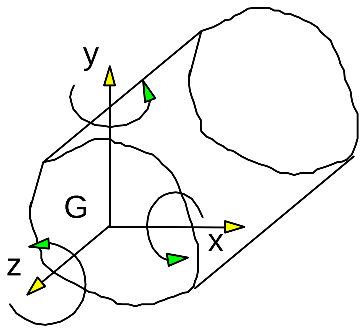
Calcolo delle componenti del tensore delle tensioni

Indice

Solido di de Saint Venant Caratteristiche di sollecitazioni

Si definisce solido di de Saint Venant, o trave, un elemento:

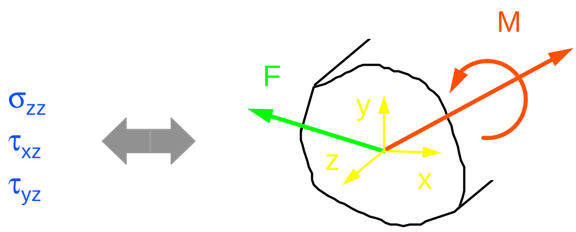
- di tipo monodimensionale (una dimensione molto maggiore delle altre)
- con forma cilindrica ottenuta per traslazione di una figura piana in direzione delle propria normale
- costruito con materiale elastico, omogeneo e isotropo
- in cui carichi e vincoli sono applicati solo alle basi.



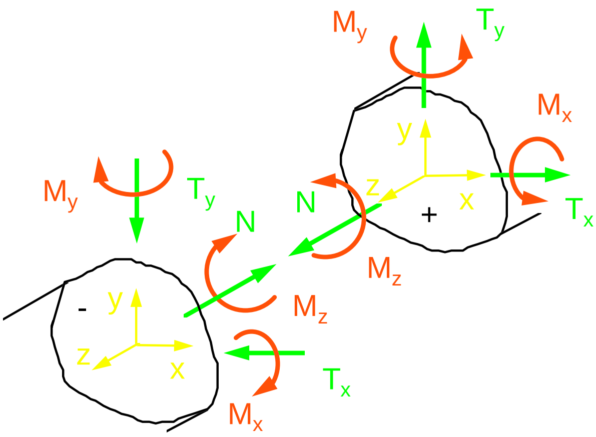
Il luogo dei punti che unisce i baricentri delle varie sezioni del solido è detto linea d'asse. A causa della monodimensionalità dell'elemento anche lo stato di sollecitazione è monodimensionale, cioè si ha sempre

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0$$

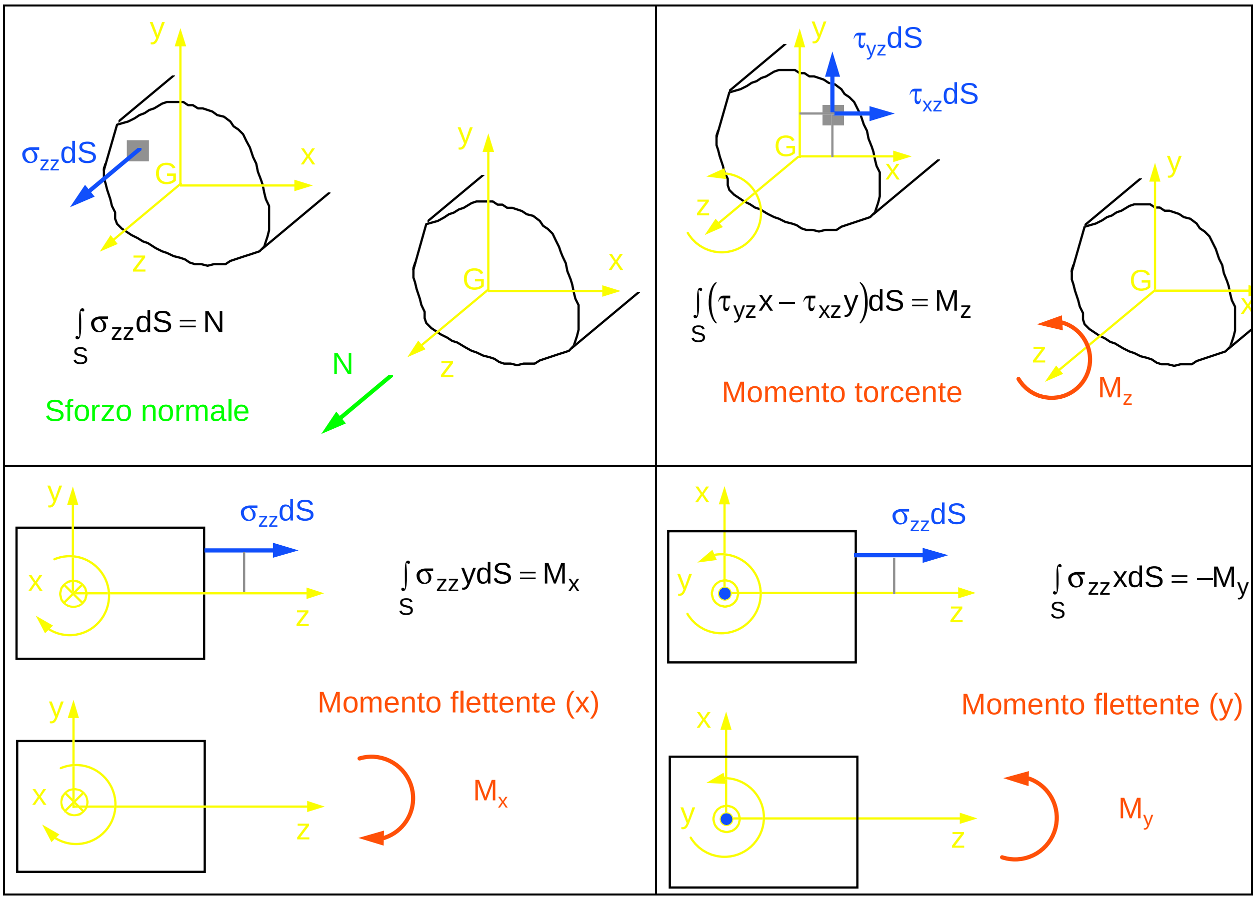
mentre le altre componenti il tensore delle tensioni (σ_{zz}, τ_{yz} , τ_{xz}), vale a dire quelle che agiscono su una sezione normale alla linea d'asse, possono essere diverse da zero.
Data una certa distribuzione delle tensioni sulla sezione, è possibile sostituirne l'effetto con una forza e con un momento risultante:

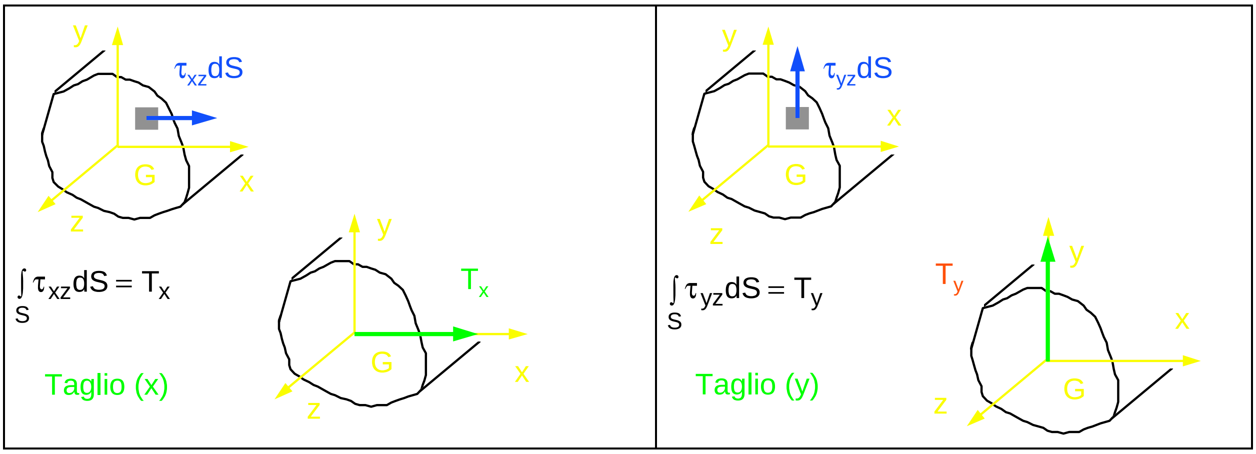


La forza e il momento possono essere scomposte in un riferimento cartesiano, ottenendo le **caratteristiche di sollecitazione** sulla sezione. In figura sono riportati i versi positivi di tali caratteristiche di sollecitazione (terne destrorse).



Poiché la sezione può essere vista come appartenente ai due pezzi della trave si definisce faccia positiva quella con asse z uscente, come faccia negativa quella con asse z entrante. Le caratteristiche di sollecitazione sulla faccia negativa sono uguali ed opposte a quelle della faccia positiva.
Il legame fra le componenti il tensore delle tensioni e le caratteristiche di sollecitazione viene riportato nelle figure seguenti:

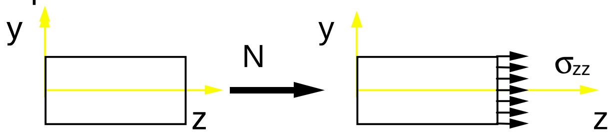




Con un procedimento inverso, date le caratteristiche di sollecitazione in una sezione di una trave di de Saint Venant è possibile calcolare le tensioni agenti in ogni punto della sezione.

Tensioni dovute allo sforzo normale

In una sezione di forma qualsiasi la tensione dovuta allo sforzo normale N agisce normalmente alla superficie ed è distribuita uniformemente.



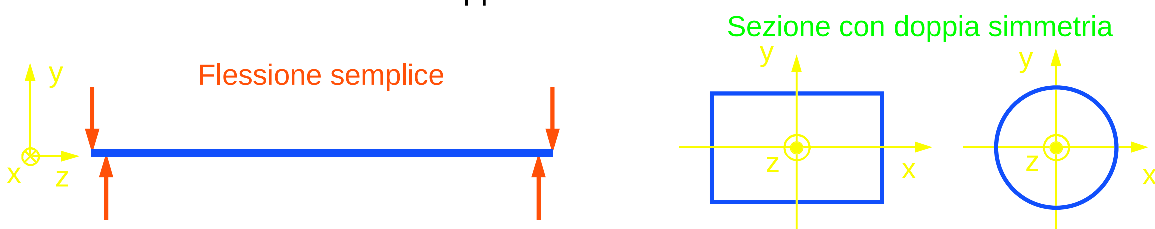
$$\boxed{\sigma_{zz} = \frac{N}{S}}$$

dove S è l'area della sezione

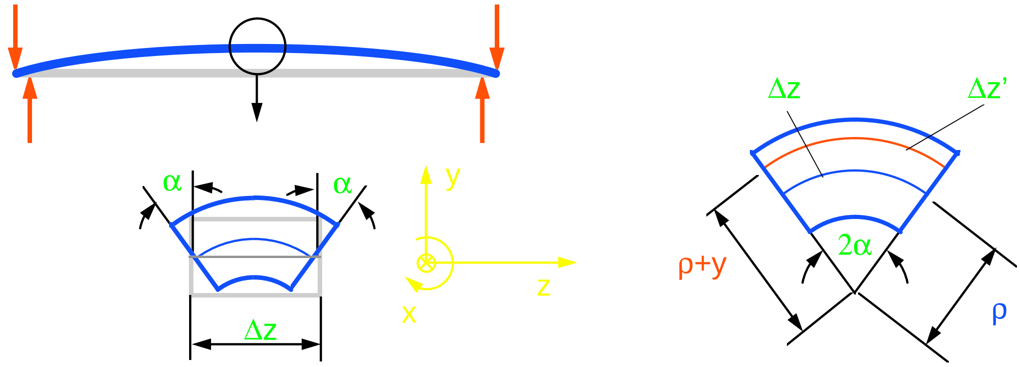
Tensioni dovute al momento flettente.

Flessione semplice, piano yz

Per valutare le tensioni dovute alla flessione si considerino innanzitutto un solido di de Saint Venant con sezione almeno doppiamente simmetrica:



Si prendano come riferimento gli assi di simmetria che passano per il baricentro della sezione.
Si assuma che durante la flessione la generica sezioni ruoti rimanendo piana di un angolo α facendo assumere alla fibra baricentrica della trave un raggio di curvatura ρ



Se consideriamo un tratto del solido lungo Δz, le fibre poste ad una generica distanza y dalla linea baricentrica subiscono una deformazione pari a:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\Delta z' - \Delta z}{\Delta z} = \frac{(\rho + y)2\alpha - \rho 2\alpha}{\rho 2\alpha} = \frac{1}{\rho} y = k_x \cdot y$$

Applicando la legge di Hooke e ricordando che per il solido di de Saint Venant $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0$ risulta:

$$\sigma_{zz} = E\varepsilon_{zz} \quad => \quad \sigma_{zz} = E \cdot k_x \cdot y$$

Cioè l'andamento delle tensioni lungo l'asse y segue una legge lineare. Rimane da determinare la costante k_y. Per far questo utilizziamo le formule prima viste che legano le caratteristiche di sollecitazione alle tensioni:

$$M_x = \int_S \sigma_{zz} y dS = Ek_x \int_S y^2 dS = Ek_x J_{xx}$$

dove con J_{xx} si intende il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse x. Da questa formula risulta:

$$k_x = \frac{M_x}{EJ_{xx}} \quad \text{e quindi risulta} \quad \boxed{\sigma_{zz} = \frac{M_x}{J_{xx}} y}$$

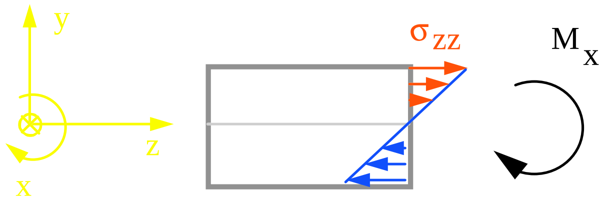
Le tensioni ipotizzate non producono altre caratteristiche di sollecitazioni; risulta infatti:

$N = \int \sigma_{zz} dS = 0$ (per la simmetria della distribuzione delle tensioni)

$T_x = T_y = M_z = 0$ (perchè $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$)

$M_y = -\int \sigma_{zz} x dS = -Ek_x \int xy dS = 0$ (a causa della simmetria delle sezioni.)

La grandezza $\int xy dS$ viene detta momento centrifugo e nel caso di sezioni doppiamente simmetriche risulta nullo.
Come si vedrà in seguito relativo alla geometria delle aree quando il momento centrifugo è nullo gli assi x e y si dicono principali d'inerzia.
La formula vista permette di calcolare le tensioni dovute al momento flettente M_x in una sezione in cui gli assi x e y siano baricentrici e principali d'inerzia. Queste tensioni sono normali alla superficie e distribuite triangolarmente:



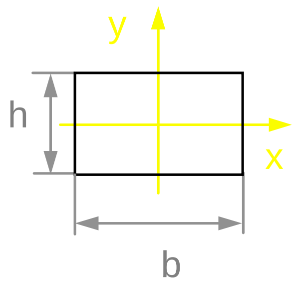
Si noti che per le sezioni che presentano delle simmetrie, gli assi di simmetria che passano per il baricentro sono anche principali d'inerzia. L'asse in cui le tensioni dovute al momento flettente sono nulle (asse x in questo caso) viene detto **asse neutro.**
Se il momento M_x è positivo (vedi figura), le tensioni σ_{zz} sono positive (di trazione) dal lato dell'asse positivo, negative (di compressione) dal lato delle y negative.
Se si è interessati solo ai valori massimo e minimo delle tensioni si utilizza il **modulo di resistenza a flessione:**

$$W_f = \frac{J_{xx}}{y_{max}}$$

I valori massimo e minimo delle tensioni vengono quindi calcolate con le formule:

$$\boxed{\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_f}} \qquad \boxed{\sigma_{min} = -\frac{M_x}{W_f}}$$

Per le **sezioni rettangolari** piene il momento d'inerzia J_{xx} vale:

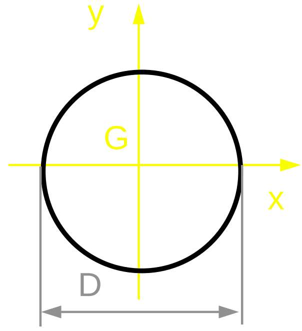


$$J_{xx} = \int_S y^2 dS = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dx dy = \frac{bh^3}{12}$$

e il modulo di resistenza a flessione:

$$W_f = \frac{J_{xx}}{y_{max}} = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6}$$

Per le **sezioni circolari piene** il momento d'inerzia rispetto ad un qualunque diametro vale:



$J_{xx}=J_{yy}=J_D=J_p/2$

Jp = momento d'inerzia polare $$J_p = \int_S r^2 dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{D/2} r^3 dr d\theta = \frac{\pi D^4}{32}$$

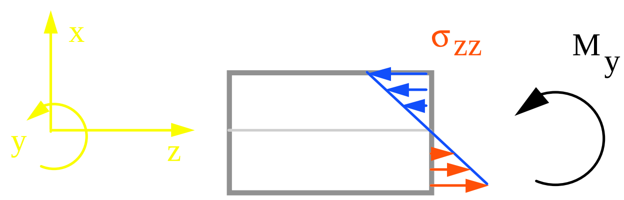
$$J_{xx} = J_{yy} = J_D = \frac{\pi D^4}{64}$$

e il modulo di resistenza a flessione:

$$W_f = \frac{\pi D^4}{64}\cdot\frac{2}{D} = \frac{\pi D^3}{32}$$

Flessione semplice, piano xz

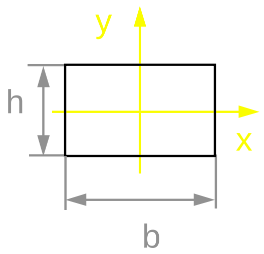
Analogamente a quanto visto nel piano yz, in una sezione in cui gli assi x e y sono baricentrici e principali d'inerzia le tensioni dovute ad un momento flettente M_y sono normali alla superficie e distribuite triangolarmente.



$$\boxed{\sigma_{zz} = -\frac{M_y}{J_{yy}}x}$$

Se il momento M_y è positivo (vedi figura), le tensioni σ_{zz} sono positive (di trazione) dal lato dell'asse negativo, negative (di compressione) dal lato delle x positive.
Questa diversa formulazione rispetto al piano yz è dovuta al sistema di riferimento scelto.
Nel caso si utilizzi un'altra convenzione (ad esempio considerare positivi i momenti che tendono ad allungare le fibre dal lato positivo dell'asse x o y) la formula sul piano xz è analoga a quella del piano yz !

Per le **sezioni rettangolari** piene il momento d'inerzia J_{yy} vale:



$$J_{yy} = \int_S x^2 dS = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} x^2 dx dy = \frac{hb^3}{12}$$

e il modulo di resistenza a flessione:

$$W_f = \frac{Jyy}{x_{max}} = \frac{hb^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{hb^2}{6}$$

Per le sezioni circolari, a causa della simmetria, non vi sono differenze rispetto a quanto visto per il piano yz.

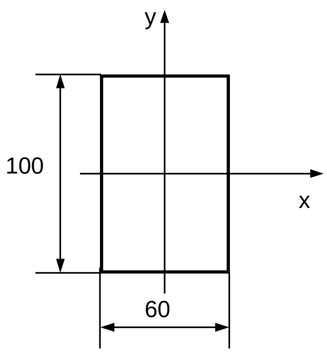
Esercizio 2-1

Data una sezione rettangolare 60x100 mm soggetta ad uno sforzo normale N =- 60000 N calcolare la tensione normale sulla sezione

Esercizio 2-2

Calcolare la tensione normale in una sezione circolare di diametro Ø 60 mm soggetta ad uno sforzo normale N = 50000 N.

Esercizio 2-3



Data la sezione rettangolare in figura soggetta ad un momento flettente M_x= 12000 Nm:
a) Calcolare le tensioni minima e massima.
b) Calcolare la tensione nel punto di coordinate (20,30).
c) Tracciare l'andamento delle sollecitazioni lungo la sezione.
d) Calcolare le deformazioni massime e minime in direzione z.
e) Calcolare la lunghezza finale dei lati della sezione paralleli all'asse x
Si assuma un modulo elastico E = 200000 MPa e un coefficiente di Poisson ν = 0.3

Esercizio 2-4

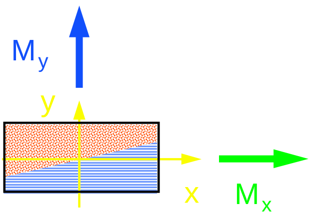
Si ripeta l'esercizio 3 (domande a e b) considerando la sola presenza di un momento flettente My = 12000 Nm

Esercizio 2-5

Una sezione circolare di diametro Ø 60 mm è soggetta ad un momento flettente M = 10000 Nm. Calcolare le tensioni minima e massima.

Flessione composta

Quando su una sezione agiscono contemporaneamente i momenti M_x e M_y, dove x e y sono assi baricentrici (centrali) e principali d'inerzia, si applica il principio di sovrapposizione degli effetti.

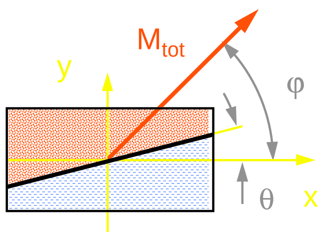


$$\sigma_{zz} = \sigma_{zz}(M_x) + \sigma_{zz}(M_y) = \frac{M_x}{J_{xx}} y - \frac{M_y}{J_{yy}} x$$

si noti che se si considera il momento complessivo:

$$M_{tot} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

questo, in generale, non agisce più parallelamente all'asse neutro:



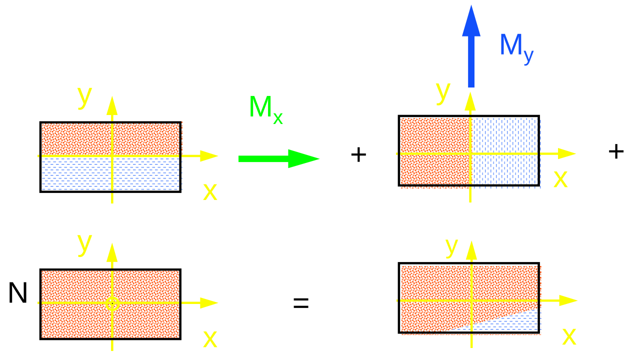
Inclinazione del vettore momento totale: $\boxed{\tan(\varphi) = \frac{M_y}{M_x}}$

Asse neutro (σ_{zz}=0):

$$\frac{M_x}{J_{xx}} y - \frac{M_y}{J_{yy}} x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_{xx}}{J_{yy}} x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tan(\theta) = \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_{xx}}{J_{yy}}}$$

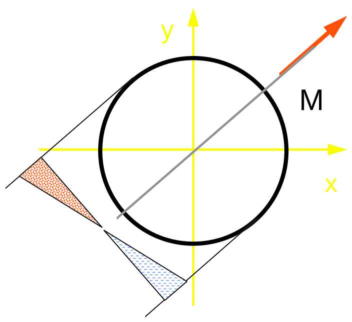
in generale quindi $\theta \neq \varphi$.

Quando sia presente anche uno sforzo normale si utilizza la formula



$$\sigma_{zz} = \frac{N}{S} + \frac{M_x}{J_{xx}} y - \frac{M_y}{J_{yy}} x$$

Per le sezioni circolari, poché $J_{xx} = J_{yy}$ si ha sempre $\theta = \varphi$. Quindi, in presenza di momenti flettenti M_x e M_y, <u>solo per le sezioni circolari</u>, si può calcolare il momento flettente totale e trovare le tensioni normali massime (e minime) dividendolo per il modulo di resistenza.

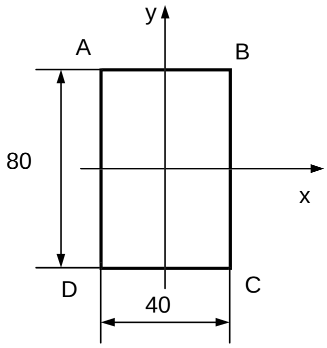


$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_f} = \frac{32 \cdot M}{\pi \cdot D^3}$$

Esercizio 2-6

Data la sezione rettangolare in figura calcolare le tensioni normali nei quattro spigoli dovute alla presenza contemporanea dei momenti flettenti M_x = 10000 Nm, M_y = -4000 Nm e di uno sforzo normale N = 64 kN.

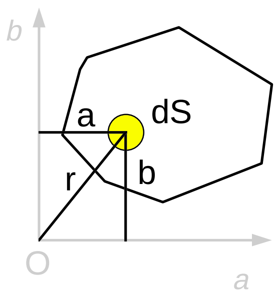


Esercizio 2-7

Data una sezione circolare di diametro ∅ 50 mm soggetta ai momenti flettenti M_x = -5000 Nm e M_y = 3000 Nm. Calcolare la tensione massima e minima nella sezione.

Geometria delle aree

Abbiamo visto che per il calcolo delle tensioni dovute alla flessione occorre conoscere gli assi **baricentrici principali di inerzia**. Nel caso delle sezioni che presentano una simmetria almeno doppia gli assi di simmetria sono baricentrici e principali d'inerzia.
Nel caso di sezioni di forma qualunque la posizione del baricentro e gli assi principali possono essere determinati con la geometria delle aree.
Si supponga di avere una sezione di forma qualsiasi e si prenda un sistema di riferimento *a,b*:



L'area della sezione viene calcolata con la formula:

$$S = \int_S dS$$

Si definiscono come momenti statici della sezione rispetto agli assi a e b le grandezze:

$$S_a = \int_S b\,dS \qquad S_b = \int_S a\,dS$$

I momenti d'inerzia rispetto agli assi *a* e *b* vengono calcolati con le formule:

$$J_{aa} = \int_S b^2 dS \qquad J_{bb} = \int_S a^2 dS$$

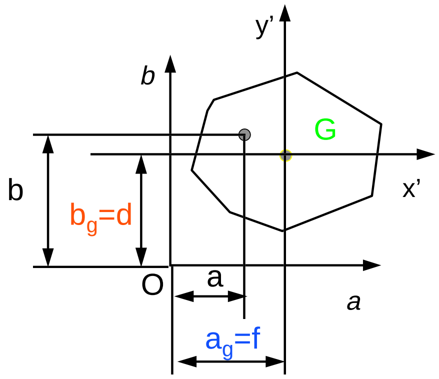
Si definiscono inoltre il momento centrifugo J_{ab} e il momento d'inerzia polare J_o rispetto all'origine degli assi:

$$J_{ab} = \int_S ab\,dS \qquad J_o = \int_S r^2 dS = \int_S \left(a^2 + b^2\right) dS = J_{aa} + J_{bb}$$

Volendo conoscere la posizione del baricentro della sezione è sufficiente dividere i momenti statici per l'area della sezione.

$$a_G = f = \frac{S_b}{S} \qquad b_G = d = \frac{S_a}{S}$$

Le relazioni fra i momenti di inerzia calcolati rispetto ad una coppia di assi baricentrici (x',y') della figura in esame e un'altra coppia di assi (a,b) paralleli agli assi baricentrici della figura sono:



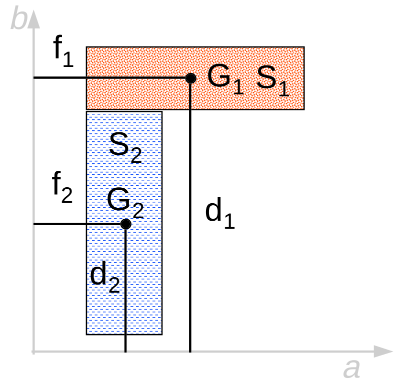
$$J_{aa} = J_{x'x'} + d^2 S \qquad J_{bb} = J_{y'y'} + f^2 S$$

$$J_{ab} = J_{x'y'} + d \cdot f \cdot S \qquad J_o = J_G + (G - O)^2 S$$

Si noti che, in generale, gli assi x'y' sono baricentrici, ma non principali d'inerzia, infatti abbiamo supposto che $J_{x'y'} \neq 0$.

Figure composte

Quando si è in presenza di sezioni che sono composte da figure "semplici", di cui è facile ricavare posizione del baricentro e momenti d'inerzia baricentrici, diventa agevole ricavare i momenti rispetto al baricentro complessivo utilizzando le formule appena viste.
Si noti che se si conoscono i momenti di tutte le parti che compongono la figura rispetto ad uno stesso sistema di riferimento, i momenti complessivi (dell'intera sezione) risultano uguali alla somma dei singoli momenti.



Si prenda ad esempio una figura composta da due rettangoli di cui si conoscono la posizione dei baricentri rispetto ad un sistema di riferimento *a,b*. L' area totale sarà ovviamente pari alla somma delle due aree:

$$S = S_1 + S_2$$

I momenti statici dei due rettangoli rispetto all'asse *b* saranno:

$$S_b(1) = f_1 S_1 \qquad S_b(2) = f_2 S_2$$

e il momento statico complessivo della sezione rispetto all'asse *b* sarà:

$$S_b = S_b(1) + S_b(2) = f_1 S_1 + f_2 S_2$$

Analogamente per l'asse *a*

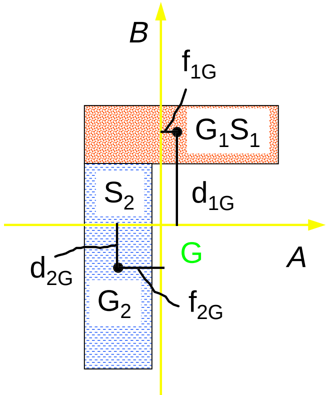
$$S_a(1) = d_1 S_1 \qquad S_a(2) = d_2 S_2$$

$$S_a = S_a(1) + S_a(2) = d_1 S1 + d_2 S_2$$

La posizione del baricentro complessivo G risulta quindi essere:

$$a_G = \frac{S_1 f_1 + S_2 f_2}{S_1 + S_2} \qquad b_G = \frac{S_1 d_1 + S_2 d_2}{S_1 + S_2}$$

Si considerino quindi gli assi *A,B* che passano per il baricentro dell'intera sezione.



I momenti d'inerzia dei due rettangoli rispetto all'asse *A*, risultano:

$$J_{AA}(1) = J_{x'x'}(1) + d_{1G}{}^2 S_1 \qquad J_{AA}(2) = J_{x''x''}(2) + d_{2G}{}^2 S_2$$

e i momenti d'inerzia dei due rettangoli rispetto all'asse *B:*

$$J_{BB}(1) = J_{y'y'}(1) + f_{1G}{}^2 S_1 \qquad J_{BB}(2) = J_{y''y''}(2) + f_{2G}{}^2 S_2$$

dove con x'y' si è indicato il sistema di riferimento passante per il baricentro del rettangolo (1) parallelo ad A,B e con x"y" si è indicato il sistema di riferimento passante per il baricentro del rettangolo (2).
Il momento d'inerzia complessivo rispetto all'asse A si può quindi ottenere semplicemente sommando i momenti d'inerzia riferiti a tale asse delle figure in cui è stato scomposta la sezione:

$$J_{AA} = J_{AA}(1) + J_{AA}(2) = J_{x'x'}(1) + d_{1G}{}^2 S_1 + J_{x''x''}(2) + d_{2G}{}^2 S_2$$

Analogamente si ottiene il momento d'inerzia dell'intera sezione rispetto all'asse B:

$$J_{BB} = J_{BB}(1) + J_{BB}(2) = J_{y'y'}(1) + f_{1G}{}^2 S_1 + J_{y''y''}(2) + f_{2G}{}^2 S_2$$

Anche li momento centrifugo della sezione si ottiene come somma dei momenti centrifughi delle figure in cui è stata scomposta la sezione rispetto agli assi AB:

$$J_{AB} = J_{AB}(1) + J_{AB}(2) = J_{x'y'}(1) + d_{1G} f_{1G} S_1 + J_{x''y''}(2) + d_{2G} f_{2G} S_2$$

Si noti che pur essendo, nel nostro caso, Jx’y’(1) e Jx”y”(2) nulli, il momento centrifugo dell’intera sezione rispetto agli assi AB **non è nullo** e quindi gli assi *AB* sono baricentrici ma **non principali d’inerzia** e i momenti J_{AA} e J_{BB} **non sono principali d’inerzia**; quindi questi momenti non possono essere utilizzati nel calcolo delle tensioni dovute ai momenti flettenti con le formule prima viste

La posizione degli assi principali (X,Y) può essere determinata ruotando attorno al baricentro in senso orario il sistema di riferimento AB di un angolo α determinato con la seguente formula:

$$\tan 2\alpha = \frac{2J_{AB}}{J_{AA} - J_{BB}}$$

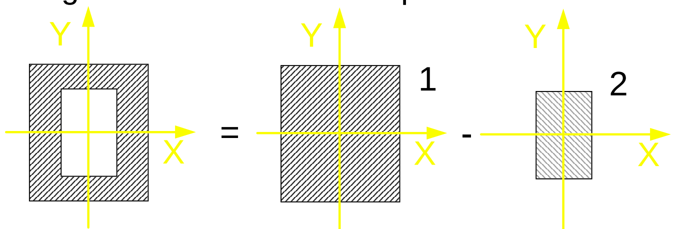
Noto l’angolo α i momenti d’inerzia rispetto al sistema di riferimento principale XY risultano essere:

$$J_{XX} = \frac{J_{AA} + J_{BB}}{2} + \frac{J_{AA} - J_{BB}}{2}\cos 2\alpha + J_{AB}\,\mathrm{sen}\,2\alpha$$
$$J_{YY} = \frac{J_{AA} + J_{BB}}{2} - \frac{J_{AA} - J_{BB}}{2}\cos 2\alpha - J_{AB}\,\mathrm{sen}\,2\alpha$$

Ovviamente per poter utilizzare le formule del calcolo delle tensioni viste anche il momento flettente complessivo agente sulla sezione deve essere scomposto secondo le due direzioni principali XY.

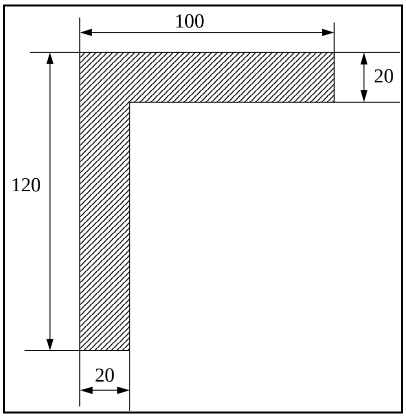
Figure cave

L’addittività dei momenti d’inerzia, quando riferiti agli stessi assi, può risultare utile anche per il calcolo dei momenti d’inerzia delle sezioni cave; basterà infatti considerare il momento d’inerzia della figura che viene tolta dal pieno come un momento “negativo”.



$$J_{XX} = J_{XX}(1) - J_{XX}(2) \qquad J_{YY} = J_{YY}(1) - J_{YY}(2)$$

Esercizio 2-8



Data la sezione in figura calcolare la posizione del baricentro, l'inclinazione del sistema di riferimento principale rispetto ai lati della figura e i valori dei momenti d'inerzia principali.

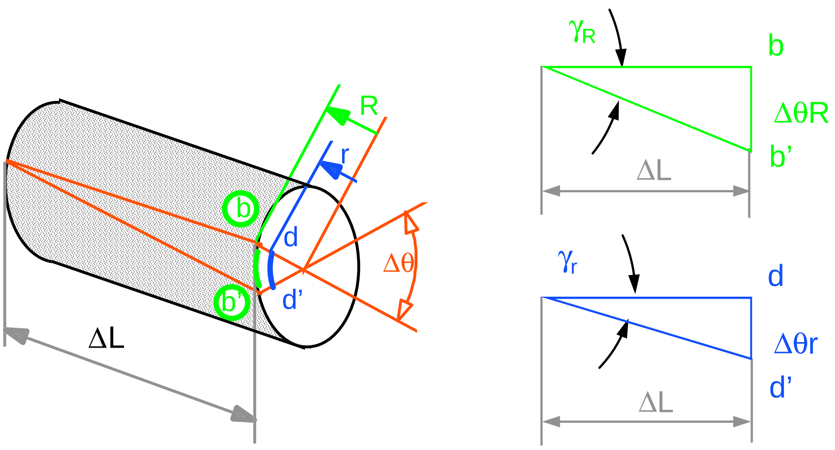
Tensioni dovute al momento torcente

Le tensioni dovute al momento torcente M_z sono calcolabili in modo esatto solo nel caso di sezioni circolari, piene o cave.

Negli altri casi si hanno delle soluzioni approssimate che consentono il calcolo della tensione tangenziale massima o media. Si deve porre attenzione al fatto che non sempre il punto in cui agiscono queste tensioni tangenziali coincide con il punto in cui si ha la massima tensione di flessione, quando sono presenti anche momenti flettenti.

Sezioni circolari

Analogamente al caso della flessione il legame fra il campo delle tensioni e il momento torcente applicato si ricava ipotizzando il movimento di una sezione. In particolare si suppone che la sezione in considerazione ruoti rimanendo piana di un angolo $\Delta\theta$ rispetto ad una sezione posta alla distanza ΔL. Il punto b, posto sulla circonferenza esterna di raggio R si troverà quindi nella posizione b', mentre un generico punto d, posto al raggio r, si sposterà nel punto d'. Le lunghezze dei segmenti di circonferenza saranno bb' = $R\Delta\theta$ e dd' = $r\Delta\theta$.



Una fibra posta assialmente ruota di un angolo γ che varia lungo il raggio della sezione. In particolare l'angolo formato da una fibra posta sulla superficie esterna ruota di un angolo dato dalla formula:

$$\tan\gamma_R \cong \gamma_R = \frac{\Delta\theta R}{\Delta L}$$

mentre una fibra posta al raggio r ruota di un angolo dato da:

$$\tan\gamma_r \cong \gamma_r = \frac{\Delta\theta r}{\Delta L}$$

dove, considerando piccole rotazioni, si può confondre la tangente con il suo argomento. Considerando le due equazioni appena viste si ottiene

$$\Delta\theta = \frac{\gamma_R \Delta L}{R} = \frac{\gamma_r \Delta L}{r}, \qquad \text{e quindi} \qquad \gamma_r = \frac{\gamma_R}{R} r$$

L'andamento dell'angolo γ è quindi lineare e crescente con il raggio. Considerando la legge di Hooke per le tensioni tangenziali (τ= G γ, G= modulo di elasticità tangenziale) si ottiene che anche le tensioni tangenziali hanno un andamento lineare che va da zero al centro della sezione ad un massimo al raggio R:

$$\gamma_r = \frac{\gamma_R}{R} r \Rightarrow \tau_r = \frac{\tau_R}{R} r$$

Ponendosi in un sistema di riferimento polare ed integrando le tensioni tangenziali sulla superficie si ottiene il momento torcente M_z :

$$M_z = \int \tau_r r dS \qquad \tau_r = \frac{\tau_R}{R} r \qquad\qquad M_z = \frac{\tau_R}{R} \int r^2 dS = \frac{\tau_R}{R} J_p = \frac{\tau_r}{r} J_p$$

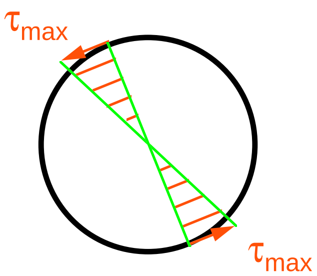
dove J_p è il momento d'inerzia polare.
Nel caso di sezioni circolari è quindi possibile calcolare il valore della tensione tangenziale dovuta al momento torcente in tutta la sezione. In particolare la tensione lungo ognuno dei diametri vale:

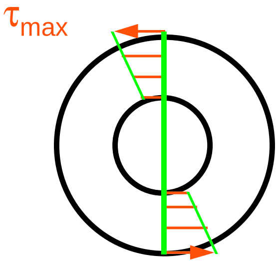
$$\tau_r = \frac{M_z}{J_p} r$$

dove r è la distanza dal centro della sezione e J_p è il momento d'inerzia polare della sezione.
Tutti i punti a pari distanza dal centro sono soggetti alla stessa tensione tangenziale agente normalmente al diametro in considerazione.
I momenti d'inerzia polari per le sezioni piene e circolari valgono:

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} \quad \text{(sezioni piene)} \qquad\qquad J_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{32} \quad \text{(sezioni cave)}$$

avendo indicato con D il diametro esterno della sezione e con d il diametro interno





Anche nel caso della torsione si può considerare un modulo di resistenza (a torsione) utilizzato per calcolare il valore della tensione massima, tensione che si trova sulla circonferenza esterna della sezione circolare. Il modulo di resistenza a torsione per le sezioni piene e cave varra':

$$W_t = \frac{2J_p}{D} = \frac{\pi D^3}{16} = 2 \cdot W_f \ \text{(sezioni piene)} \quad W_t = \frac{2J_p}{D} = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{16 \cdot D} = 2 \cdot W_f \ \text{(sezioni cave)}$$

Esercizio 2-9

Data una sezione circolare piena di diametro 70 mm soggetta a un momento torcente M_z = 5000 Nm calcolare:

a) il valore della tensione tangenziale massima;
b) il valore della tensione tangenziale sulla circonferenza di diametro 55 mm;
c) le componenti della tensione tangenziale τ_{zx} e τ_{zy} in un punto di coordinate (-24,18) nel sistema di riferimento baricentrico.

Esercizio 2-10

Data una sezione circolare cava con diametro esterno D = 70 mm e diametro interno d=50 mm soggetta a un momento torcente M_z = 5000 Nm calcolare:

a) il valore della tensione tangenziale massima;
b) il valore della tensione tangenziale sulla circonferenza di diametro 55 mm;
c) le componenti della tensione tangenziale τ_{zx} e τ_{zy} in un punto di coordinate (-24,-18) nel sistema di riferimento baricentrico;

Esercizio 2-11

Sia data una barra a sezione circolare piena di diametro $D = 40$ mm, realizzata in 39NiCrMo3. Come sistema di riferimento si assumano gli assi *x* e *y* giacenti nel piano della sezione retta della barra e l'asse *z* coincidente con l'asse della barra. La barra è sollecitata da uno sforzo normale $N = 3{\cdot}10^4$ N, da un momento flettente $M_x = 500$ Nm, da un momento flettente $M_y = 450$ Nm e da un momento torcente $M_z = 850$ Nm costanti lungo l'asse.

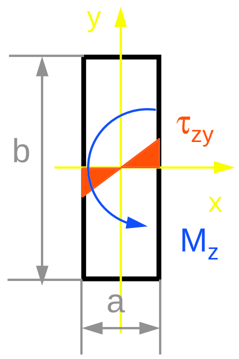
Tracciare i cerchi di Mohr e determinare le tensioni principali e la tensione ideale in un punto sulla superficie della barra

Tracciare i cerchi di Mohr e determinare le tensioni principali e la tensione ideale in un punto al centro della barra

Calcolare il coefficiente di sicurezza contro lo snervamento e contro la rottura duttile

Sezioni rettangolari

La formula vista per le sezioni circolari non può essere utilizzata per sezioni di forma diversa. Se si considera una sezione rettangolare infatti la formula per le sezioni circolari indica che la tensione massima si raggiunge agli spigoli della sezione, dove con semplici considerazioni di equilibrio si può dedurre che la tensione tangenziale in realtà deve essere nulla. In particolare si può dimostrare che la tensione massima si presenta in corrispondenza del lato maggiore della sezione (vedi figura). La spiegazione della non validità della formula dipende dal fatto che la sezione rettangolare, a differenza di quella circolare, non si mantiene piana quando viene soggetta a momento torcente.



Per le sezioni rettangolari esiste una soluzione esatta proposta da de St. Venant che non viene di solito utilizzata. Viene invece utilizzata una soluzione approssimata che permette di valutare lo stato di tensione lungo l'asse baricentrico parallelo al lato minore:

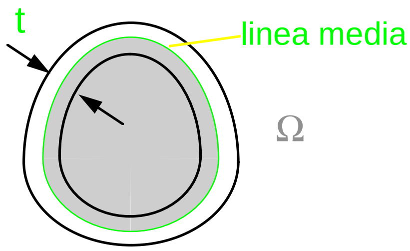
$$|\tau_{zy}| = \frac{2M_z}{J_t}x \qquad \text{dove} \qquad J_t = \frac{1}{3}(b - 0.6a)a^3$$

J_t prende il nome di fattore di rigidezza torsionale.
Nel caso di sezioni rettangolari sottili il fattore di rigidezza può essere calcolato semplicemente come:

$$b >> a \Rightarrow J_t = \frac{1}{3}ba^3$$

Sezioni cave a parete sottile

Per questa classe di problemi si può dimostrare che la tensione tangenziale dovuta al momento torcente M_z ha un valore medio nello spessore pari a:



$$\tau = \frac{M_z}{2\Omega t}$$

dove Ω è l'area racchiusa dalla line media e 't' è lo spessore della parete nel punto considerato.

Sezioni aperte a parete sottile

In questo caso si può dimostrare che la tensione tangenziale massima dovuta la momento torcente M_z in ognuno dei rettangoli in cui è possibile suddividere la figura vale:

$$|\tau_{max}|_i = \frac{M_z}{J_t}a_i$$

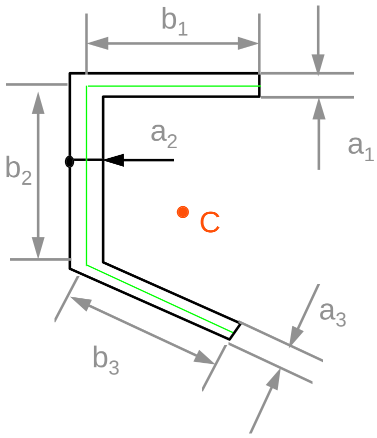
dove il fattore di rigidezza a torsione totale J_t è la somma dei fattori di rigidezza parziali di ognuno dei rettangoli di cui è composta la figura:

$$J_t = \sum J_{ti} = \sum \frac{1}{3}b_i a_i^3$$

o, nel caso di pareti in cui lo spessore, pur piccolo, non è trascurabile:

$$J_t = \sum J_{ti} = \sum \frac{1}{3}(b_i - 0.3a_i \cdot m_i)a_i^3$$

dove $m_i = 0$ se le due estremità dell'iesimo segmento non sono libere, $m_i = 1$ se una delle due estremità è libera e $m_i = 2$ se entrambe le estremità sono libere (cioè nel caso già visto di sezione rettangolare).



Esercizio 2-12

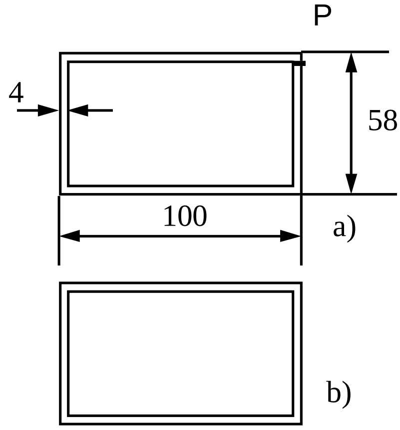
Si abbia una sezione rettangolare 100 x 80 mm soggetta ad un momento torcente di 10.000 Nm. Calcolare il valore della tensione tangenziale massima.

Esercizio 2-13

Si abbia un tubo formato da una lamiera di spessore t=3 mm di sezione ellittica con semiassi, misurati all'esterno A=100 mm e B= 80 mm soggetto ad un momento torcente M_z di 2500 Nm
Calcolare il valore della tensione tangenziale media nello spessore.

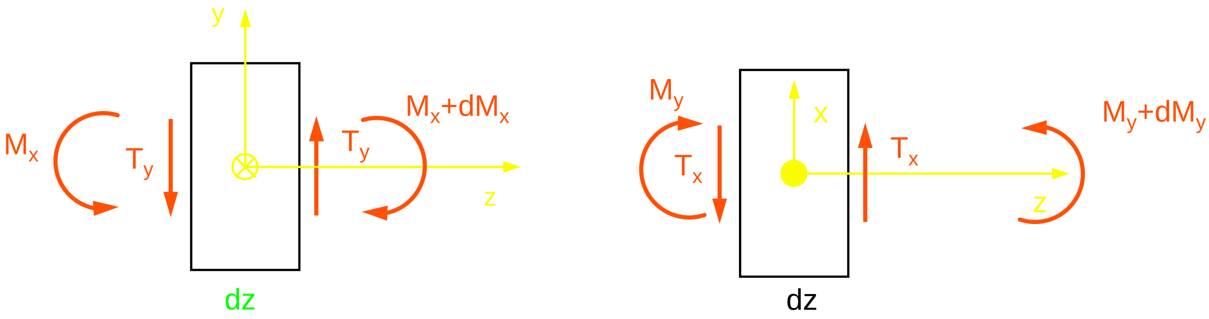
Esercizio 2-14

Le due sezioni illustrate in figura hanno dimensioni identiche ma nella prima (a) i lembi convergenti in P sono solo accostati, nella seconda (b) sono collegati per mezzo di una saldatura. Calcolare la massima tensione tangenziale in ciascuna delle due sezioni causata dall'applicazione di un momento torcente di $2 \cdot 10^5$ Nmm.



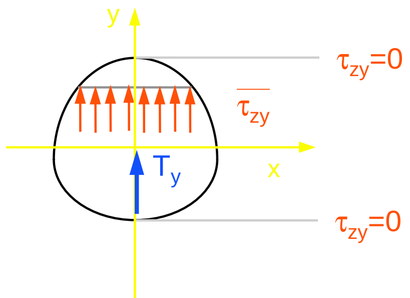
Tensioni dovute al taglio.

Viene riportata la soluzione approssimata di D.J. Jourawski (1850). Si ricorda innanzitutto che le caratteristiche di sollecitazione Momento e Taglio sulla sezione non sono indipendenti ma sono legate dalle seguenti formule:



Piano yz $\quad T_y = \frac{dM_x}{dz}$ $\qquad$ Piano xz $\quad T_x = -\frac{dM_y}{dz}$

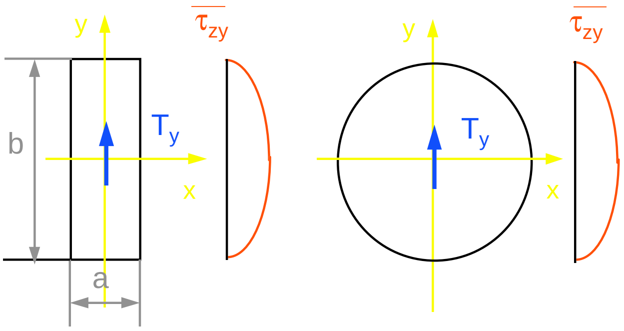
Data una sezione di forma qualsiasi soggetta a un taglio T_y la tensione tangenziale media su ogni segmento parallelo all'asse principale baricentrico *x* vale:



$$\overline{\tau_{zy}} = \frac{T_y S_c}{J_{xx} c}$$

dove S_c è il momento statico della parte di sezione individuata dal segmento rispetto all'asse principale baricentrico 'x' (si noti che i momenti statici delle due parti della sezione individuate dal segmento c sono uguali), J_{xx} è il momento d'inerzia rispetto allo stesso asse e 'c' è la lunghezza del segmento.

La tensione tangenziale τ_{zy} ha un andamento parabolico in direzione y, si annulla agli estremi della sezione e la tensione massima si trova sull'asse baricentrico.



In particolare per le sezioni rettangolari la tensione massima vale :

$$\tau_{max} = \frac{T_y S_x}{J_{xx} a} = \frac{3}{2}\frac{T_y}{A} \text{ (sez. rettangolare)}$$

e per le sezioni circolari:

$$\tau_{max} = \frac{T_y S_D}{J_D D} = \frac{4}{3}\frac{T_y}{A} \text{ (sez circolare.)}$$

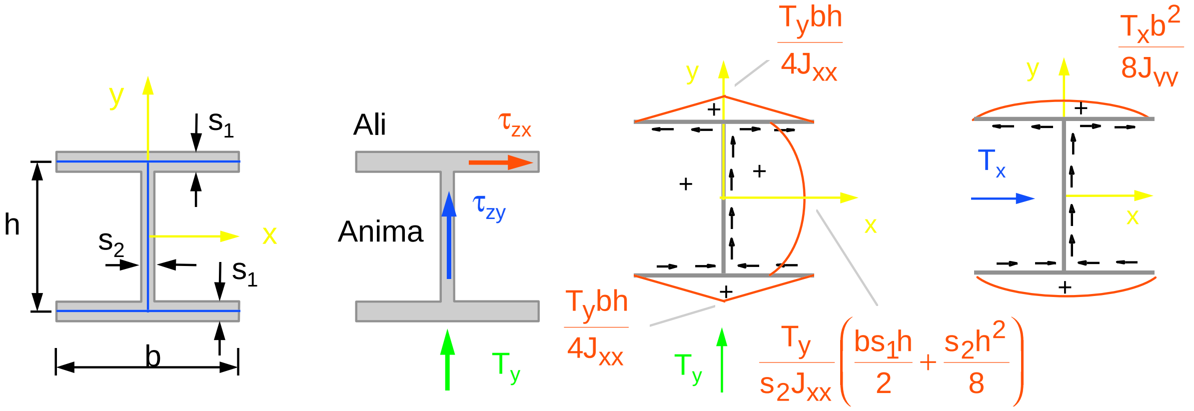
Se la sezione è soggetta ad un taglio in direzione x si hanno formule analoghe che si ottengono permutando gli indici.
Nel caso di sezioni circolari, e solo in questo caso, nel caso siano presenti entrambi i tagli, conviene considerare il taglio complessivo e calcolare la massima tensione tangenziale dovuta al taglio con la formula vista.

$$T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} \qquad \tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{T}{A}$$

Poiché le tensioni tangenziali non sono costanti, ma variano lungo l'asse 'y' ('x'), le sezioni tendono ad ingobbarsi: questo ingobbamento non produce variazioni delle tensioni normali σ_{zz} solo nel caso in cui il taglio sia costante, ma si può dimostrare che nel caso di travi snelle la variazione delle tensioni normali reali rispetto a quelle calcolate con le formule viste in precedenza (che ipotizzano che la sezione rimenga piana) sono piccole e quindi trascurabili.

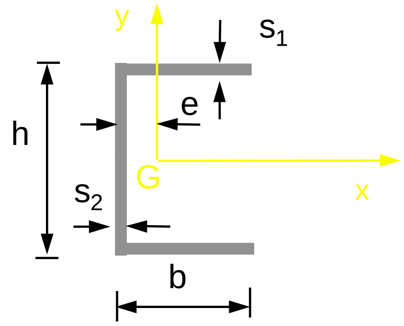
Taglio in profilati

In un profilato con pareti sottili (vedi figura) il taglio T_y provoca sia delle tensioni tangenziali τ_{zy} sull'anima sia delle tensioni tangenziali sulle ali ortogonali ad un segmento normale alla linea media, cioè delle tensioni τ_{zx}, come si può dedurre da semplici considerazioni di equilibrio.
Il valore locale della tensione tangenziale viene calcolato utilizzando la formula già vista anche per le ali. In definitiva l'andamento della tensione tangenziale può essere riportato in diagrammi come quelli riportati nelle figure relativi sia al taglio T_y sia al taglio T_x.
Analoghi diagrammi per altre sezioni si possono trovare su qualunque manuale. I noti che per tutti i profilati, le dimensioni considerate sono quelle relative alle linee medie.



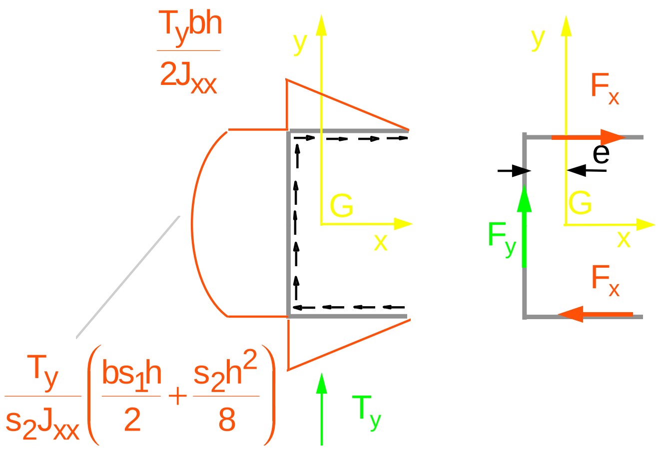
Sezioni non simmetriche - Centro di taglio e di torsione

Si consideri una sezione non doppiamente simmetrica formata da pareti sottili, ad esempio una sezione a C.



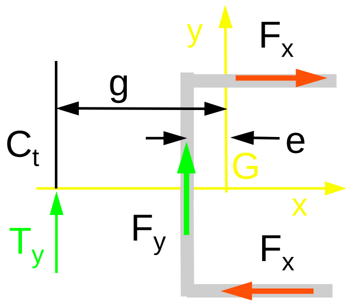
Poiché la sezione è simmetrica rispetto all'asse 'x' il baricentro si troverà su questo asse di simmetria ad una distanza dalla linea media che si ricava facilmente con la geometria delle aree:

$$e = \frac{s_1 b^2}{2bs_1 + hs_2}$$



Se si considera un taglio T_y adottando i metodi già visti, si ottiene l'andamento delle tensioni tangenziali normali alla linea media riportato in figura. Integrando le tensioni sulle tre aree in cui si può scomporre la figura si nota come il tagli T_y sia equilibrato dalle tensioni tangenziali τ_{zy} giacenti sul lato parallelo all'asse 'y', mentre le tensioni τ_{zx} danno origine ad una coppia $F_x h$, dove :

$$F_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{T_y bh}{2J_{xx}} bs_1 = \frac{T_y b^2 hs_1}{4J_{xx}}$$



Poichè abbiamo ipotizzato che l'unica caratteristica di sollecitazione presente sia il taglio T_y , questo deve essere applicato in un punto C_t (detto centro di taglio) ad una distanza 'g' dal baricentro tale da generare un momento compatibile con la distribuzione delle tensioni trovata. La distanza g di C_t rispetto al riferimento baricentrico xy si trova imponendo l'uguaglianza dei momenti:

$$T_y \cdot g = F_y \cdot e + F_x \cdot h$$

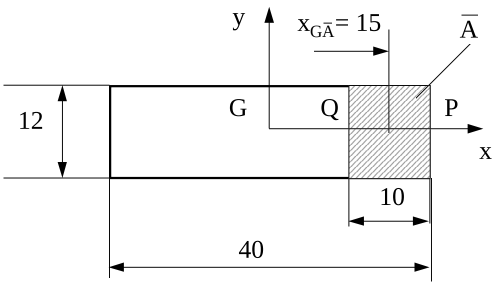
da cui si ricava:

$$g = \frac{F_y \cdot e + F_x \cdot h}{T_y} = e + \frac{b^2 h^2 s_1}{4 J_{xx}}$$

Se il taglio T_y è applicato lungo la retta parallela all'asse y passante per C_t la distribuzione delle tensioni è quella trovata in precedenza; tale caso è detto di 'taglio puro'. Nel caso in cui il taglio T_y sia applicato al baricentro, oltre alle tensioni dovute al taglio saranno presenti anche delle tensioni aggiuntive dovute al momento torcente $T_y \cdot g$, e analogamente se la retta d'azione del taglio è posta ad una distanza 'd' qualunque dal centro di taglio, bisogna considerare anche le tensioni aggiuntive dovute ad un momento $T_y \cdot d$.
Il punto Ct è anche il centro di torsione della sezione, cioè il punto attorno a cui ruota la sezione quando è soggetta ad un momento torcente. Si noti che se si è in una condizione di taglio puro la sezione non ruota.

Esercizio 2-15

Si consideri una sezione rettangolare 12x40 mm in cui l'asse x è parallelo alla dimensione maggiore. La sezione è soggetta ad un momento flettente $M_y = -4.5 \cdot 10^5$ Nmm ed a un taglio $T_x = 1.3 \cdot 10^4$ N.
Calcolare le tensioni normali e tangenizli nei punti G(0,0), Q(10,0) e P(20,0)

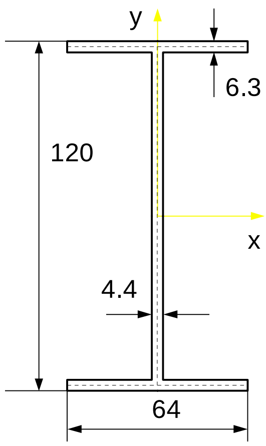


Esercizio 2-16

Si abbia una sezione circolare di diametro ∅ = 46 mm soggetta ad un taglio T_y = 3000 N ed un taglio T_x = 4000 N. Calcolare la massima tensione tangenziale dovuta al taglio.

Esercizio 2-17

La figura mostra lo schema di una sezione di un profilato IPE 120 UNI 5398 realizzato in Fe 360 (tensione ammissibile σ_{am}= 160 MPa, tensione tangenziale ammissibile τ_{am}= 80 MPa). Supponendo che ogni caratteristica di sollecitazione agisca separatamente determinare i massimi valori sopportabili per i momenti flettenti M_x e M_y, e per i tagli T_x e T_y.



Esercizio 2-18

La sezione di un profilato a **U** 100 UNI 5680 schematizzata in figura viene sollecitata da un taglio T_y = 10 kN. Valutare :

a) la posizione del centro di taglio;

b) le massime tensioni tangenziali causate dal taglio nell'anima e nelle piattabande;

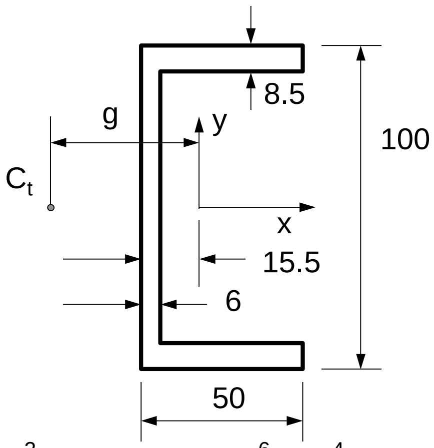
c) le tensioni aggiuntive che si producono nell'anima e nelle piattabande se il taglio è applicato nel baricentro della sezione.

Caratteristiche della sezione:

Torna ad inizio documento

Modulo 3

Soluzione esercizi



A = $1.35 \cdot 10^3$ mm^2 J_{xx} = $2.05 \cdot 10^6$ mm^4 J_{yy} = $2.91 \cdot 10^5$ mm^4