° con lamine a $\pm 45^\circ$ da luogo a variazioni del modulo di Young molto piccole. Come è noto infatti, il modulo di Young di una lamina a 45° è prossimo a quello di una lamina a 90° (vedi cap.4), cosicché il modulo di un laminato è legato essenzialmente alla percentuale α di lamine a 0° . Inoltre, il modulo di Young di laminati con $\beta=0$ (senza lamine a

90°) decresce in pratica linearmente all'aumentare della percentuale di lamine a $\pm 45^\circ$. Un tale diagramma permette per esempio di progettare a rigidezza un laminato soggetto a sforzo normale. Fissata infatti la rigidezza richiesta al laminato, il diagramma consente di determinare immediatamente lo spessore necessario. Per esempio se si vuole progettare un tirante che deve avere una lunghezza $l=1$ m, una larghezza di $L=0.1$ m ed una rigidezza $K=11$ MPa m, allora fissando una percentuale minima di lamine a $\pm 45^\circ$ pari al 20% (in modo da cautelarsi nei confronti di eventuali carichi trasversali e/o di taglio), cioè assumendo $\gamma=0.2$ e rinunciando all'uso di lamine trasversali ($\beta=0$) dalla fig.7 si ha che un tale laminato ha un modulo di Young $E_x=33$ GPa, per cui per avere una rigidezza di 11 MPa m il laminato deve avere uno spessore pari a:

$$K_x = \frac{E_x L s}{l} \Rightarrow s = \frac{K_x l}{E_x L} = \frac{11 * 1}{25 * 10^{-3} * 0.1} = 4.4 \text{ mm}$$

Il modulo di Young E_y di tali laminati si può rilevare immediatamente dallo stesso grafico di fig.7 semplicemente scambiando la percentuale α con la percentuale β . La contrazione laterale del puntone può valutarsi immediatamente a partire dal carpet plot relativo. Il coefficiente di Poisson del laminato può determinarsi immediatamente.

Nella seguente fig.8 è riportato il carpet plot del coefficiente di Poisson ν_{xy} e del modulo di elasticità a taglio di tali laminati.

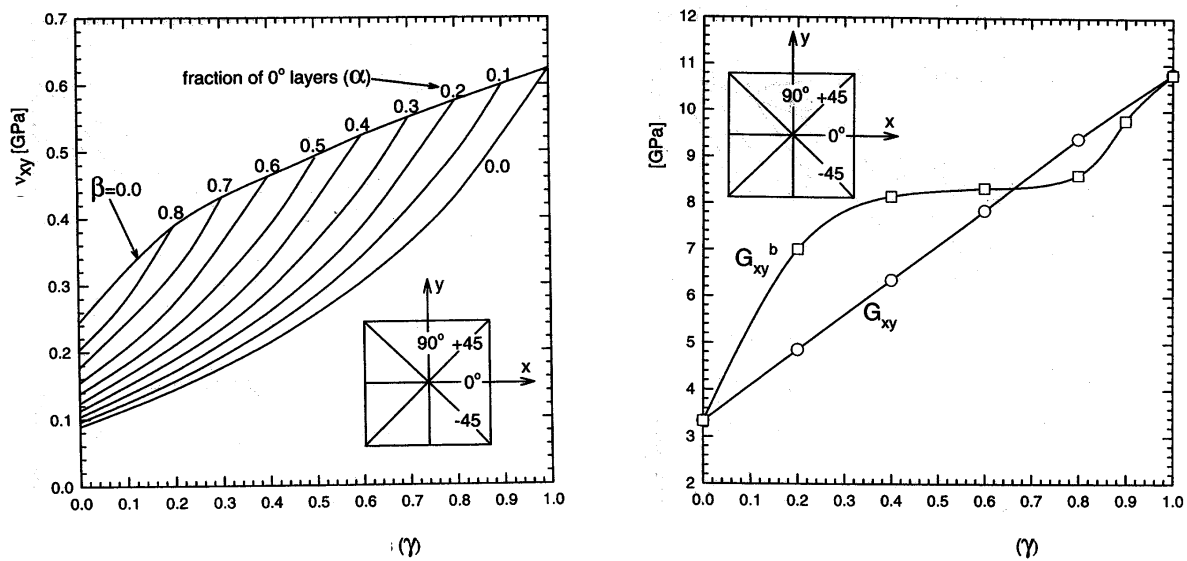


Fig.8 – Carpet plot del modulo di ν_{xy} (a) e di G_{xy} per laminati in fibre di vetro-poliestere con $V_f=0.5$.

Dalla fig.8a si vede come il coefficiente di Poisson di tali laminati varia in pratica da 0.1 a 0.6 circa e, come si comprende facilmente, cresce al crescere della percentuale di lamine a 0° e a $\pm 45^\circ$. Dalla fig.8b si osserva invece come il modulo trasversale G_{xy} varia tra 3.2 e 11 GPa circa per γ che va da 0 a 1, ed è in pratica funzione lineare della percentuale di lamine disposte a $\pm 45^\circ$. Si ha in questo caso una sola curva in quanto fissata la percentuale di lamine a $\pm 45^\circ$ la rigidezza a taglio non dipende ovviamente dalla percentuale relativa di lamine a 0° e 90° .

Nello stesso grafico di fig.8b è rappresentato il modulo di taglio che il laminato esibisce in presenza di sollecitazione torcente. Evidentemente le caratteristiche elastiche del laminato in presenza di flessione e/o torsione sono diverse da quelle che questo esibisce in presenza di sollecitazioni di sforzo normale e/o taglio. Considerando infatti una sollecitazione di flessione-torsione, confrontando la seconda equazione costitutiva del laminato:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (69)$$

con la corrispondente relazione valida per materiale omogeneo ortotropo:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{h^3}{12} [E] \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (70)$$

tenuto conto della espressione della matrice di rigidezza nel riferimento globale xy del laminato, dopo semplici passaggi si ottengono le caratteristiche elastiche del laminato in flessione (bending):

$$\nu_{xy}^b = \frac{D_{12}}{D_{22}}; \quad \nu_{xy}^b = \frac{D_{12}}{D_{11}}; \quad E_x^b = \frac{D_{11}}{h} \left(1 - \frac{A_{12}^2}{A_{11}A_{22}}\right); \quad E_x^b = \frac{D_{22}}{h} \left(1 - \frac{A_{12}^2}{A_{11}A_{22}}\right); \quad G_{xy}^b = \frac{D_{33}}{h} \quad (71-75)$$

Le (71-75) consentono la valutazione delle costanti elastiche globali del laminato in flessione-torsione a partire dalla matrice di rigidezza flessionale che nel caso in studio è legata alla percentuale di lamine α e γ dalla relazione:

$$[D] = \sum_{k=1}^{n\alpha} [E]_{0^\circ} (h_k^3 - h_{k-1}^3) + \sum_{k=1}^{n(1-\alpha-\gamma)} [\tilde{E}]_{90^\circ} \frac{(h_k^3 - h_{k-1}^3)}{3} + \sum_{k=1}^{n\gamma/2} [\tilde{E}]_{45^\circ} \frac{(h_k^3 - h_{k-1}^3)}{3} + \sum_{k=1}^{n\gamma/2} [\tilde{E}]_{-45^\circ} \frac{(h_k^3 - h_{k-1}^3)}{3} \quad (76)$$

Fissato il tipo di lamina da utilizzare, le (71-75) insieme alla (76) consentono di diagrammare l'andamento delle costanti elastiche del laminato in flessione al variare delle percentuali α e γ . A titolo di esempio nella seguente figura è rappresentato il carpet plot del modulo Young E_x^b e del coefficiente di Poisson ν_{xy}^b :

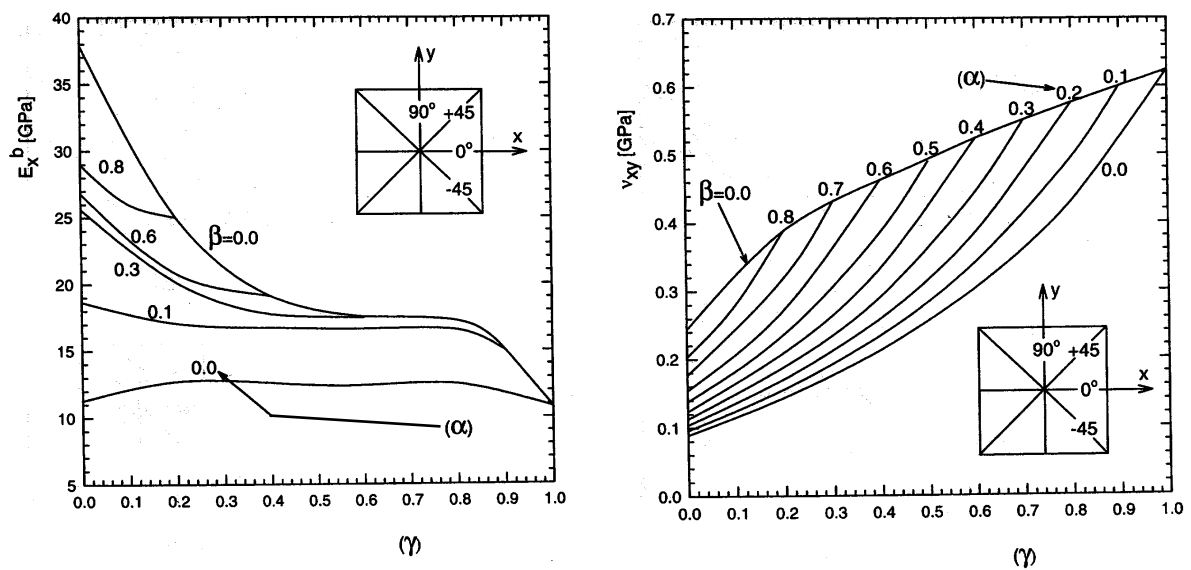


Fig.9 – Carpet plot del modulo di Young E_x^b (a) e del coefficiente di Poisson ν_{xy}^b (b) di laminato in fibre di vetro-poliestere con $V_f=0.5$.

Dalla fig.9a si vede come il modulo di Young del laminato in flessione varia sempre tra circa 10 e 40 GPa e cresce al crescere delle lamine a 0° mentre decresce al crescere della percentuale di lamine a 90° e a $\pm 45^\circ$. Come prima il modulo di Young E_x^b si ottiene dallo stesso grafico scambiando α con β .

Il coefficiente di Poisson in flessione (fig.9b) varia sempre tra 0.1 e 0.6 e cresce sempre al crescere della percentuale di lamine a 0° e a $\pm 45^\circ$, sebbene con legge diversa da quella relativa al caso di sollecitazione di sforzo normale (fig.9a).

Nella seguente fig.10 è riportato i carpet plots della tensione di FPF dei laminati sopra citati al variare sempre dei parametri α e γ . Tali grafici sono stati ottenuti mediante analisi lineare dei laminati soggetti a sollecitazione semplice di trazione (fig.10a) e compressione (fig.10b). Si osserva come la resistenza a trazione risulta pressoché indipendente dalla percentuale di lamine a $\pm 45^\circ$, ma dipende fortemente dalla percentuale di lamine a 0° . Evidentemente la tensione di FPF aumenta bruscamente al venir meno delle lamine a 90° ($\beta=0$, tratto verticale delle curve). Inoltre, per fissato valore di β in pratica la tensione di FPF aumenta linearmente al diminuire di γ . Simili considerazioni possono essere fatte considerando la resistenza a compressione (fig.10b).

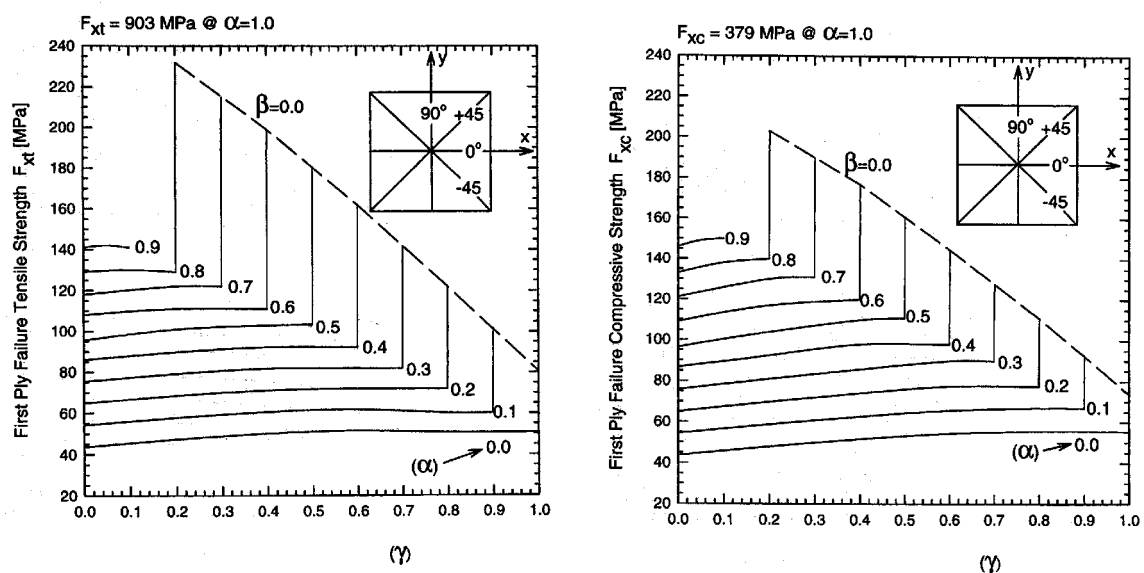


Fig.1

0 – Carpet plot della tensione di FPF in trazione (a) e compressione (b) di laminati in fibre di vetro-poliestere con $V_f=0.5$.

Nella seguente fig.11 sono invece riportati i carpet plots degli stessi laminati relativi alla tensione di rottura del laminato a trazione (fig.11a) e compressione (fig.11b). In questo caso si osserva un moderato aumento della resistenza all'aumentare della percentuale di lamine a $\pm 45^\circ$. La resistenza dipende comunque fortemente dalla percentuale di lamine a 0° .

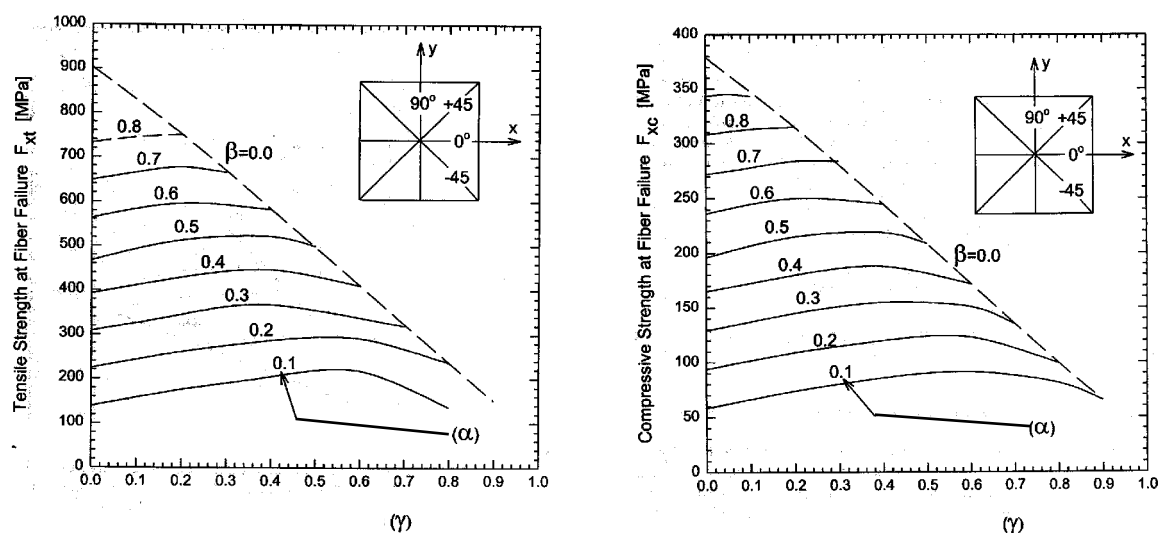


Fig.11 – Carpet plot della tensione di rottura in trazione (a) e compressione (b) di laminati in fibre di vetro-poliestere con $V_f=0.5$.

Nella seguente fig.12 è riportato infine il carpet plot della tensione di FPF e della tensione di rottura sotto sollecitazione di taglio. Ovviamente in questo caso le curve parametriche coincidono tutte in quanto ai fini della resistenza a taglio non vi è alcuna differenza tra lamine a 0° e lamine a 90° . In dettaglio, si osserva come per $\gamma > 0.2$ la resistenza a taglio aumenta pressoché linearmente con la percentuale di lamine a $\pm 45^\circ$.

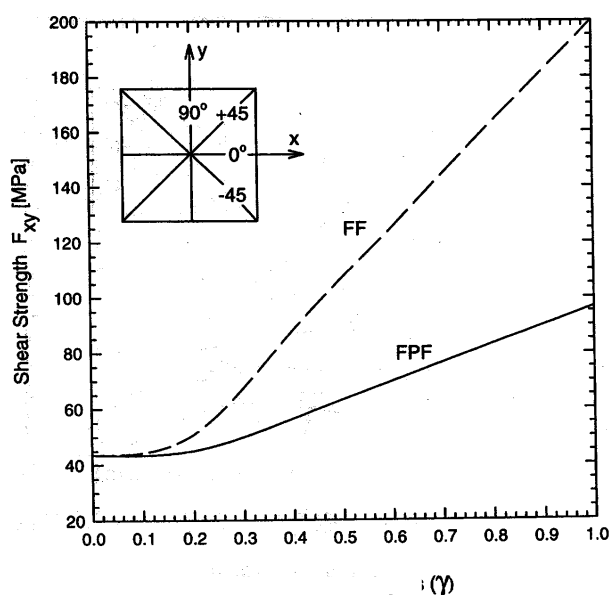


Fig.12 – Carpet plot della tensione di FPF e della tensione di rottura a taglio di laminati in fibre di vetro-poliestere con $V_f=0.5$.

Nelle seguente figura sono riportati inoltre i carpet plots relativi alla tensione di FPF e di rottura per sollecitazione di flessione (M_x).

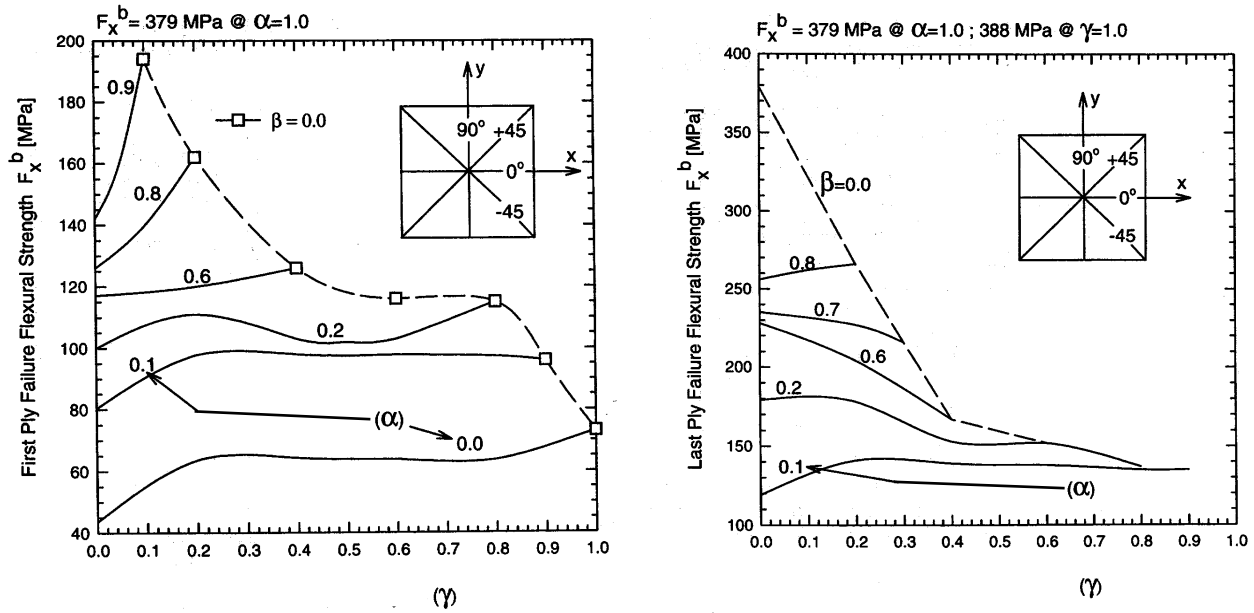


Fig.13 – Carpet plot della tensione di FPF (a) e della tensione di rottura a flessione (b) di laminati in fibre di vetro-poliestere con $V_f=0.5$.

La tensione di FPF e di rottura a flessione è definita con riferimento alla nota formula di Navier usata per i materiali omogenei ($F_x=6M_x/h^2$).

Nella figura 14 è riportato infine il carpet plot della tensione di FPF e di rottura per sollecitazione di torsione.

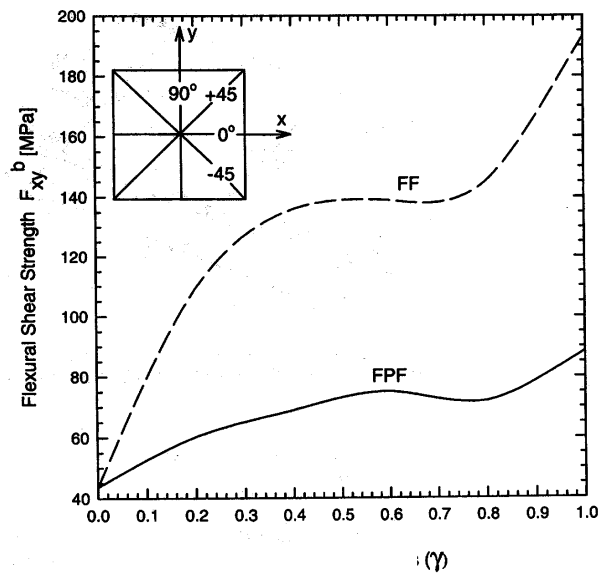


Fig.14 – Carpet plot della tensione di FPF (a) e della tensione di rottura a flessione (b) di laminati in fibre di vetro-poliestere con $V_f=0.5$.

Similmente al caso di flessione semplice, anche la tensione di FPF e di rottura a torsione è definita con riferimento alla formula $F_{xy}=6M_{xy}/h^2$