

FATICA IN CONTROLLO DI DEFORMAZIONE

1. Introduzione

Lo studio del comportamento a fatica in controllo di deformazione è iniziato negli anni '50, quando si sono rese disponibili macchine di prova servoidrauliche che permettono, tramite retroazione, di effettuare tali prove.

I primi lavori di in questo campo sono stati pubblicati da Manson e da Coffin, i quali, lavorando indipendentemente sul problema delle tensioni di origine termica, pubblicarono a brevissima distanza di tempo, nel 1954, due lavori analoghi che contenevano la relazione fra l'ampiezza della deformazione e la durata, relazione che va sotto il nome di equazione di Manson-Coffin e che è alla base degli studi in questo campo.

I concetti della fatica in controllo di deformazione, oltre a permettere lo studio di quanto avviene nella prima zona del diagramma di Wöhrer (fatica oligociclica) permettono di affrontare in modo diverso il problema della fatica anche in componenti che devono sopportare un numero elevato di cicli: l'idea base è che la nucleazione risulta essere un fenomeno di tipo plastico localizzato in una porzione di materiale il cui comportamento è determinato dalle deformazioni controllate dal materiale che lo circonda, il quale continua ad operare in campo elastico; questo è particolarmente evidente nel caso di componenti intagliati. Tale tipo di considerazioni ha portato alla definizione di un diverso approccio al problema della fatica detto approccio a due stadi.

Per affrontare il problema della fatica in controllo di deformazione è necessario affrontare in primo luogo lo studio del comportamento del materiale soggetto a tensioni e deformazioni superiori al limite elastico, sia con carichi statici, o meglio monotoni (§2), sia con carichi ciclici (§3, dove vi è anche una parte che riguarda il comportamento con carichi ciclici in campo elastico). Nel seguito è esposta la rappresentazione dei dati di fatica in controllo di deformazione ed infine l'approccio a due stadi.

2. Comportamento dei materiali con carichi monotoni

2.1 Tensioni e deformazioni ingegneristiche e razionali

Le caratteristiche monotone vengono normalmente ricavate tramite prove uniaxiali di trazione, eseguite con macchine di prova che impongono uno spostamento degli afferraggi, o meglio della traversa a cui uno dei due afferraggi è collegato; durante la prova viene rilavata la forza applicata (P) tramite una cella di carico e la deformazione tramite un estensometro con base di misura fissata (normalmente 50 mm)¹. La tensione applicata viene calcolata dividendo la forza per l'area iniziale del provino (A_0), e le deformazioni sono riferite alla base di misura dell'estensometro (L_0). Le tensioni e le deformazioni così calcolate vengono dette 'ingegneristiche', in quanto riferite alle grandezze iniziali e non a quelle istantanee:

¹ Le deformazioni non possono essere valutate in funzione dello spostamento imposto perché questo dipende anche dalle deformazioni della traversa. Peraltro non tutta la curva può essere valutata con l'estensometro che ha solitamente dei limiti di deformazione massima misurabile e potrebbe danneggiarsi al momento della rottura del provino.

$$S = \frac{P}{A_0} \quad e = \frac{\Delta L}{L_0}$$

Una tipica curva tensioni deformazioni ingegneristiche per un materiale duttile che presenta un evidente snervamento è riportata in Figura 1

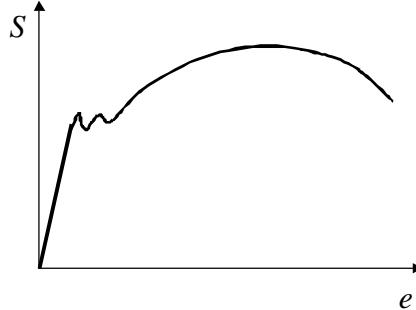


Figura 1: Curva tensioni deformazioni ingegneristiche

Si noti che l'abbassamento del carico in corrispondenza dello snervamento è dovuto alle modalità di prova adottate, cioè al fatto che viene imposto uno spostamento: la forza misurata dipende quindi dalla rigidezza del provino, che si abbassa al momento in cui supera lo snervamento. Nel caso in cui il provino fosse sottoposto ad una prova in cui è imposta una forza crescente² le oscillazioni della tensione non verrebbero più rilevate³. Proseguendo nella prova la tensione ingegneristica cresce fino ad un massimo per poi diminuire fino alla rottura: questo comportamento è dovuto alla strizione localizzata precedente la rottura che diminuisce in modo sensibile l'area trasversale, e quindi la rigidezza del provino.

Per ovviare a questo problema è possibile definire in modo diverso le tensioni e le deformazioni, riferendosi per le prime alla sezione corrente (A) e per le seconde agli allungamenti istantanei (L):

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \epsilon = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right)$$

tensioni e deformazioni che vengono indicate con vari nomi: ‘vere’ o ‘razionali’ o ‘naturali’; per le deformazioni si ha anche la dizione ‘logaritmiche’.

Può essere interessante conoscere il rapporto fra le grandezze ingegneristiche e quelle razionali: quando il materiale è completamente snervato si assume solitamente che esso si comporti come un fluido incompressibile, cioè che il volume non cambi (e, se isotropo, abbia un rapporto di Poisson pari a 0.5) cioè in formule:

$$A_0 L_0 = A L$$

da cui:

² Per visualizzare questa condizione si pensi ad un dispositivo di carico costituito da un contenitore che viene riempito con continuità da un flusso costante di acqua.

³ Esistono materiali in cui lo snervamento non si presenta in modo evidente anche in condizioni di spostamento imposto, ad esempio molte leghe leggere.

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{A_0} \frac{A_0}{A} = S \frac{L}{L_0} = S \frac{L_0 + \Delta L}{L_0} = S(1 + e)$$

$$\varepsilon = \ln \frac{\frac{A}{L}}{\frac{A_0}{L_0}} = \ln \frac{\frac{A_0 + \Delta A}{L_0}}{\frac{A_0}{L_0}} = \ln(1 + e)$$

Se le deformazioni sono piccole ($e < 0.02$), i valori ingegneristici e quelli veri sono praticamente coincidenti e questo spiega perché nelle condizioni abituali non venga fatta distinzione fra i due valori (anche a livello di simboli). Ovviamente la distinzione è importante per le grandi deformazioni.

In Figura 2 è riportato il confronto fra le curve vere e quelle ingegneristiche ottenute imponendo lo spostamento: si noti che con la curva tensioni deformazioni vere non vi è più il massimo corrispondente alla strizione della sezione. I valori massimi raggiunti prendono il nome di tensione razionale a frattura (σ_f) e deformazione razionale a frattura (ε_f).

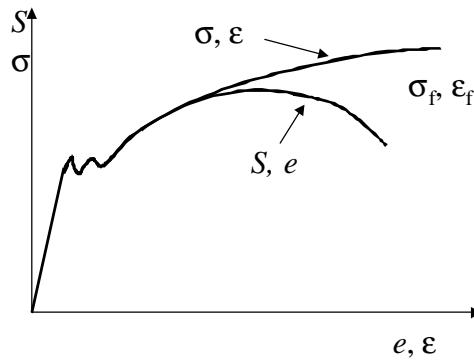


Figura 2: Confronto fra curve tensioni deformazioni ingegneristiche e vere (macchina di prova con spostamento imposto)

Quando si effettuano prove in cui è imposto il carico, situazione più simile a quelle normalmente riscontrate nelle strutture e nei componenti meccanici, utilizzando ad esempio macchine di prova servoidrauliche, le curve non presentano più un evidente snervamento (Figura 3).

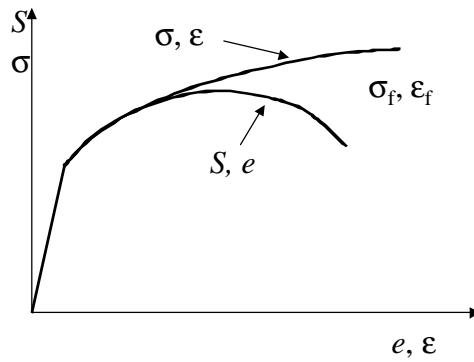


Figura 3: Confronto fra curve tensioni deformazioni ingegneristiche e vere (macchina di prova con carico imposto)

2.2 Comportamento in prove di carico-scarico

Quando una prova di trazione viene interrotta prima della rottura si ha un ritorno lungo

una retta parallela⁴ al tratto lineare elastico e a provino scarico si ha una deformazione permanente minore di quella totale. In pratica, data la deformazione totale, è possibile suddividerla in una componente elastica (ϵ_e) ed una plastica (ϵ_p):

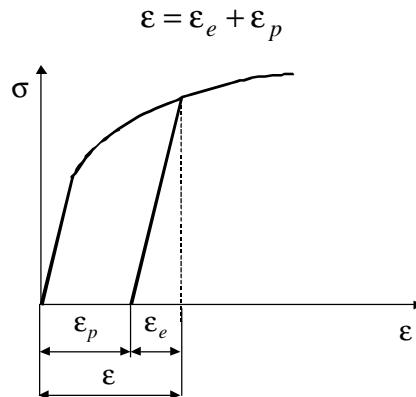


Figura 4: Deformazioni elastiche e plastiche

Se il provino viene nuovamente sollecitato in trazione questo presenta il comportamento schematicamente illustrato nella Figura 5: Si supponga che la fase di scarico inizi quando la tensione raggiunge il valore indicato con la lettera 'B', mentre lo snervamento sia avvenuto al livello 'A'; la successiva curva di carico segue quella di scarico fino al punto corrispondente alla tensione 'C' che risulta leggermente inferiore al livello 'B', ma superiore al livello 'A'; quindi si ha un innalzamento del limite apparente di snervamento. La curva poi ritorna a seguire quella originaria che si avrebbe se non vi fosse stato il ciclo di scarico. Questo comportamento è noto come 'effetto Bauschinger'.

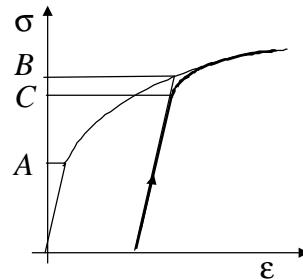


Figura 5: Effetto Bauschinger

La situazione relativa ad un provino che dopo lo scarico sia sottoposto ad una sollecitazione di compressione è illustrata nella Figura 6; la curva continua linearmente fino ad un livello di tensione (di compressione) 'D' che risulta, di norma, superiore al limite di snervamento a compressione del materiale vergine 'E'.

⁴ Nella realtà la curva di ritorno, come anche il primo tratto elastico, può essere non perfettamente lineare, ma tale non linearità è solitamente trascurabile.

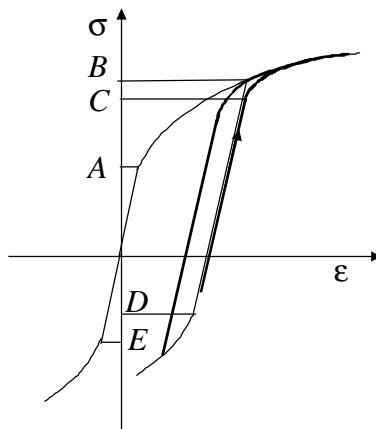


Figura 6: Comportamento in compressione

Se la fase di carico successiva allo scarico inizia prima del raggiungimento del livello ‘D’ il materiale segue nuovamente la retta di scarico fino al punto ‘C’, mentre se viene superato il limite ‘D’ la successiva fase di carico avviene su una curva che per un lungo tratto è parallela alla retta elastica (si noti che il comportamento non lineare inizia prima del raggiungimento del limite ‘C’).

Elastic shakedown

Il tipo di comportamento descritto può essere sfruttato per estendere il campo di funzionamento lineare in componenti che presentano gradienti di tensione (elastic shakedown). Un tipico esempio è quello dei recipienti in pressione, in cui le tensioni dovute alla pressione interna hanno un forte gradiente con tensioni più elevate al bordo interno⁵; il primo ciclo di carico viene eseguito ad una pressione superiore, entro certi limiti, a quella che porta il bordo interno a snervamento (tipicamente con deformazioni nominali comprese fra 1 e 2 volte quella corrispondente al primo snervamento). La situazione in un punto in cui è superato il limite elastico è illustrata in Figura 7. A causa di questa pressione una porzione relativamente piccola del materiale entra in campo plastico, mentre il resto della struttura rimane in campo elastico. Quando il recipiente viene scaricato il materiale rimasto in campo elastico tende a tornare nella condizione iniziale ($\varepsilon \rightarrow 0$), costringendo a fare altrettanto al materiale plastificato. Nella situazione di equilibrio (a pressione nulla) le deformazioni delle due zone dovranno essere congruenti, con una piccola deformazione permanente, ma con tensioni residue negative nella zona plastificata e positive (ma di entità minore) nella zona elastica. Ovviamente dopo il primo ciclo il componente ha subito una deformazione permanente.

⁵ Si veda ad esempio il libro di G. Genta ‘Calcolo di resistenza degli organi rotanti e dei recipienti cilindrici’, Levrotto & Bella, Torino, 1996

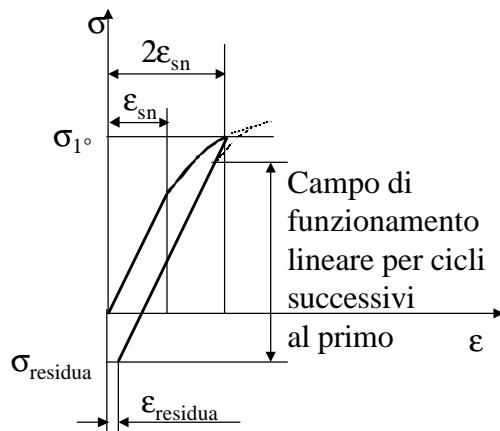


Figura 7: Elastic shakedown

Un primo effetto di questo trattamento è quindi quello di creare delle tensioni residue di compressione nelle zone dove solitamente si nucleano le cricche di fatica, tensioni che come abbiamo già visto sono benefiche rispetto alla resistenza a fatica; il secondo effetto è quello di permettere un comportamento lineare elastico anche con pressioni superiori a quelle che inducono il primo snervamento del materiale vergine, purché la pressione massima raggiunta non superi il nuovo limite di proporzionalità.

Un analogo fenomeno è sfruttato nelle molle a tazza, dove è previsto un primo ciclo di carico che porta la molla al completo appiattimento della molla stessa.

Ipotesi di Massing

Rimane ancora il problema di valutare l'andamento della curva $\sigma-\varepsilon$, in particolare il punto di snervamento inferiore (punto 'D' nella Figura 6). Per questo scopo può essere utilizzata l'ipotesi di Massing. Secondo tale ipotesi la curva di carico e scarico viene valutata con la seguente procedura, illustrata nella Figura 8:

- si considera il tratto di curva fra lo zero e la tensione massima applicata;
- tale curva viene copiata e ribaltata;
- gli estremi delle due curve vengono fatti coincidere;
- la curva viene espansa per un fattore 2 (in alternativa si riducono le scale degli assi di un fattore due e si sposta l'origine al centro della figura ottenuta).

Con tale costruzione è possibile stimare il punto di snervamento inferiore, ma bisogna fare attenzione al fatto che la zona lineare è minore di quella prevista a causa di quanto detto a commento della Figura 5. Non tutti i materiali peraltro presentano un comportamento approssimabile con questa regola.

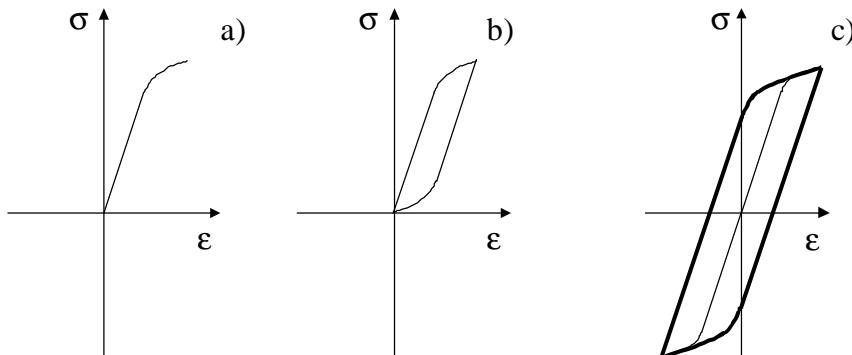


Figura 8: Applicazione della regola di Massing

2.3 Modelli matematici del comportamento monotono

Per lo studio dei materiali può essere utile definire dei modelli matematici del comportamento monotono dei materiali. Il modello più semplice è quello del comportamento elastico-perfettamente plastico, che approssima bene il comportamento di materiali particolarmente duttili (ad esempio gli acciai da stampaggio) ed è spesso utilizzato per calcoli di prima approssimazione in campo plastico. Un altro modello particolarmente semplice è quello bilineare. Entrambi questi modelli sono illustrati in Figura 9 (E = modulo di Young, E_t = modulo elastico tangente)

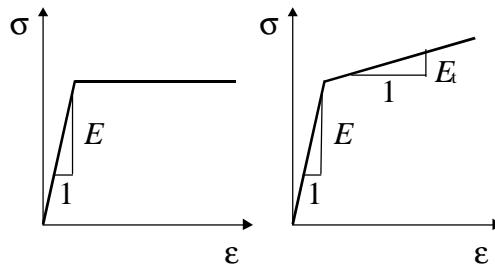


Figura 9: Modelli elastico-perfettamente plastico e bilineare

Per rappresentare l'effettivo andamento di molti materiali è però necessario utilizzare un modello più complesso (modello di Ramberg – Osgood): in molti casi la curva tensioni deformazioni plastiche vere tracciata su un diagramma doppio logaritmico risulta una retta ed è quindi possibile scrivere le seguenti equazioni:

$$\sigma = K \varepsilon_p^n \quad \varepsilon_p = \left(\frac{\sigma}{K} \right)^{1/n}$$

dove K = coefficiente di resistenza, n = esponente di incrudimento (il comportamento elastico perfettamente plastico corrisponde a $n=0$; quello bilineare a $n=1$ e $K = E_t$).

L'esponente d'incrudimento è l'inclinazione della curva nel diagramma doppio logaritmico, mentre il coefficiente di resistenza può essere calcolato considerando le grandezze a frattura:

$$K = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_{p,f}^n}$$

L'equazione dell'intera curva (parte plastica e parte elastica) risulta:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{K} \right)^{1/n}$$

2.4 Fattori di concentrazione in campo plastico

In campo elastico i fattori di concentrazioni delle tensioni sono definiti come rapporto fra la tensione massima e quella nominale nella zona intagliata. Tale definizione, a causa della linearità della curva tensioni deformazioni, è valida anche per le deformazioni, e il fattore di concentrazione è indicato anche come teorico:

$$K_t = \frac{S_{\max}}{S_{\text{nom}}} = \frac{e_{\max}}{e_{\text{nom}}}$$

In campo plastico è invece necessario considerare due distinti valori del coefficiente di

concentrazione, uno per le tensioni e l'altro per le deformazioni ed utilizzare le tensioni e le deformazioni razionali:

$$K_{\sigma} = \frac{\sigma_{\max}}{S_{\text{nom}}} \quad K_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{\max}}{e_{\text{nom}}}$$

Il problema che può presentarsi è quello di valutare le tensioni e le deformazioni razionali all'apice di un intaglio note le tensioni e le deformazioni nominali (elastiche) e il fattore di concentrazione delle tensioni. Per effettuare questo calcolo si possono seguire delle regole (dette anche regole di trasferimento) che sono illustrate nel seguito.

Regola lineare

L'ipotesi che viene fatta con questa regola è che il fattore di concentrazione delle deformazioni sia uguale a quello teorico delle tensioni, cioè:

$$K_{\varepsilon} = K_t \Rightarrow \varepsilon_{\max} = K_t e_{\text{nom}}$$

La tensione razionale corrispondente può essere calcolata con uno dei modelli indicati nel § 2.3. La regola è illustrata nella Figura 10.

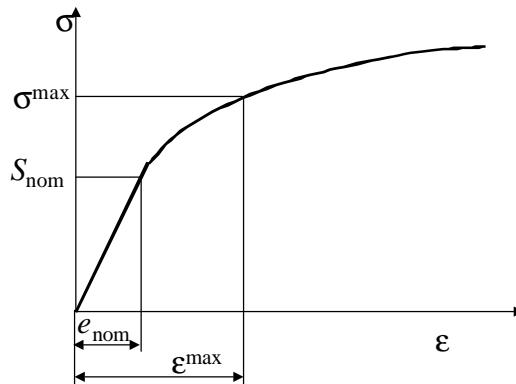


Figura 10: Applicazione della regola lineare

Regola di Neuber (1960)

La regola di Neuber prevede che il prodotto dei fattori di concentrazione delle deformazioni e delle tensioni sia costante sia in campo plastico sia in campo elastico:

$$K_{\varepsilon} \times K_{\sigma} = K_t^2$$

Partendo da questa ipotesi si ottiene:

$$\sigma_{\max} \times \varepsilon_{\max} = K_t^2 \times S_{\text{nom}} \times e_{\text{nom}}$$

che corrisponde nel piano σ, ε all'equazione di una iperbole che passa per il punto $(K_t S_{\text{nom}}, K_t e_{\text{nom}})$. I valori cercati si trovano, ad esempio, risolvendo il sistema:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} \times \varepsilon_{\max} &= K_t^2 \times S_{\text{nom}} \times e_{\text{nom}} \\ \varepsilon_{\max} &= \frac{\sigma_{\max}}{E} + \frac{K_t^2 S_{\text{nom}}}{E} \frac{1}{K_t^2} \end{aligned}$$

Graficamente la regola è illustrata nella Figura 11

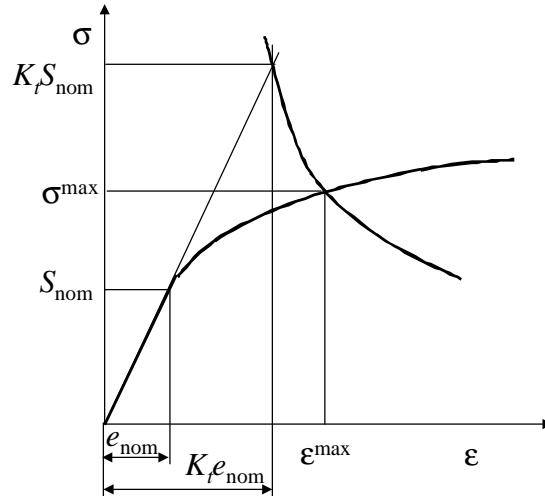


Figura 11: Applicazione della regola di Neuber

Experimentalmente la regola di Neuber dà risultati più aderenti alla realtà negli stati di tensione piana (ad esempio nel caso di piastre sottili), mentre la regola lineare sembra stimare meglio il comportamento che si ha in stati di deformazione piana (ad esempio negli alberi con intagli).

Si noti che spesso il campo di sollecitazione all'apice dell'intaglio viene calcolato numericamente con il metodo degli elementi finiti (FEM). In alcuni casi è difficile definire con esattezza la tensione nominale, e di conseguenza anche il valore del fattore di concentrazione delle tensioni, ma a parte le approssimazioni di calcolo si può sempre considerare che .

$$S^{\max} = K_t S_{\text{nom}} \quad e^{\max} = \frac{S^{\max}}{E}$$

La regola di Neuber porta quindi al seguente sistema:

$$\begin{cases} \sigma^{\max} \cdot \epsilon^{\max} = S^{\max} \cdot e^{\max} = \frac{(S^{\max})^2}{E} \\ \epsilon^{\max} = \frac{\sigma^{\max}}{E} + \left(\frac{\sigma^{\max}}{K} \right)^{1/n} \end{cases}$$

Graficamente la regola è rappresentata dalla Figura 12.

Regola di Glinka

Una ipotesi alternativa a quella di Neuber è stata proposta da GlinKa, che ha ipotizzato che il lavoro totale (per unità di volume) sia uguale sia considerando il materiale lineare sia con comportamento non lineare (ESED - Equivalent Strain Energy Density-Figura

$$13): \int_0^{\epsilon_{\max}} \sigma_{\max} d\epsilon_{\max} = \int_0^{K_t \epsilon_{\text{nom}}} K_t^2 \cdot S_{\text{nom}} d\epsilon_{\text{nom}} = \frac{1}{2} S^{\max} \cdot e^{\max}$$

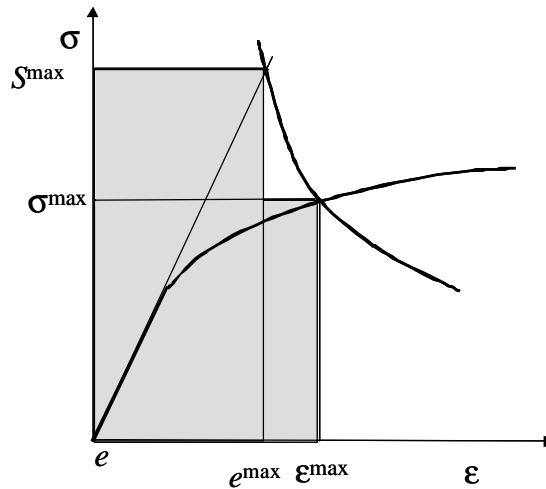


Figura 12: Applicazione della regola di Neuber con il FEM

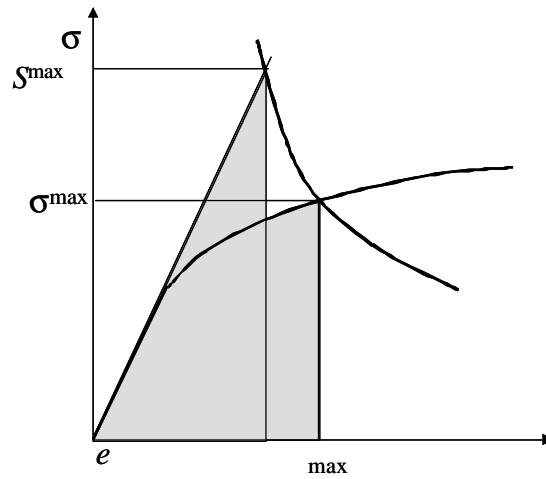


Figura 13: ESED - Equivalent Strain Energy Density

3. Comportamento dei materiali con carichi ciclici

Il comportamento del materiale quando viene sottoposto a carichi ciclici dipende, oltre che dal materiale stesso, dalla ampiezza dei cicli (in particolare se il ciclo è in campo lineare oppure no) e dalla modalità di applicazione dei carichi. Nel seguito si fa riferimento a sollecitazioni di tipo uniaxiale.

Le prove cicliche possono essere condotte tenendo sotto controllo i carichi, e quindi le tensioni, fra due estremi, misurando le deformazioni corrispondenti (cicli in controllo di carico), oppure limitando le deformazione fra due estremi e misurando l'andamento dei carichi da cui è possibile ricavare l'andamento delle tensioni (cicli in controllo di deformazione).

3.1 Comportamento ciclico in campo lineare; smorzamento interno

Quando un punto del materiale è sottoposto a cicli di carico alternato, anche quando non viene superato il limite elastico del materiale, vi è un certo ritardo fra l'applicazione della tensione e la conseguente deformazione.

La curva tensioni deformazioni non risulta più essere una retta ma descrive una traiettoria che in condizioni stabili risulta chiusa. Questa curva chiusa è detta ciclo di

isteresi e l'area racchiusa misura l'energia dissipata a causa dello smorzamento interno del materiale in un ciclo per unità di volume⁶. Tale energia in parte è utilizzata per effettuare lavoro a livello microstrutturale (ad esempio movimenti delle dislocazioni) ed in parte si trasforma in calore, con conseguente variazione della temperatura del provino.

Nella Figura 14 sono riportate a titolo di esempio alcune di queste curve nel caso di cicli alterni simmetrici; si può notare che l'area dei cicli d'isteresi aumenta con l'aumentare della sollecitazione massima.

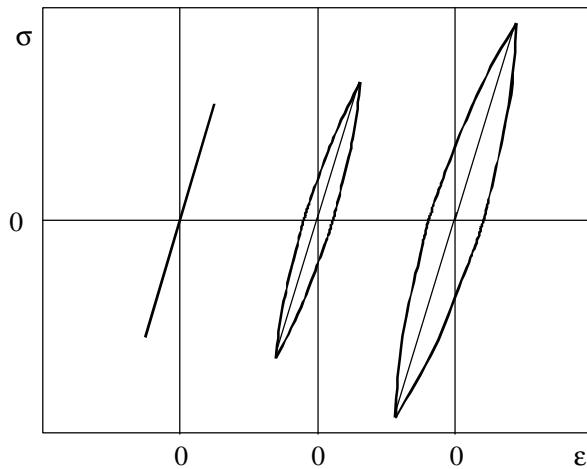


Figura 14: Esempi di cicli di isteresi in campo lineare (scale delle deformazioni espanso)

Per valutare matematicamente lo smorzamento interno si sostituisce, per semplicità, alla curva reale un'ellissi che racchiude un'area uguale (Figura 15) e si suppone che sia le tensioni sia le deformazioni abbiano andamento armonico ad ampiezza costante.

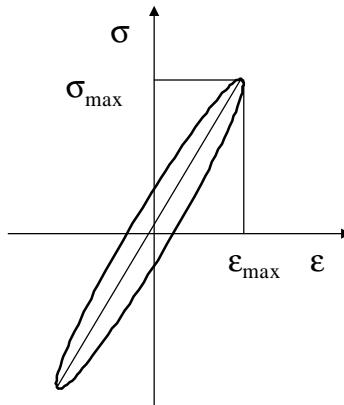


Figura 15: Ciclo di isteresi ellittico

Si suppone quindi che le equazioni descriventi le oscillazioni siano:

$$\sigma = \sigma_{\max} \sin(\omega t) \quad \epsilon = \epsilon_{\max} \sin(\omega t - \Phi)$$

⁶ In questo contesto si considera che lo smorzamento interno conglobi anche altri tipi di fenomeni, ad esempio quello termoelastico. Per maggiori dettagli si consiglia la lettura del capitolo III del testo di A. Audenino, L. Goglio, M. Rossetto "Metodi sperimentali per la progettazione". Levrotto & Bella, Torino, 1997

dove con Φ si è indicato il ritardo in fase della deformazione rispetto alla tensione applicata e con ω la pulsazione del ciclo ($\omega=2\pi f$). Si noti che si è considerato il ciclo alterno simmetrico, ma i ragionamenti seguenti sono validi qualunque sia il tipo di ciclo, purché si rimanga entro i limiti di proporzionalità.

L'energia dissipata durante il ciclo (D) si ottiene integrando in un periodo il prodotto tensione - deformazione⁷:

$$\begin{aligned} D &= \oint \sigma d\epsilon = \int_0^{2\pi} \sigma \frac{d\epsilon}{d(\omega t)} d(\omega t) = \\ &= \sigma_{\max} \epsilon_{\max} \left[\cos \Phi \int_0^{2\pi} \sin(\omega t) \cos(\omega t) d(\omega t) + \sin \Phi \int_0^{2\pi} \sin^2(\omega t) d(\omega t) \right] = \\ &= \sigma_{\max} \epsilon_{\max} \pi \sin \Phi \end{aligned}$$

L'energia dissipata è evidentemente una misura dello smorzamento interno, ma spesso vengono utilizzati altri parametri, fra cui lo *smorzamento relativo* (Ψ), definito come energia dissipata in un ciclo dallo smorzamento interno del materiale (D) e l'energia potenziale elastica accumulata alla massima ampiezza (T):

$$T = \frac{1}{2} \sigma_{\max} \epsilon_{\max}$$

da cui

$$\Psi = \frac{D}{T} = 2\pi \sin \Phi \approx 2\pi \Phi$$

Lo smorzamento relativo calcolato a partire dal ritardo di fase ha significato solo se la relazione fra le tensioni e le deformazioni massime è lineare, cioè quando il ciclo di isteresi può essere approssimato da un'ellisse con un semiasse molto più piccolo dell'altro. In tali condizioni è anche possibile scrivere:

$$\sigma_{\max} \cong E \epsilon_{\max}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sigma_{\max} \epsilon_{\max} \cong \frac{1}{2} E \epsilon_{\max}^2 \\ D &= \sigma_{\max} \epsilon_{\max} \pi \sin \Phi \cong \pi E \epsilon_{\max}^2 \sin \Phi \end{aligned}$$

Nel campo lineare è anche possibile legare lo smorzamento relativo al *decremento logaritmico* δ , cioè alla diminuzione in un ciclo del logaritmo naturale dell'ampiezza della deformazione nel caso di oscillazione libera. Si noti che in questo caso si esce dalle ipotesi di partenza (cicli stabili, cioè oscillazioni armoniche di ampiezza costante). Quando però lo smorzamento è piccolo la riduzione di ampiezza è piccola e quindi si può studiare il fenomeno come quasi stazionario ed è anche possibile confondere i differenziali e le differenze finite:

$$\delta = \Delta \ln(\epsilon_{\max}) = d \ln(\epsilon_{\max}) = \frac{d \epsilon_{\max}}{\epsilon_{\max}}$$

⁷ Le deformazione è sempre in ritardo sulla tensione; se la deformazione fosse in anticipo il ciclo di isteresi verrebbe percorso in senso antiorario e l'energia calcolata corrisponderebbe a quella che viene prodotta dal provino, cosa evidentemente assurda.

Il rapporto tra il decremento logaritmico e lo smorzamento relativo, nel campo lineare, risulta considerando che la variazione di energia potenziale elastica deve uguagliare l'energia dissipata ($dT = D$) ovviamente se non vi sono altre fonti di dissipazione:

$$\delta = \frac{d\epsilon_{\max}}{\epsilon_{\max}} = \frac{\frac{1}{2}E\epsilon_{\max}}{\frac{1}{2}E\epsilon_{\max}} \frac{d\epsilon_{\max}}{\epsilon_{\max}} = \frac{1}{2} \frac{d\frac{1}{2}E\epsilon_{\max}^2}{\frac{1}{2}E\epsilon_{\max}^2} = \frac{1}{2} \frac{dT}{T} = \frac{1}{2} \frac{D}{T} = \frac{\Psi}{2}$$

In alcuni campi, specie in quello delle vibrazioni, lo smorzamento è valutato tramite il fattore di smorzamento, definito come tangente del ritardo di fase. Quando il ritardo di fase è piccolo è possibile confondere la tangente con l'angolo e quindi:

$$\eta = \tan \Phi \approx \Phi \approx \frac{\Psi}{2\pi} \approx \frac{\delta}{\pi}$$

Lo studio dello smorzamento interno è importante per l'analisi delle vibrazioni, anche se altre forme di smorzamento dovute all'interazione delle strutture vibranti con l'esterno assumono spesso valori più elevati di quello dovuto allo smorzamento interno stesso.

A questo proposito bisogna ricordare che già i primi studi di O. Föppl negli anni '30 evidenziarono che il valore dello smorzamento interno, e di qualunque grandezza ad esso correlato, non dipende dalla frequenza con cui è percorso il ciclo (almeno in un vasto campo di frequenze) e deve quindi essere trattato diversamente dallo smorzamento viscoso nell'analisi delle vibrazioni, in quanto la forza smorzante dovuta allo smorzamento interno non è proporzionale alla velocità. Si parla in questo caso di smorzamento strutturale.

Lo smorzamento interno dipende in misura molto sensibile dall'ampiezza dell'oscillazione. In particolare molti studi hanno rilevato che lo smorzamento interno tende a stabilizzarsi quando l'ampiezza della sollecitazione è al di sotto del limite di fatica del materiale, mentre tende a crescere con continuità quando si supera tale limite. Al di fuori della linearità l'energia dissipata in un ciclo nel punto in considerazione, deve essere calcolato a partire dall'area del ciclo di isteresi rilevato, che come si vedrà più avanti, normalmente non è una ellissi.

I metodi di rilievo dello smorzamento interno, il suo andamento in funzione di altri parametri, come il valore medio della tensione, l'effetto di periodi di riposo e la sua correlazione con altre grandezze o processi di rottura, esulano dallo scopo di questo testo⁸.

3.2 Comportamento ciclico in campo plastico

Il comportamento ciclico del materiale in campo plastico è studiato applicando cicli di carico che variano fra due estremi, che possono essere fissi o variabili. Il caso più semplice è quello di un carico, variabile fra due estremi fissi, applicato ad un provino con distribuzione della tensione uniforme (trazione compressione). Si parla in questo caso di cicli in controllo di tensione ($\Delta\sigma = \text{costante}$); gli estremi della deformazione sono invece liberi di variare. Normalmente la deformazione è misurata tramite estensimetri (o estensometri) e il suo andamento registrato.

⁸ Si rimanda il lettore interessato, alla letteratura sull'argomento. Una sintesi è riportata nel secondo capitolo del libro di P.M. Calderale e A. Garro "Principi e metodologie della progettazione meccanica" Levrotto & Bella, Torino, 1990. Per i problemi relativi alla misura dello smorzamento interno si veda A. Audenino e P.M. Calderale "Measurement of non linear internal damping in Metals: processing of decay signals in uniaxial stress field", J of Sound and Vibration, 198, 4, 1996 – 395-409

Un'altra modalità possibile di applicazione delle sollecitazioni è quella in controllo di deformazione ($\Delta\epsilon$ = costante): in questo caso sono controllati gli estremi della deformazione ed è l'andamento del carico (e quindi della tensione) ad essere misurato e registrato. Si noti che per studiare il comportamento del materiale in questa modalità di applicazione delle sollecitazioni è necessario utilizzare macchine di prova (normalmente idrauliche) controllabili in retroazione, vale a dire che il segnale di inversione del carico applicato e dato da un apposito sensore (estensometro o estensimetro) che misura la deformazione.

Le usuali macchine di prova meccaniche, in cui è controllato lo spostamento della traversa, sono difficilmente utilizzabili in campo plastico, sia per la difficoltà di un controllo preciso (lo spostamento della traversa non dà solitamente indicazioni affidabili della deformazione realmente subita dal provino) sia perché le frequenze di utilizzo sono molto basse (dell'ordine di 1 Hz) a causa delle notevoli inerzie in gioco.

Quando si considera il comportamento di un componente soggetto a cicli in controllo di carico in cui in certo volume è in campo plastico, il fenomeno è determinato dal rapporto dei volumi di materiale in campo plastico ed elastico.

Se la zona plastificata è molto piccola il comportamento globale è sostanzialmente lineare e vi è proporzionalità fra i carichi applicati e le deformazioni; il materiale snervato di conseguenza è costretto a fare dei cicli fra due estremi di deformazione imposti dal materiale in campo elastico, pertanto la situazione per questo volume di materiale è analoga a quella di un provino in controllo di deformazione. Quando invece il volume snervato è sufficientemente grande il comportamento è simile a quello che si ha in un provino in controllo di tensione.

Cicli in controllo di tensione: accumulo di deformazione plastica

Il comportamento dei materiali in controllo di tensione non è molto studiato, anche a causa di oggettive difficoltà sperimentali dovute al fatto che piccoli errori sui carichi hanno grandi ripercussioni sull'entità delle deformazioni.

Un primo tipo di comportamento che può presentarsi, in realtà molto raramente, è quello dello stabilizzarsi di un ciclo di isteresi con deformazione media non nulla.

Molto più frequentemente, e sempre quando i cicli hanno una tensione media diversa da zero o cicli ad ampiezza variabile, si assiste ad un aumento della deformazione ad ogni ciclo. Tale fenomeno, illustrato in Figura 16, prende il nome di 'accumulo di deformazione plastica'; nella letteratura anglosassone prende il nome di 'ratcheting', o anche di 'cyclic creep'. La rottura avviene quando la deformazione raggiunge il valore della deformazione razionale a frattura (ϵ_f). Si noti che questa modalità di rottura è diversa dalla fatica, in quanto non si ha nucleazione e propagazione di una cricca.

Fenomeni di ratcheting sono stati osservati in prove di trazione - compressione, ma anche in provini soggetti a carico costante sottoposti a cicli termici (da cui il nome di *creep ciclico*). L'accumulo di deformazione plastica può avvenire anche in una direzione diversa da quella in cui è applicato il carico. Ad esempio, in provini soggetti a torsione alternata (in campo plastico) sono stati osservati fenomeni di accumulo di deformazione in direzione assiale, tale fenomeno è amplificato dall'applicazione di un carico medio di trazione.

Si noti che probabilmente tutti, direttamente o indirettamente, hanno inconsapevolmente sperimentato la rottura per accumulo di deformazione plastica: è infatti questo fenomeno che consente di rompere un filo di ferro a mani nude, semplicemente piegandolo ripetutamente (e la rottura non avviene per fatica oligociclica, come invece spesso si sente dire).

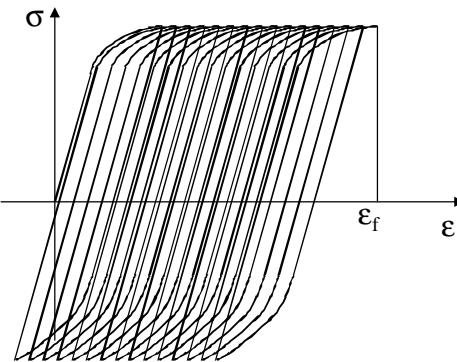


Figura 16: Accumulo di deformazione plastica ($\Delta\sigma = \text{costante}$, $\sigma_m = 0$)

Cicli in controllo di deformazione

Le prove in controllo di deformazione vengono normalmente condotte con $\Delta\epsilon$ costante e deformazione media nulla ($\epsilon_m = 0$) su provini di trazione compressione ($\emptyset \approx 10$ mm) mentre viene registrato l'andamento del carico nel tempo da cui si ricava con facilità l'andamento della tensione.

In queste condizioni vi sono tre possibili comportamenti (in funzione del tempo e dei cicli applicati) :

- 1) $\Delta\sigma(t)$ diminuisce fino ad un livello stabile: questo comportamento viene detto di addolcimento ciclico (cyclic softening).
- 2) $\Delta\sigma(t)$ aumenta fino ad un livello stabile: questo comportamento viene detto di incrudimento ciclico (cyclic hardening).
- 3) $\Delta\sigma(t)$ varia senza arrivare a stabilizzarsi. Questo è un evento raro che dipende dal materiale e da particolari condizioni esterne.

La Figura 17 illustra schematicamente le condizioni di hardening e softening ciclico.

In alcuni casi si ha prima un incrudimento e poi un addolcimento (o viceversa) prima di giungere alla stabilizzazione del ciclo. La stabilizzazione del ciclo può avvenire dopo un numero variabile di cicli, ma sperimentalmente si nota che tale condizione è raggiunta per un numero di cicli che è circa 1/3 del numero di cicli che porta a rottura il provino.

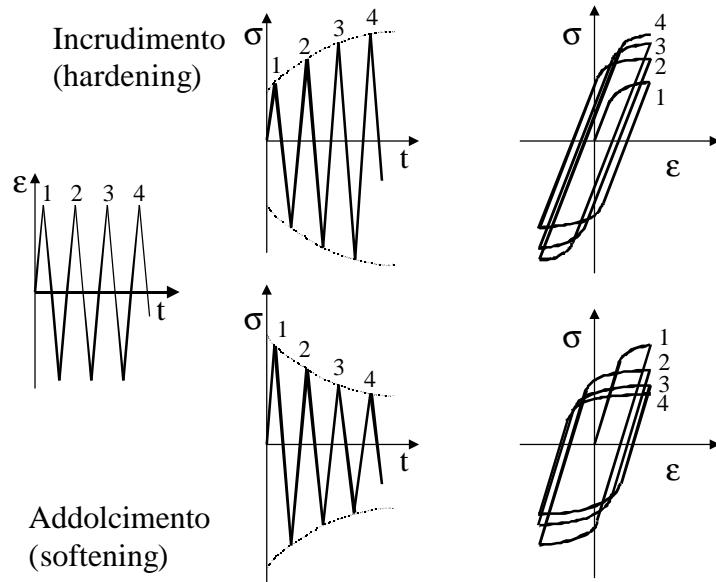


Figura 17: Incrudimento e addolcimento ciclico

Per ogni ciclo, e quindi anche in condizioni stabili, è possibile distinguere una componente elastica ed una plastica dell'ampiezza della deformazione (Figura 18):

$$\Delta\epsilon = \Delta\epsilon_e + \Delta\epsilon_p$$

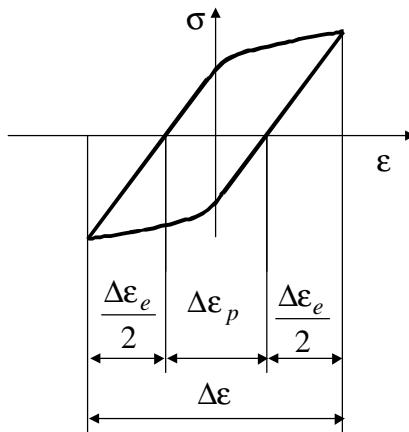


Figura 18: Ciclo di isteresi stabilizzato

L'ampiezza del ciclo stabilizzato dipende dalla ampiezza della deformazione imposta. Sovrapponendo le curve stabilizzate del materiale ottenute a diversi valori di $\Delta\epsilon$ e unendo i vertici dei cicli di isteresi si ottiene la cosiddetta "curva ciclica del materiale" o "curva ciclica $\sigma-\epsilon$ " (Figura 19).

Per ricavare la curva ciclica del materiale si possono adottare diversi metodi che forniscono risultati non del tutto equivalenti.

Con il metodo del "Multiple step test" viene utilizzata una provetta per ogni singolo livello di sollecitazione, mentre con il metodo dell' "Incremental step test" si utilizza una sola provetta soggetta a blocchi di sollecitazione $\Delta\epsilon$ crescenti o decrescenti.

Le differenze fra i vari metodi possono risultare più o meno sensibili in base al materiale che si sta provando.

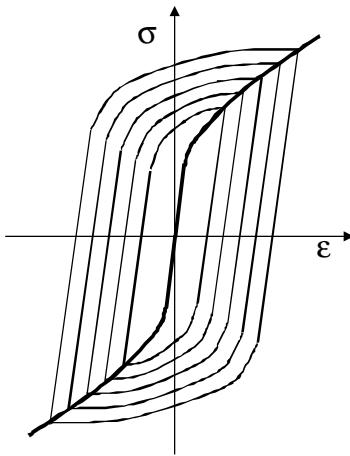


Figura 19: Curva ciclica (schematica)

Analogamente a quanto fatto per la curva monotona è possibile scrivere una equazione che lega la componente alterna della tensione e quella della componente plastica della deformazione:

$$\frac{\Delta\sigma}{2} = K' \left(\frac{\Delta\epsilon_p}{2} \right)^{n'}$$

$$\frac{\Delta\epsilon_p}{2} = \left(\frac{\Delta\sigma}{2K'} \right)^{1/n'}$$

dove K' = coefficiente ciclico di resistenza e n' = esponente di incrudimento ciclico. L'equazione dell'intera curva (parte elastica e parte plastica risulta quindi;

$$\frac{\Delta\epsilon}{2} = \frac{\Delta\epsilon_e}{2} + \frac{\Delta\epsilon_p}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2E} + \frac{\alpha \Delta\sigma}{2K'} \frac{1}{\epsilon^{1/n'}}$$

I materiali che incrudiscono ciclicamente presentano una curva ciclica che, se sovrapposta a quella monotona, è più alta di quest'ultima. Il contrario avviene per i materiali che subiscono un addolcimento ciclico (Figura 20).

Non bisogna confondere la curva ciclica del materiale con la curva monotona che si ottiene da un provino che ha subito dei cicli preventivi: quest'ultima curva (spesso valutata in compressione per eliminare l'effetto di eventuali cricche che possono essersi nucleate e parzialmente propagate a causa dei cicli applicati) hanno un andamento difficilmente prevedibile, ma che comunque dipende sia dall'ampiezza della sollecitazione sia dal numero di cicli effettuato.

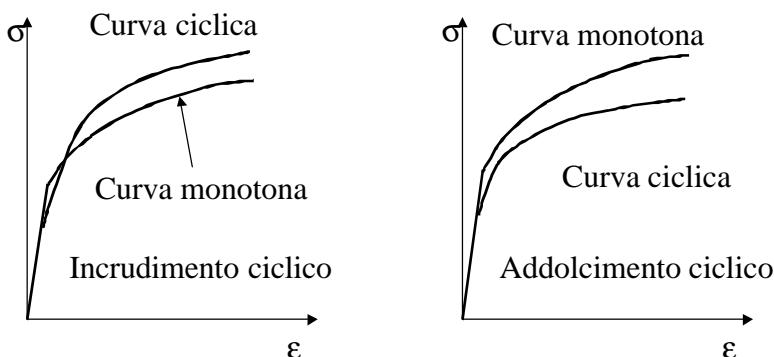


Figura 20: Esempi di curve cicliche confrontate con le relative curve monotone

4. Fatica in controllo di deformazione

4.1 Equazione di Manson Coffin

L'applicazione di cicli di carico in controllo di deformazione, come già per i cicli in controllo di tensione, porta alla rottura del provino per fatica, cioè per nucleazione e propagazione di una cricca.

In molti casi le prove vengono interrotte senza che si giunga alla rottura del provino; i criteri di fine prova, cioè i criteri di cedimento del provino utilizzati sono infatti:

- la rottura del provino (per frattura fragile)
- la individuazione di una cricca con controllo visivo (o con metodi non distruttivi)
- il decadimento del carico (tipicamente del 20%) misurato, decadimento dovuto alla presenza della cricca che diminuisce la rigidezza del provino

In tutti i casi il cedimento avviene quando la cricca che si è formata raggiunge una dimensione ‘ingegneristica’ normalmente compresa fra 0.5 e 5 mm (con provini di diametro 10 mm), tipicamente 1 mm.

L’equazione che lega la durata del provino con il campo di deformazione applicato può essere ricavata considerando che la l’ampiezza della deformazione totale può essere suddivisa in una componente elastica e una plastica:

$$\frac{\Delta\epsilon}{2} = \frac{\Delta\epsilon_{el}}{2} + \frac{\Delta\epsilon_{pl}}{2}$$

Per la parte elastica si ricorre alla relazione lineare in un diagramma doppio logaritmico fra le tensioni applicate e la durata proposta da Basquin nel 1910:

$$\sigma_a = AN^b$$

Tale relazione può essere riscritta come:

$$\frac{\Delta\sigma}{2} = \sigma'_f (2N)^b$$

L’equazione di Basquin considera tensioni in campo elastico, quindi l’equazione può essere estesa a tutto il campo (elastico e plastico) come relazione fra la componente elastica della deformazione e la durata:

$$\frac{\Delta\epsilon_{el}}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N)^b$$

dove σ'_f = coefficiente di resistenza a fatica, b = esponente di resistenza a fatica, e viene considerato il numero di alternanze (2N) al posto al posto di quello dei cicli⁹ per quanto riguarda la componente plastica, Manson e Coffin, lavorando indipendentemente sul problema della fatica termica (cioè delle sollecitazioni dovute a cicli di temperatura) trovarono nei primi anni ‘50 che la relazione fra l’ampiezza della deformazione plastica del ciclo stabilizzato e il numero di alternanze risulta anch’essa una retta in un diagramma doppio logaritmico:

$$\frac{\Delta\epsilon_{pl}}{2} = \epsilon'_f (2N)^c$$

dove ϵ'_f = coefficiente di duttilità a fatica e c = esponente di duttilità a fatica.

La relazione fra la deformazione applicata totale e la durata può quindi essere scritta come:

$$\frac{\Delta\epsilon}{2} = \frac{\Delta\epsilon_{el}}{2} + \frac{\Delta\epsilon_{pl}}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N)^b + \epsilon'_f (2N)^c$$

detta equazione di Manson –Coffin; tale equazione risulta essere un modello a 4 parametri della curva di fatica valido sia nella zona oligocilica sia nella zona a termine; il corrispondente grafico è riportato in Figura 21.

⁹ Nel campo della fatica oligociclica si preferisce utilizzare le alternanze, cioè del numero di cambi di pendenza della storia di carico, anziché il numero di cicli perché sono più facilmente individuabili in una storia di carico complessa e permettono una migliore risoluzione della curva; ovviamente in ogni ciclo vi sono due alternanze per cui N cicli corrispondono a $2N$ alternanze

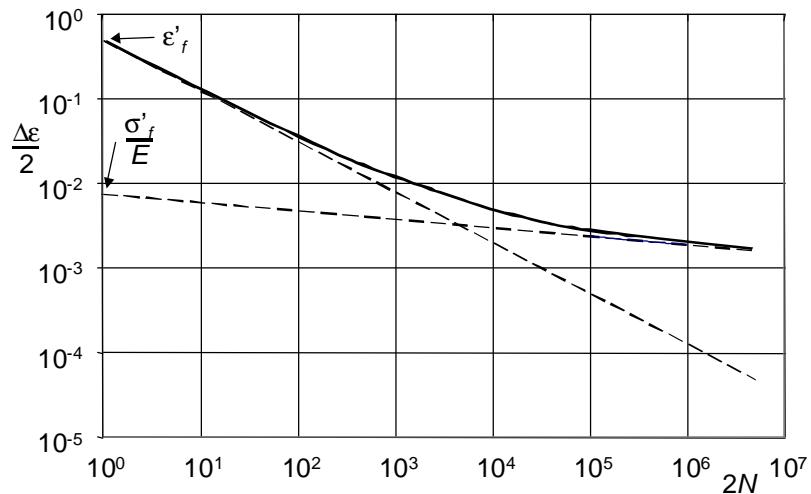


Figura 21: Curva di Manson - Coffin

Convenzionalmente il passaggio dal campo della fatica oligociclica a quello della fatica a termine viene individuati imponendo l'uguaglianza delle deformazioni plastiche ed elastiche, cioè dal punto in cui le due rette si intersecano:

$$\frac{\Delta\epsilon_{pl}}{2} = \frac{\Delta\epsilon_{el}}{2}$$

e il corrispondente numero di alternanze viene detto vita a transizione ($2N_T$); tale valore è facilmente calcolabile essendo:

$$\frac{\sigma'_f}{E} (2N_T)^b = \epsilon'_f (2N_T)^c$$

da cui

$$2N_T = \frac{\epsilon'_f \times E \times \sigma'_f^{-b/c}}{\epsilon'_f - \sigma'_f^{-b/c}}$$

Gli acciai presentano tutti un valore della vita a transizione molto simile, compreso fra 10^3 e 10^5 alternanze.

Solitamente i materiali che hanno un comportamento migliore nel campo della fatica oligociclica presentano una minore resistenza oltre la vita a transizione (materili duttili). I materiali che si comportano in modo opposto sono detti ‘resistenti’ e quelli che hanno un comportamento intermedio sono detti ‘tenaci’ (Figura 22)

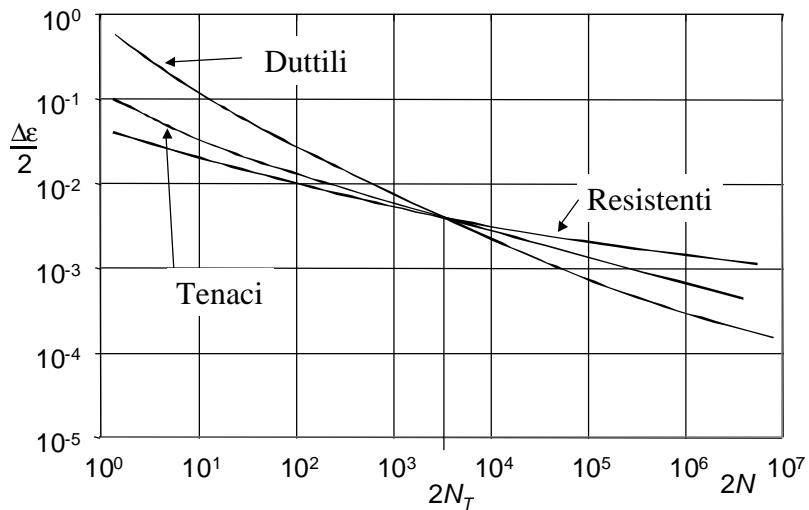


Figura 22: Schema del comportamento di materiali diversi

4.2 Determinazione sperimentale dell'equazione di Manson Coffin

I valori dei quattro coefficienti incogniti (σ'_f , b , ε'_f , c) sono ricavati interpolando linearmente (con estrappolazione a $2N=1$) i dati sperimentali, avendo registrato il ciclo d'isteresi stabilizzato per ognuno dei valori di $\Delta\varepsilon$ a cui vengono condotte le prove al fine di separare la componente elastica e quella plastica (si veda la Figura 18).

Si noti che la prima alternanza corrisponde ad una prova di trazione monotona, e quindi in prima approssimazione si può pensare che i valori iniziali siano uguali a quelli statici, cioè dovrebbe essere $\sigma'_f = \sigma_f$ e $\varepsilon'_f = \varepsilon_f$, ma in realtà questo non avviene perché questi valori vengono ricavati con una estrappolazione e si deve tenere conto della diversità fra la curva monotona e quella ciclica del materiale, per cui il legame fra caratteristiche statiche e a fatica non è immediato e può variare a causa dell'incrudimento o dell'addolcimento ciclico.

I risultati sperimentali indicano i seguenti campi di variazione dei parametri ottenuti sperimentalmente:

$$\varepsilon'_f = 0.35 \pm 1 \times \varepsilon_f$$

$$\sigma'_f \gg \sigma_f$$

mentre per gli esponenti i dati sperimentali mostrano i seguenti campi di variazione:

$$b = -0.5 \pm -0.7 \quad (\text{valore rappresentativo} - 0.6)$$

$$c = -0.06 \pm -0.14 \quad (\text{valore rappresentativo} - 0.1)$$

In realtà i quattro parametri non possono essere indipendenti, infatti devono essere soddisfatte contemporaneamente l'equazione della curva ciclica, l'equazione di Basquin e l'equazione di Manson

$$\frac{\Delta\sigma}{2} = K' \frac{\Delta\varepsilon_p}{2} \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\sigma}}$$

$$\frac{\Delta\sigma}{2} = \sigma'_f (2N)^b$$

$$\frac{\Delta\varepsilon_{pl}}{2} = \varepsilon'_f (2N)^c$$

Combinando queste tre equazioni risulta:

$$\sigma'_f (2N)^b = K' \left(\varepsilon'_f (2N)^c \right)^{n'}$$

ed estrapolando a $2N=1$ si ottiene:

$$\sigma'_f = K' \varepsilon'^{n'}_f \quad \text{P} \quad K' = \frac{\sigma'_f}{\varepsilon'^{n'}_f}$$

Utilizzando questa relazione si può quindi scrivere

$$K' \varepsilon'^{n'}_f (2N)^b = K' \varepsilon'^{n'}_f (2N)^{cn'} \Rightarrow b = cn' \Rightarrow n' = \frac{b}{c}$$

La forma utilizzata da Manson per descrivere il comportamento oligociclico dei materiali risente del fatto che negli anni '50 erano poco conosciute, o erano difficilmente applicabili a causa della limitatezza dei mezzi di calcolo, tecniche di interpolazione non lineare; il modello proposto aveva il vantaggio di richiedere l'esecuzione di due interpolazioni lineari facilmente eseguibili utilizzando formule semplici ampiamente conosciute. Attualmente sarebbe possibile utilizzare modelli diversi ma la consuetudine e la mole di dati già acquisita nella forma originale sono tali da sconsigliarne l'uso.

4.3 Stima della equazione di Manson Coffin per acciai

Sulla base di un notevole numero di prove sperimentali sugli acciai, Manson, nel 1964, ha proposto un modello che consente di stimare la curva di fatica oligociclica a partire dalle caratteristiche statiche del materiale:

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = 1.9 \frac{R_m}{E} (2N)^{-0.12} + 0.76 \times \varepsilon_f^{0.6} \times (2N)^{-0.6}$$

che può trovarsi anche scritta (nella forma originale di Manson):

$$\Delta\varepsilon = 3.5 \frac{R_m}{E} (N)^{-0.12} + \varepsilon_f^{0.6} \times (N)^{-0.6}$$

dove R_m è il carico di rottura del materiale, E è il modulo di Young, ε_f è la deformazione razionale a frattura.

Queste formule permettono di avere una prima stima del comportamento a fatica del materiale senza effettuare prove; ovviamente tale formula deve essere utilizzata con cautela, in quanto è una stima grossolana dell'effettivo comportamento del materiale. In particolare molti materiali presentano un comportamento diverso da quello stimato per livelli bassi di sollecitazione, cioè nel campo della fatica ad alto numero di cicli.

4.4 Influenza del valore medio della sollecitazione

L'equazione di Manson Coffin è ricavata normalmente con tensioni medie nulle; peraltro è noto che l'applicazione di una tensione nulla diversa da zero influenza la vita a fatica. Nel campo della fatica ad alto numero di cicli si tiene conto di questa influenza mediante gli appositi diagrammi di fatica, spesso ottenuti utilizzando delle ipotesi semplificative (ad esempio l'ipotesi di Goodman).

Nel campo della fatica in controllo di deformazione l'influenza della sollecitazione media può essere valutata modificando l'equazione di Manson Coffin; Morrow nel 1968 propose una modifica di tale equazione basandosi sull'ipotesi che la tensione media (σ_m) influenzasse solo la componente elastica del ciclo:

$$\frac{\Delta\epsilon}{2} = \frac{\sigma'_f - \sigma_m}{E} (2N)^b + \epsilon'_f (2N)^c$$

L'effetto di tale modifica è particolarmente sensibile per le lunghe durate, mentre influenza poco la curva nel campo oligociclico (Figura 23). Si noti che fisicamente la modifica proposta corrisponde a limitare la sollecitazione massima al valore σ'_f per $2N=1$.

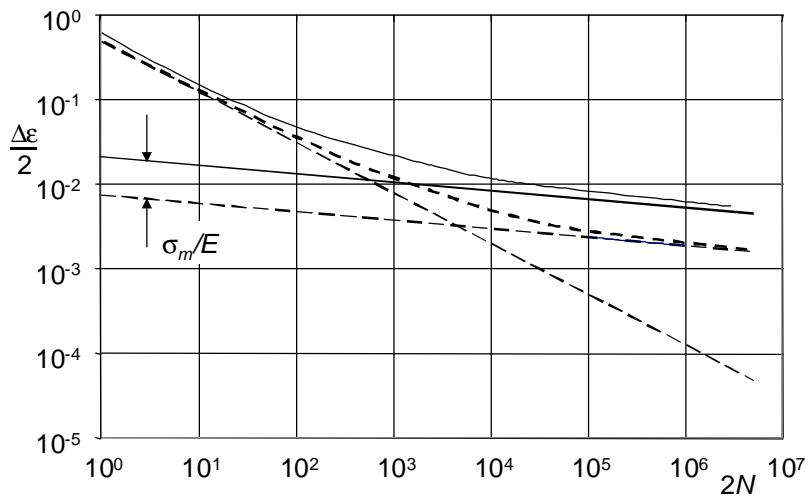


Figura 23: Influenza della tensione media (Morrow)

L'equazione di Morrow è coerente con la osservazione sperimentale per cui la tensione media influenza notevolmente la resistenza a fatica per bassi livelli di sollecitazione (cioè nel campo ad alto numero di cicli), mentre influenza poco il comportamento a fatica dei materiali nel campo oligociclico; questo fatto è dovuto al rilassamento delle tensioni medie che si può avere quando il campo delle deformazioni totali è abbastanza elevato ($\Delta\epsilon \geq 0.5\% \div 1\%$) ed è illustrato nella Figura 24. Il fenomeno del rilassamento delle tensioni può avvenire con materiali che sono ciclicamente stabili, e non deve essere confuso con l'addolcimento ciclico.

L'equazione di Morrow peraltro implica che il rapporto fra la componente elastica e quella plastica del ciclo (e quindi la vita a transizione) dipenda dalla tensione media applicata, il che non è fisicamente corretto.

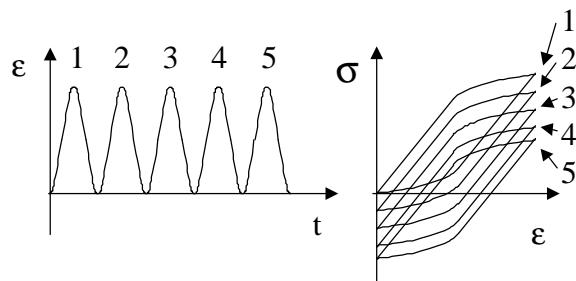


Figura 24: Rilassamento delle tensioni medie

Per questo motivo Manson ed Halford hanno proposto nel 1981 di modificare sia la parte elastica che quella plastica (figura), ottenendo una equazione in cui la vita a transizione è costante al variare della tensione media applicata:

$$\frac{\Delta \varepsilon}{2} = \frac{\sigma'_f - \sigma_m}{E} (2N)^b + \varepsilon'_f \left(\frac{\sigma'_f - \sigma_m}{\sigma'_f} \right)^{(c/b)} (2N)^c$$

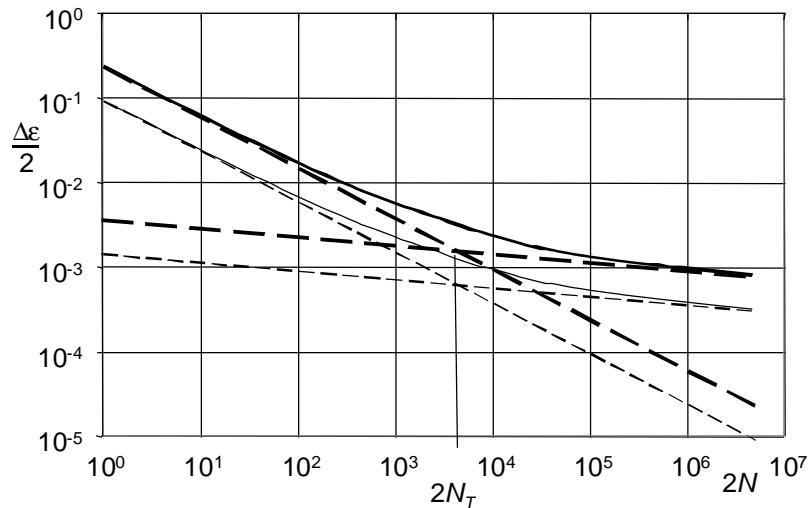


Figura 25: Influenza della tensione media (Manson e Halford)

L'equazione di Morrow, pur non essendo fisicamente corretta, ha dei buoni riscontri sperimentali, e può comunque essere utilizzata come strumento di lavoro, mentre l'equazione di Manson e Halford, pur essendo più corretta dal punto di vista fisico, sovrastima in molti casi l'effetto della tensione media nel campo oligociclico, proprio pechè non tiene conto del rilassamento delle tensioni medie.

Un tipo diverso di approccio, che pur basato su considerazioni euristiche si sta affermando, è quello proposto da Smith, Topper e Watson nel 1970.

Secondo tale approccio esiste una funzione della sollecitazione massima e dalla deformazione totale che rimane costante a parità di durata. Tale funzione prende il nome di 'parametro di danno di Smith, Topper e Watson' ed è definita, in modo euristico, come

$$P_{STW} = \sqrt{\sigma_{\max} \frac{\Delta \varepsilon}{2} E}$$

Il parametri di danno può essere determinato considerando che la formula è valida anche per una tensione media nulla, cioè quando $\sigma_{\max} = \Delta\sigma/2$. Ricordando inoltre l'equazione di Basquin in queste condizioni si ha:

$$\sigma_{\max} = \frac{\Delta\sigma}{2} = \sigma'_f (2N)^b \quad (\sigma_m = 0)$$

$$E\sigma_{\max} = E \frac{\Delta\sigma}{2} = E\sigma'_f (2N)^b$$

mentre $\Delta\epsilon/2$ può essere espressa tramite l'equazione di Manson – Coffin da cui:

$$P_{STW}^2 = E\sigma_{\max} \frac{\Delta\epsilon}{2} = E\sigma'_f (2N)^b \frac{\epsilon'_f}{E} (2N)^b + \epsilon'_f (2N)^c \frac{\epsilon'_f}{E}$$

che con semplici passaggi diventa anche:

$$\sigma_{\max} \frac{\Delta\epsilon}{2} = \frac{\sigma'_f^2}{E} (2N)^{2b} + \sigma'_f \epsilon'_f (2N)^{(b+c)}$$

formula che permette di valutare la durata, nota la tensione massima e l'ampiezza della deformazione, una volta determinati i coefficienti della curva di Manson – Coffin.

Si noti che avendo definito il parametro con una radice quadrata, la formula di Smith, Topper e Watson non è applicabile con tensioni massime minori di zero, coerentemente con l'osservazione che in questi casi non vi può essere propagazione di fatica.

5. Local Strain Analysis – Approccio a due stadi

I risultati ottenuti nel campo della fatica in controllo di deformazione hanno portato alla definizione di una procedura diversa da quella classica per il calcolo della vita a fatica di un componente intagliato; tale procedura è indicata con il nome “local strain analysis”, o anche approccio a due stadi, e si basa sulle seguenti considerazioni:

- il processo di fatica è localizzato, e le zone di intaglio sono luoghi privilegiati di nucleazione delle cricche;
- la nucleazione della cricca è un fenomeno sostanzialmente di tipo plastico;
- il materiale alla radice dell'intaglio ove si nuclea la cricca è soggetto a una storia temporale delle deformazioni imposta dal resto della struttura (che continua ad operare in campo elastico);
- la radice dell'intaglio è quindi assimilabile ad una provetta in controllo di deformazione (si veda Figura 26);
- poiché una provetta in controllo di deformazione cede quando la cricca ha raggiunto una dimensione di 0.5÷5 mm (vedi paragrafo 4.1) si può assimilare il cedimento della provetta alla nucleazione della cricca nella zona dell'intaglio.

Quindi, nota la storia temporale della deformazione, è possibile ricavare la durata della provetta, corrispondente al numero di cicli che porta alla nucleazione della cricca nel componente intagliato, tramite l'equazione di Manson –Coffin (o il corrispondente diagramma); calcolata la durata necessaria per la nucleazione la vita residua può essere valutata con gli strumenti della meccanica della frattura (da cui il nome di approccio a due stadi).

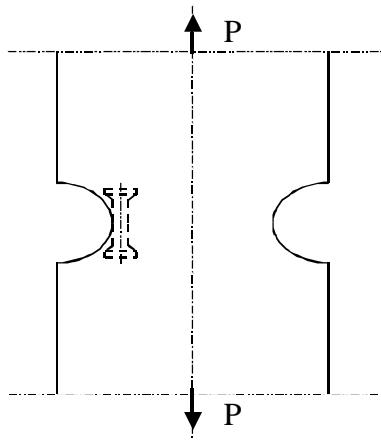


Figura 26: Local strain analysis

Nel caso in cui la deformazione non sia ad ampiezza costante si utilizza una ipotesi di danneggiamento cumulativo, ad esempio la regola di Miner, per quanto riguarda lo stadio di nucleazione, e si utilizzano gli opportuni schemi di calcolo per valutare la fase di propagazione.

Una dei punti critici della procedura è la valutazione della storia temporale della deformazione. Normalmente tale operazione può essere effettuata con tre metodi distinti:

- 1) rilievo sperimentale diretto della deformazione su prototipi; si deve notare che questo metodo comporta l'applicazione di estensimetri (adatti a rilevazioni in campo plastico) in corrispondenza della radice dell'intaglio; questa operazione, non è quasi mai possibile per via delle ridotte dimensioni e/o l'inaccessibilità delle zone intagliate e per la non disponibilità di estensimetri adatti al campo di deformazione raggiunto.
- 2) Calcolo agli elementi finiti in campo elastoplastico; questo metodo è di difficile applicabilità perché è necessario conoscere a fondo le caratteristiche cicliche del materiale ed è molto oneroso (in termini di tempo e costo del calcolo) specie quando si debba simulare una storia di carico complessa; i calcoli elastoplastici sono peraltro molto sensibili alle assunzioni fatte (ad esempio la regola di incrudimento del materiale in condizioni multiassiali utilizzata).
- 3) Applicazione di una regola di trasferimento (vedi paragrafo 2.4); in pratica si utilizzano le tensioni ottenute con un calcolo lineare oppure le deformazioni elastiche ottenute sperimentalmente con estensimetri posti in zone vicino all'intaglio in cui il comportamento è lineare e si considera la curva ciclica del materiale in luogo di quella monotona.

Quest'ultimo metodo è quello più semplice da applicare e porta in genere a risultati sufficientemente precisi.

La regola di Neuber, una volta individuate le ampiezze dei cicli con gli opportuni metodi di conteggio, può essere applicata alle componenti alternate del ciclo, e quindi la componente alternata della deformazione all'apice dell'intaglio cercata si ricava risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{\Delta\sigma}{2} \cdot \frac{\Delta\varepsilon}{2} = K_t^2 \cdot \frac{\Delta S_{\text{nom}}}{2} \cdot \frac{\Delta e_{\text{nom}}}{2} = K_t^2 \frac{(\Delta S_{\text{nom}})^2}{4E} = \frac{(\Delta S_{\text{FEM}})^2}{4E} \\ \frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2E} + \left(\frac{\Delta\sigma}{2K} \right)^{1/n} \end{cases}$$

Si noti che applicare la regola di Neuber comporta l'assunzione che il comportamento del materiale sia stabilizzato e che il comportamento del materiale sia simmetrico.

L'effetto del valore medio della tensione può poi essere considerato con i metodi visti nel paragrafo 4.4

Topper (1969) ha proposto di sostituire al valore del fattore di concentrazione delle tensioni K_t il fattore di riduzione della vita a fatica K_t (o il coefficiente di intaglio β), ma questa sostituzione non può essere utilizzata con il FEM ed inoltre questi due valori sono legati al limite di fatica e non alla resistenza a termine, che invece è un'ipotesi di base dell'approccio a due stadi.

L'approccio a due stadi è stato verificato con una estesa campagna di prove negli anni '70; i risultati di queste prove non hanno portato ad una definitiva accettazione del metodo, in quanto non sempre i risultati sperimentali sono stati coerenti con le previsioni fatte, in particolare in presenza di intagli acuti.

In questo caso, infatti, si hanno gradienti delle tensioni molto elevati e la zona di nucleazione della cricca ipotizzata è soggetta a campi di tensione e deformazione non assimilabili a quelli uniformi a cui sono soggette le provette utilizzate per ricavare la curva di Manson Coffin.

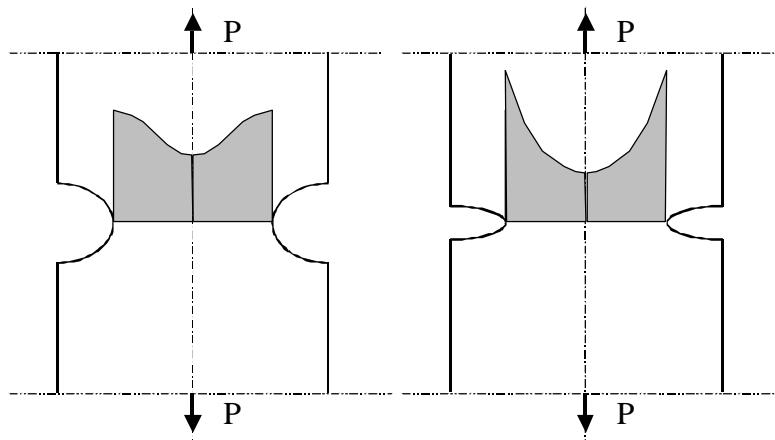


Figura 27: Gradienti delle tensioni con intagli ampi o acuti