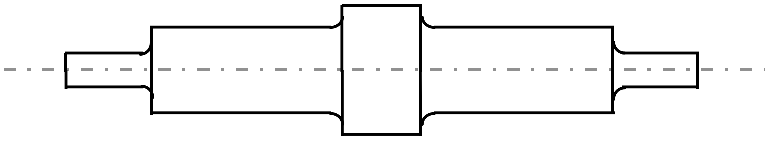
Calcolo delle caratteristiche di sollecitazione.

Indice

Principio di de Saint Venant

Nelle precedenti schede abbiamo visto come si ottengono le componenti del tensore delle tensioni per un solido di de Saint Venant. Molto spesso i solidi che devono essere calcolati non sono a rigore dei solidi di de Saint Venant perché presentano delle brusche variazioni di sezione (vedi figura); ci chiediamo se possiamo ancora utilizzare le formule viste anche in questi casi.

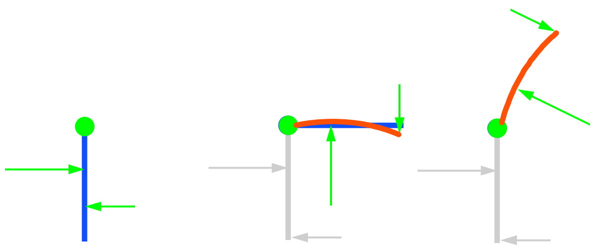


In effetti viene in nostro aiuto il **Principio di de Saint Venant** che possiamo così esporre:

- le modalità con cui i vincoli e carichi sono applicati interessano solo la zona di applicazione
- non conformità della geometria (brusche variazioni) provocano perturbazioni di carattere locale
- l'estensione della zona disturbata è circa uguale alla dimensione trasversale del solido

In presenza di brusche variazioni di geometria (intagli) le tensioni locali possono essere calcolate a partire dalle tensioni nominali, cioè quelle calcolate con le formule valide per il solido di de Saint Venant.

Equilibrio dei corpi



Un sistema di forze applicato ad un corpo comporta dei moti rigidi e degli spostamenti locali, dovuti alla deformabilità della struttura.
Quando gli spostamenti locali sono piccoli rispetto alle dimensioni del corpo, questo può essere trattato come un corpo rigido.
Se il sistema di forze applicate non permette moti rigidi il corpo si dice in **equilibrio statico**. Per un corpo in equilibrio statico la risultante delle forze applicate e quella dei momenti (rispetto ad un punto qualunque) devono essere nulle:

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_i = 0 \qquad \overline{M_O} = \sum \overline{M_{O_i}} = 0$$

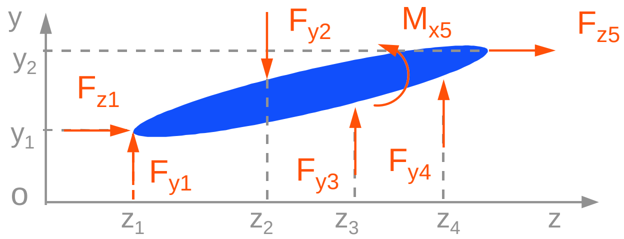
Queste equazioni vettoriali diventano 6 equazioni scalari nello spazio:

$$R_x = \sum F_{xi} = 0 \qquad M_x = \sum M_{x_i} = 0$$
$$R_y = \sum F_{yi} = 0 \qquad M_y = \sum M_{y_i} = 0$$
$$R_z = \sum F_{zi} = 0 \qquad M_z = \sum M_{z_i} = 0$$

e tre equazioni scalari in un piano (ad esempio il piano yz):

$$R_y = \sum F_{yi} = 0$$
$$R_z = \sum F_{zi} = 0$$
$$M_x = \sum M_{x_i} = 0$$

Nella figura è riportato un esempio di equilibrio statico di un corpo.



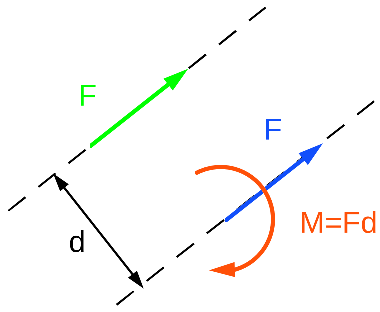
$$F_{z1} + F_{z5} = 0$$

$$F_{y1} - F_{y2} + F_{y3} + F_{y4} = 0$$

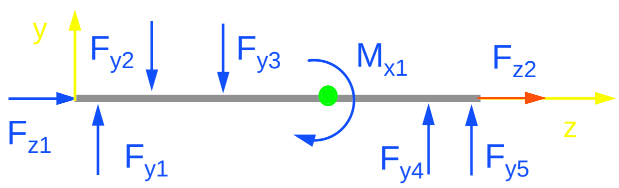
$$- F_{y1}z_1 + F_{y2}z_2 - F_{y3}z_3 - F_{y4}z_4 + F_{z1}y_1 + F_{z5}y_5 - M_{x5} = 0$$

Linee di distacco

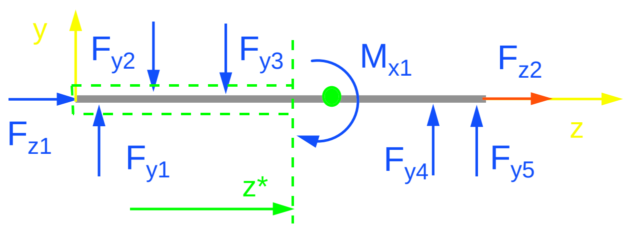
Se sono note tutte le forze applicate le caratteristiche di sollecitazione sono facilmente determinabili.
Il metodo è quello di isolare una parte del corpo tramite una **linea di distacco**. Questa parte del corpo deve rimanere in equilibrio grazie alle forze applicate sulla porzione del corpo isolata e alle caratteristiche di sollecitazione nella sezione che viene tagliata.
Utilizzando le equazioni di equilibrio risulta quindi facile ricavare le caratteristiche di sollecitazione incognite.
Nel caso delle travi, grazie alla monodimensionalità, è possibile schematizzare la trave in esame mediante la sola linea d’asse e considerare tutte le forze e i momenti agenti applicate a tale linea.
A questo proposito si ricorda che ad una forza agente ad una distanza *d* da una linea e ad essa parallela è possibile sostituire la stessa forza agente sulla linea più un momento di trasporto pari al prodotto fra la forza e la distanza *d*.

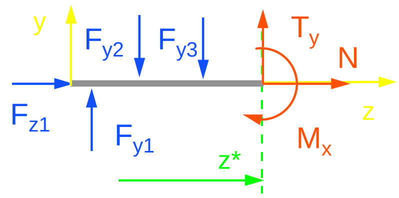


Si consideri come esempio la trave in figura soggetta alle forze e ai momenti indicati (tutti noti):



e si vogliano calcolare le caratteristiche di sollecitazione nella sezione z^*





Sarà sufficiente sostituire alla parte del corpo non compresa nella linea di distacco (tratteggiata) le corrispondenti caratteristiche di sollecitazione (essendo un problema piano si avranno come caratteristiche di sollecitazione lo sforzo normale N, il taglio T_y lungo y e il momento flettente M_x). I versi positivi di tali caratteristiche di sollecitazione sono determinati dalla 'regola della mano destra' ed indicati in figura.
A questo punto, utilizzando le equazioni di equilibrio per il caso piano, si possono scrivere tre equazioni nelle tre incognite N, T_y, M_x, in particolare una equazione alla traslazione orizzontale (z) una nella direzione trasversale (y) ed una di momento rispetto ad un punto qualunque, ad esempio l'origine 'o' degli assi da cui si ricavano le incognite.

$$\rightarrow \quad F_{z1} + N = 0$$

$$\uparrow \quad F_{y1} - F_{y2} - F_{y3} + T_y = 0$$

$$\circlearrowright_{o} \quad - F_{y1} z_1 + F_{y2} z_2 + F_{y3} z_3 - T_y z^* + M_x = 0$$

Il punto attorno al quale viene scritta l'equazione di momento è indifferente; se ad esempio si utilizza il punto di coordinata z^* l'ultima equazione viene sostituita dalla:

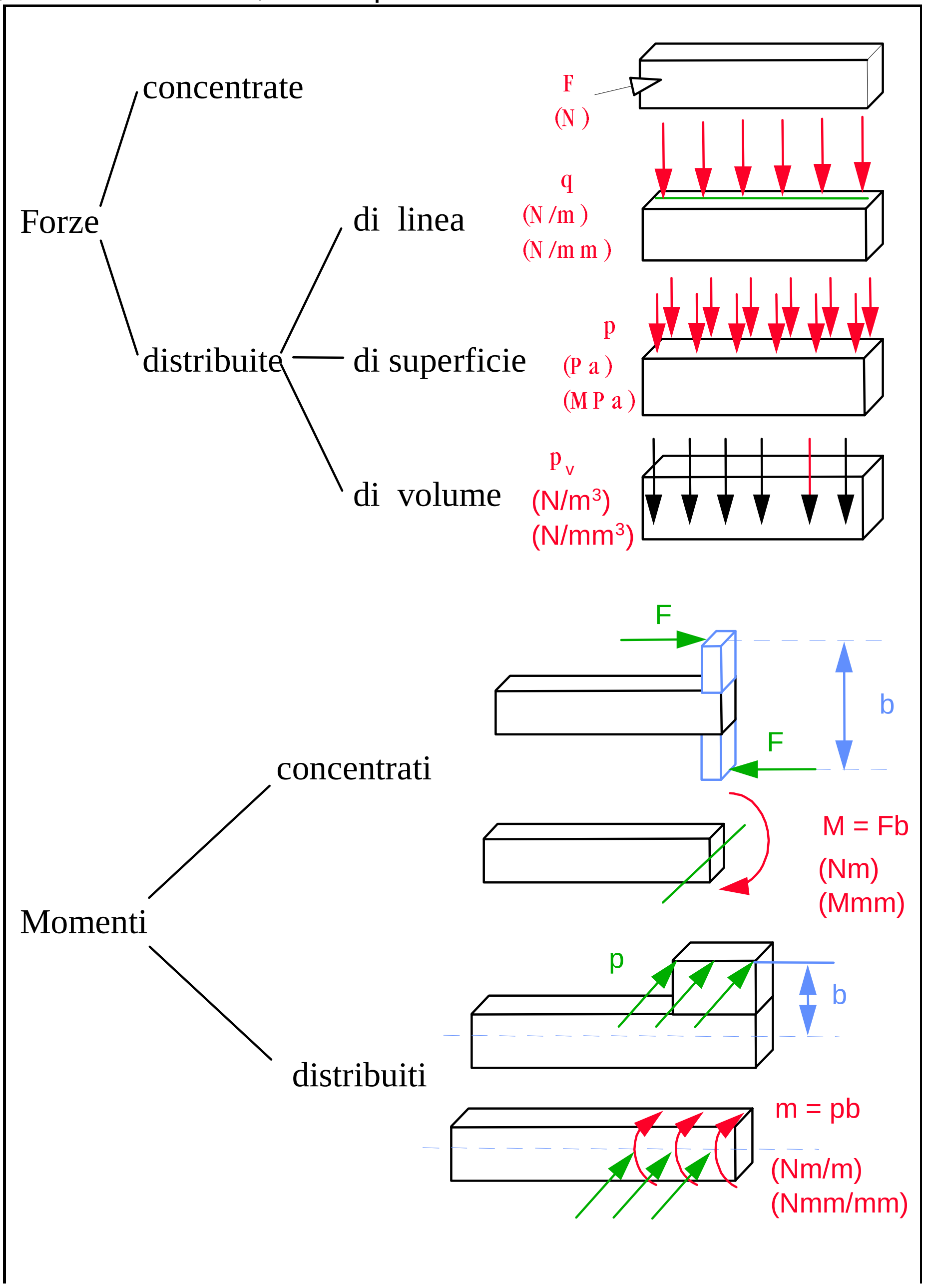
$$\circlearrowright_{z^*} \quad M_x + F_{y1}(z^* - z_1) - F_{y2}(z^* - z_2) - F_{y3}(z^* - z_3) = 0$$

ma il risultato ovviamente non cambia.

Si noti che le equazioni di equilibrio sono scritte considerando la struttura indeformata, cioè si trascurano gli spostamenti locali. Tale assunzione, necessaria per ottenere delle relazioni lineari, è valida solo se gli spostamenti sono piccoli rispetto alle dimensioni della struttura. Questo è generalmente vero in quanto gli spostamenti elastici sono di solito piccoli, ma in alcuni casi l'assunzione deve essere verificata con i metodi che vedremo in seguito.

Classificazione dei carichi

I carichi che possono essere applicati ad una struttura possono essere sia di tipo concentrato, come visto finora, sia di tipo distribuito.



Le forze concentrate hanno natura vettoriale, in quanto sono definite assegnandone modulo direzione e verso. L'unità di misura delle forze nel SI (Sistema internazionale) è il Newton (N). Oltre alle forze concentrate esistono delle forze distribuite di linea (ad es. il peso per unità di lunghezza di una trave), di superficie (ad es. la pressione idrostatica) e di volume ad esempio il peso proprio).
Altri carichi possibili sono i momenti. Il momento di una forza F rispetto ad un punto O è dato dal prodotto esterno fra la forza e la distanza d del punto O dalla retta d'azione della forza:

$$M_O = d \wedge \overline{F}$$

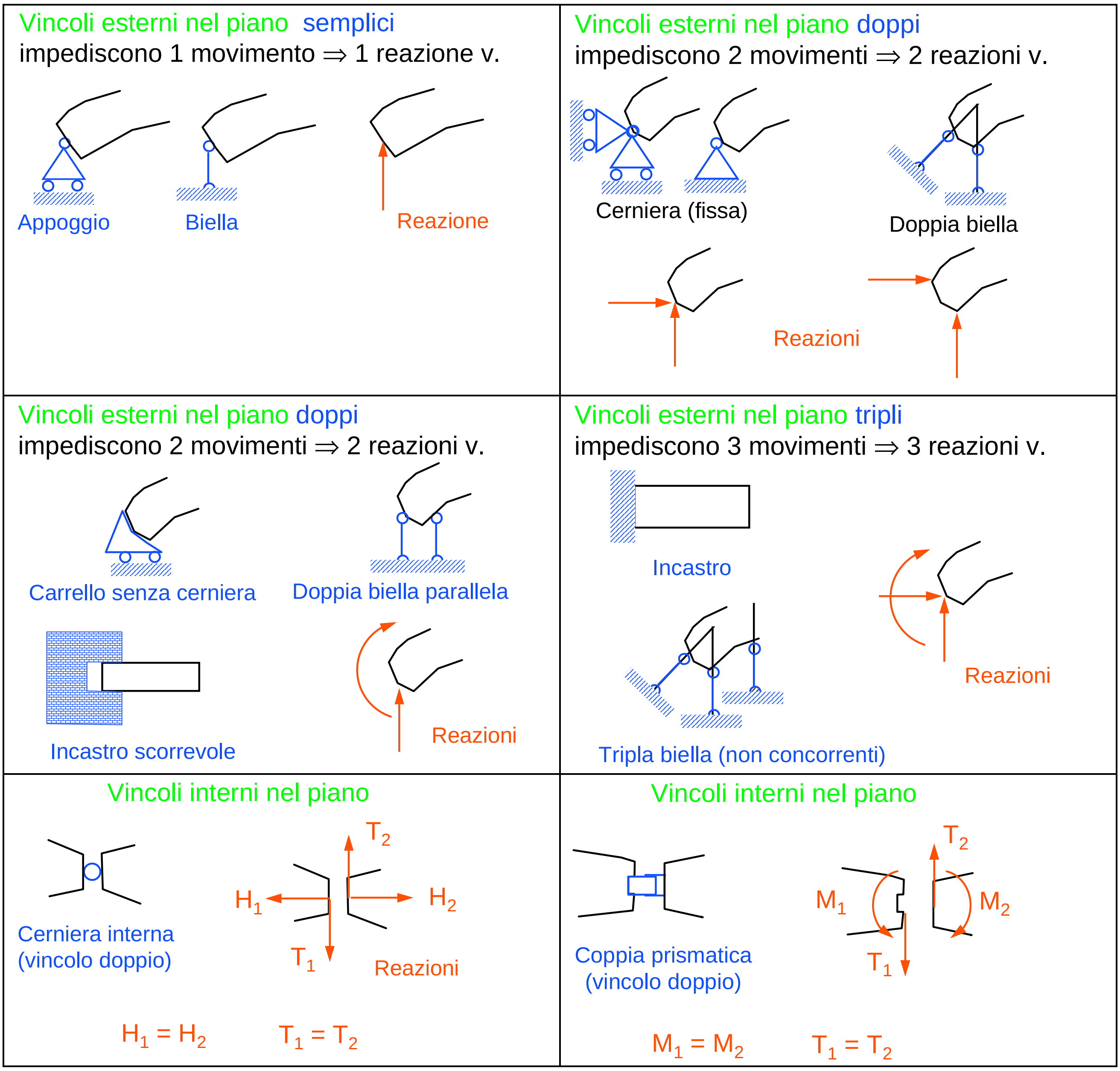
I momenti concentrati sono vettori perpendicolari sia a F sia a al segmento d. L'unità di misura nel SI è il Newton per metro (Nm) ma in meccanica spesso si utilizza il Nmm. Anche in questo caso possono esistere dei momenti distribuiti (su una linea).
A rigore i carichi concentrati non esistono, in quanto l'applicazione del carico interessa sempre una zona più o meno estesa ma finita. Ai fini pratici si assume che un carico sia concentrato quando la zona di applicazione del carico è piccola rispetto alle dimensioni caratteristiche della struttura.
La presenza di carichi distribuiti contraddice alle ipotesi relative al solido di de Saint Venant, in quanto questi carichi non sono applicati solo alle basi. Si possono comunque utilizzare le soluzioni viste sostituendo ai carichi distribuiti la loro risultante e calcolando le perturbazioni locali a parte.

Classificazione dei vincoli e reazioni vincolari

Le forze che agiscono sulle strutture non sono a priori tutte note. Infatti oltre alle forze applicate, concorrono all'equilibrio anche i vincoli che collegano la struttura al terreno o al telaio della macchina (vincoli esterni) o che collegano fra loro elementi diversi della struttura (vincoli interni).
I vincoli possono essere considerati da due punti di vista:

- dal punto di vista *cinematico* essi impongono alcuni spostamenti e/o rotazioni ai punti della struttura in cui sono applicati, ad esempio annullandoli, (vincoli esterni) o impongono spostamenti e/o rotazioni uguali a due parti della struttura (vincoli interni);
- dal punto di vista *statico* i vincoli trasmettono delle forze e dei momenti; i vincoli interni trasmettono forze e momenti fra un corpo e l'altro, i vincoli esterni trasmetto delle forze e momenti che vanno ad equilibrare i carichi applicati; tali forze e momenti vengono detti reazioni vincolari che sono, a priori, incognite.

Considerando un problema piano, i vincoli possono essere semplici, doppi o tripli in base al numero di spostamenti e rotazioni che impediscono e, conseguentemente, al numero di reazioni che trasmettono al corpo in esame.
Nelle figure seguenti sono indicati i principali tipi di vincoli nel piano con la loro rappresentazione grafica. Si considerano solo i vincoli nel piano perché è consuetudine ridurre problemi spaziali a due problemi piani (su piani ortogonali).



Si deve fare attenzione al fatto che lo stesso dispositivo fisico può avere effetti diversi nei due piani considerati e deve essere quindi schematizzato in modo diverso nei due casi.

Grado di iperstaticità

Ci chiediamo adesso se è possibile calcolare facilmente le reazioni vincolari. Questo è possibile solo se il numero di reazioni vincolari incognite è uguale al numero di equazioni di equilibrio della struttura che possiamo scrivere. Si consideri una struttura composta da m corpi rigidi collegati fra loro e con il telaio tramite dei vincoli. Il numero di equazioni di equilibrio che è possibile scrivere è:

$$e = 3 \cdot m$$

Il numero di spostamenti impediti, e quindi di reazioni vincolari incognite sarà:

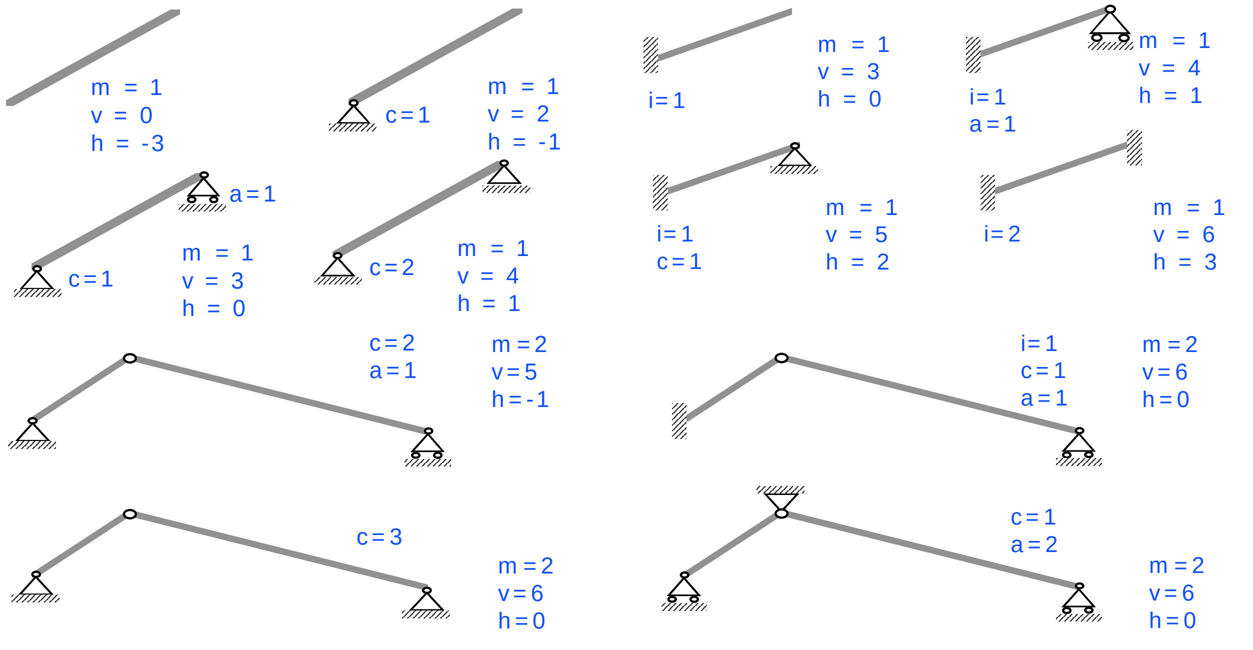
$$v = 3 \cdot i + 2(c + p) + a$$

dove ‘i’ è il numero di incastri, ‘c’ e ‘p’ sono i numeri di cerniere e di coppie prismatiche, ‘a’ è il numero di appoggi che collegano la struttura al telaio o i vari corpi in cui si suddivide la struttura.
Si definisce come *grado di iperstaticità* ‘h’ la differenza fra il numero di incognite e il numero di equazioni disponibili:

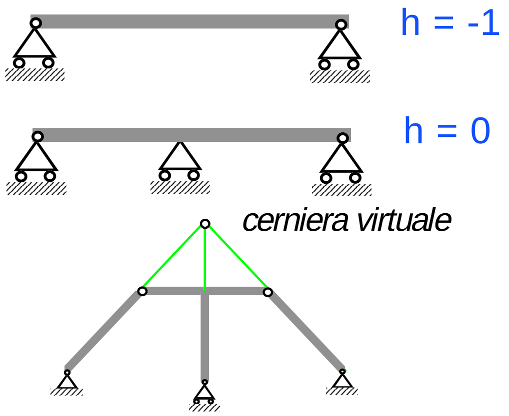
$$h = v - e = 3 \cdot i + 2(c + p) + a - 3 \cdot m$$

- se h < 0 la struttura è *labile*, cioè le forze applicate, se non sono autoequilibrate, provocano dei moti rigidi;
- se h = 0 la struttura è *isostatica*, ed è in equilibrio statico qualunque sia il sistema di forze applicato;
- se h > 0 la struttura è iperstatica, è in equilibrio statico ma il numero di forze incognite è superiore al numero di equazioni indipendenti che è possibile scrivere.

Considerando corpi rigidi la condizione necessaria affinché si possano calcolare le reazioni vincolari è che la struttura sia isostatica, cioè che sia h = 0. Nelle figure seguenti sono riportati degli esempi di calcolo del grado di iperstaticità.

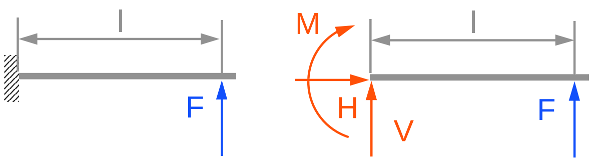


Bisogna comunque fare attenzione al fatto che h = 0 è condizione necessaria ma non sufficiente affinché sia possibile calcolare le reazioni vincolari, infatti i vincoli applicati devono essere efficaci, cioè togliere alla struttura tutti i possibili gradi di libertà. Se si considera il caso della figura sotto si vede che l’applicazione di tre appoggi (h= 0) su una stessa linea d’asse non toglie alla struttura la labilità orizzontale, mentre rende la struttura iperstatica nella direzione verticale Bisogna inoltre fare attenzione alle strutture anomale, dove la disposizione dei vincoli crea delle cerniere ‘virtuali’ che rendono labile la struttura.



Calcolo delle reazioni vincolari

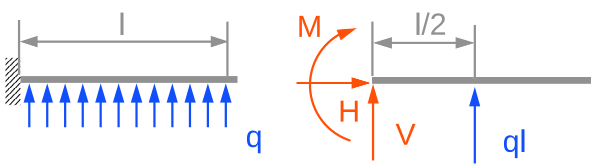
Il calcolo delle reazioni vincolari di una struttura isostatica è effettuato sostituendo al vincolo la reazione vincolare incognita (se il vincolo è doppio o triplo tulle le reazioni vincolari incognite) e scrivendo quindi le equazioni di equilibrio della struttura. Risolvendo tali equazioni si ricavano i valori delle incognite.
Nelle figure si riportano due esempi di calcolo delle reazioni vincolari per un corpo semplice nel piano. Si noti che i carichi distribuiti possono essere sostituiti dalla loro risultante (applicata al loro baricentro).



$H = 0$

$V+F=0 \Rightarrow V = -F$

o $M-Fl=0 \Rightarrow M = Fl$

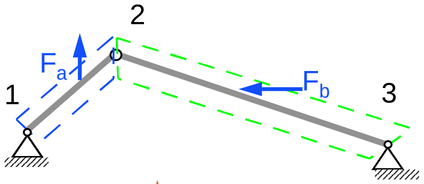


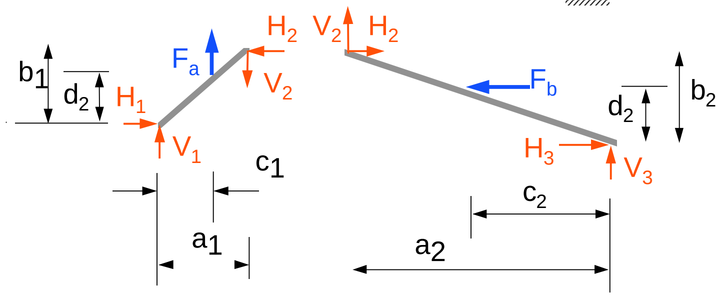
$H = 0$

$V+ql=0 \Rightarrow V = -ql$

o $M-ql \cdot l/2 = 0 \Rightarrow M = ql^2/2$

Per le strutture con vincoli interni, cioè composte da più corpi, in primo luogo si separano i corpi, sostituendo ai vincoli le forze scambiate. Poi per ognuno dei due corpi vengono scritte le 3 equazioni di equilibrio:





Corpo a

$\rightarrow H_1 - H_2 = 0$

$\uparrow V_1 + F_a - V_2 = 0$

$\supset F_a \cdot c_1 + H_2 \cdot b_1 - V_2 \cdot a_1 = 0$

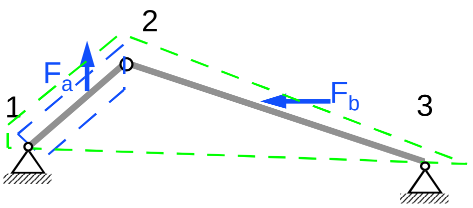
Corpo b

$\rightarrow H_3 + H_2 - F_b = 0$

$\uparrow V_2 + V_3 = 0$

$\supset F_b \cdot d_2 - H_2 \cdot b_2 - V_2 \cdot a_2 = 0$

Ottenendo così sei equazioni in sei incognite.
La scelta delle linee di distacco non è univoca: nel nostro caso una alternativa e presentata nella figura sotto

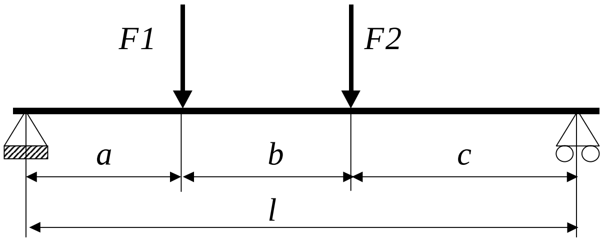


Si noti che non è necessario scrivere sempre le equazioni di equilibrio finora utilizzate (traslazione orizzontale, traslazione verticale e momento rispetto ad un punto).
L'importante è che le tre equazioni nel piano siano linearmente indipendenti. Le alternative possibili risultano essere:

- due equazioni di equilibrio alla traslazione (dir. non parallele) e una equazione di equilibrio alla rotazione
- due equazioni di equilibrio alla rotazione (punti diversi) e una equazione di equilibrio alla traslazione in direzione non perpendicolare alla congiungente i due punti
- tre equazioni di equilibrio alla rotazione intorno a punti non allineati.

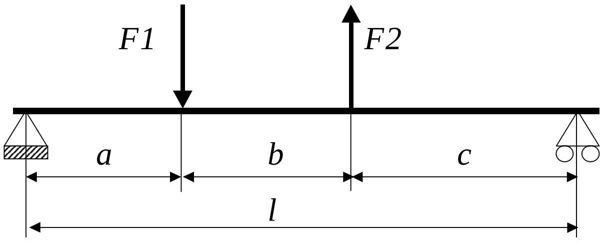
Esercizio 3-1a

Data la struttura schematizzata in figura calcolare le reazioni vincolari.
Dimensioni: a= 70 mm, b= 80 mm, c= 100 mm; Forze F1= 1000 N, F2 = 1500 N
Risolvere prima in modo letterale.



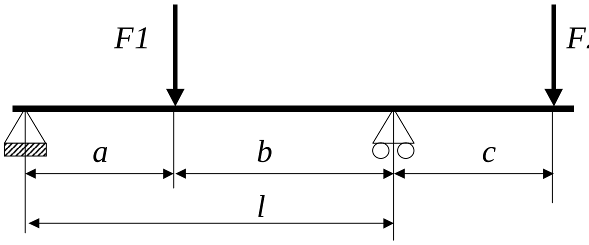
Esercizio 3-1b

Data la struttura schematizzata in figura calcolare le reazioni vincolari.
Dimensioni: a= 70 mm, b= 80 mm, c= 100 mm; Forze F1= 1000 N, F2 = 1500 N
Risolvere prima in modo letterale.



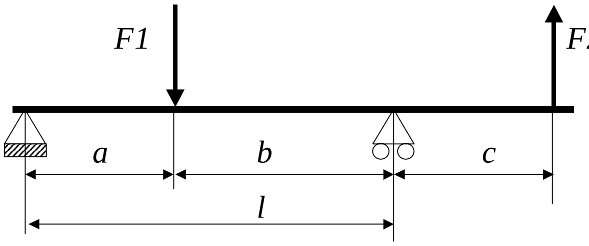
Esercizio 3-1c

Data la struttura schematizzata in figura calcolare le reazioni vincolari.
Dimensioni: a= 90 mm, b= 135 mm, c= 75 mm; Forze F1= 1000 N, F2 = 1500 N
Risolvere prima in modo letterale.



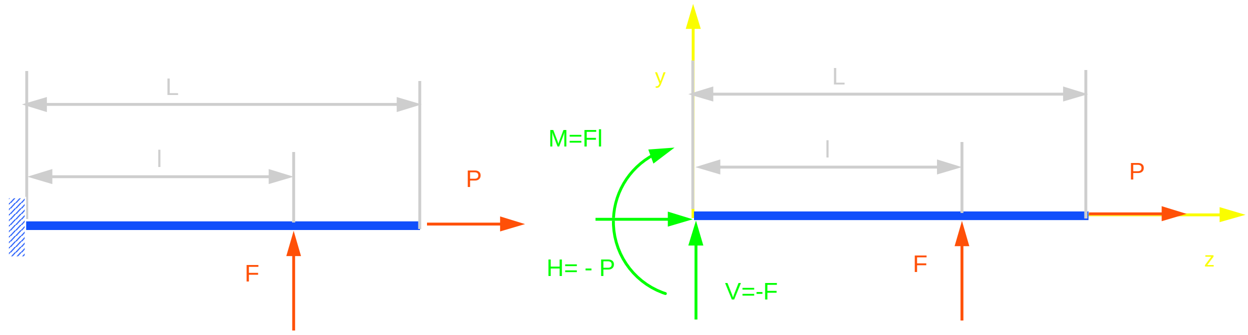
Esercizio 3-1d

Data la struttura schematizzata in figura calcolare le reazioni vincolari.
Dimensioni: a= 90 mm, b= 135 mm, c= 75 mm; Forze F1= 1000 N, F2 = 1500 N N
Risolvere prima in modo letterale.

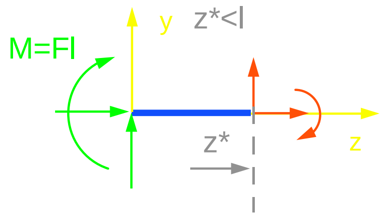


Diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione

Una volta note le reazioni vincolari sono note tutte le forze agenti sulla trave, ed è quindi possibile valutare le caratteristiche di sollecitazione in ogni sezione. Per visualizzare l'andamento delle caratteristiche di sollecitazione nelle parti delle strutture è comodo utilizzare dei diagrammi che riportano il valore di ogni caratteristica in funzione della posizione. Tali diagrammi vengono disegnati sulla linea d'asse delle struttura stessa che funge da ascissa, mentre in ordinata viene diagrammata la caratteristica in esame.
Si vogliano per esempio tracciare le caratteristiche di sollecitazione della struttura in figura (mensola incastrata). In primo luogo si calcolano le reazioni vincolari.



Per il calcolo delle caratteristiche di sollecitazione è necessario distinguere in quale tratto si trova la sezione considerata; infatti sono diversi i carichi da includere nelle equazioni di equilibrio. Si consideri la coordinata z^*; bisognerà distinguere i due casi in cui $z^* < l$ e $z^* > l$. nel primo caso le equazioni di equilibrio in funzione di z^* saranno:

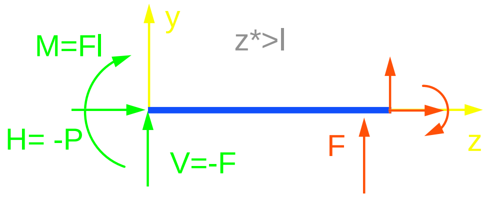


$N = -H = P$

$T_y = -V = F$

$M_x = -M - Vz^* = F(z^* - l)$

mentre per $z^* > l$ si avrà:



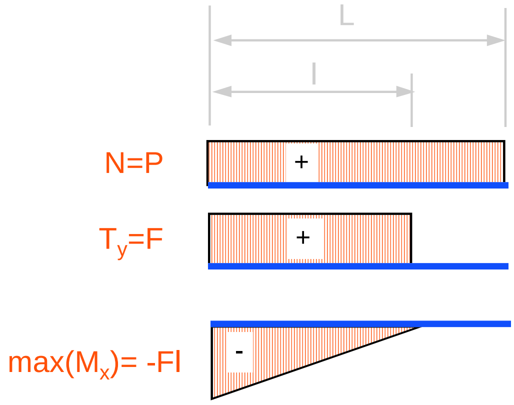
$T_y = 0$

$N = -H = P$

$M_x = 0$

$(M_x + M + Vz^* + F(z^* - l) = 0 \quad \Rightarrow \quad M_x = -Fl + Fz^* - F(z^* - l) = 0)$

In definitiva, utilizzando le equazioni scritte in precedenza si avranno i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione riportati a sotto.

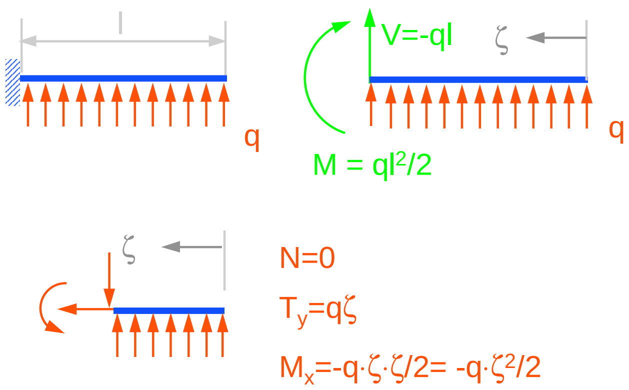


Si noti che l'andamento del taglio è costante, mentre quello del momento è lineare. Infatti abbiamo già visto che il taglio è la derivata del momento:

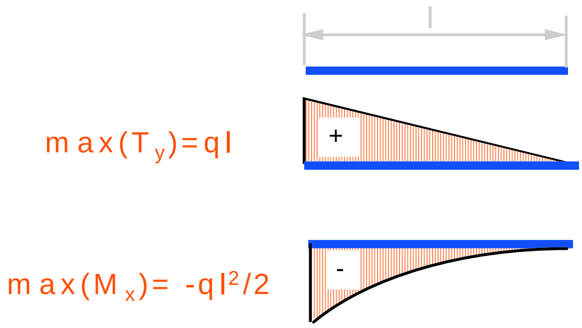
$$T_y = \frac{dM_x}{dz}$$

La pendenza del momento cambia nei punti di applicazione delle forze.

Si consideri adesso il caso di una mensola soggetta ad un carico uniformemente distribuito in direzione trasversale. Per comodità si utilizza una diversa coordinata ζ che ha origine all'estremità libera della trave; si noti che in questo caso la faccia della sezione di volta in volta considerata è di tipo negativo. Si ottengono le equazioni in funzione di ζ riportate in figura:



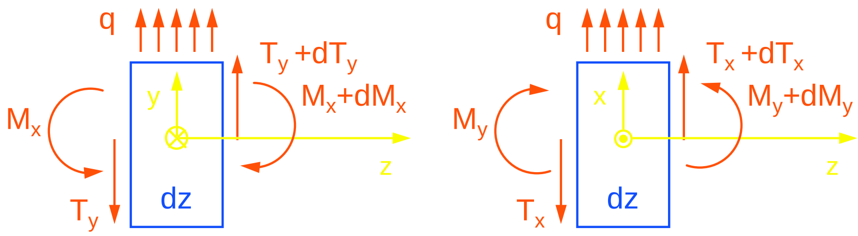
e quindi i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione riportate sotto:



Si noti che l'andamento del taglio è lineare mentre quello del momento è parabolico. anche in questo caso vale la relazione fra momento e taglio.

$$T_y = \frac{dM_x}{dz}$$

Nel caso in cui vi sia un carico distribuito, si può inoltre ricavare una relazione fra taglio T e carico distribuito q considerando l'equilibrio di un elemento di trave. Nei due piani yz e xz si hanno le seuenti relazioni:



$$\frac{dT_y}{dz} = -q \qquad \frac{dM_x}{dz} = T_y \qquad \frac{dT_x}{dz} = -q \qquad \frac{dM_y}{dz} = -T_x$$

Vi sono alcune proprietà dei diagrammi utili sia per tracciarli in modo veloce sia per un eventuale controllo:

- *senza carico distribuito q:* l'andamento del taglio T è costante, quello del momento flettente M è lineare
- *con carico distribuito q (costante):* l'andamento del taglio T è lineare, quello del momento flettente M è parabolico
- in corrispondenza di una forza concentrata: discontinuità del diagramma di taglio T, e una variazione di pendenza del momento flettente M
- in corrispondenza di una coppia concentrata il taglio T non varia mentre il momento flettente M presenta una discontinuità.
- In corrispondenza di appoggi di estremità (senza coppia concentrata) e di cerniere (che interrompono la continuità) il momento flettente si annulla.

Esercizio 3-2a

Con riferimento all'esercizio 3-1a tracciare i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione

Esercizio 3-2b

Con riferimento all'esercizio 3-1b tracciare i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione

Esercizio 3-2c

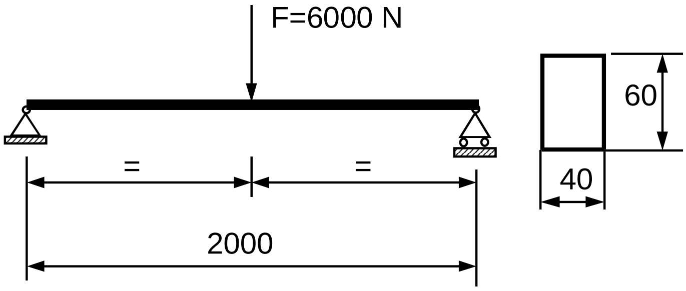
Con riferimento all'esercizio 3-1c tracciare i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione

Esercizio 3-2d

Con riferimento all'esercizio 3-1d tracciare i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione

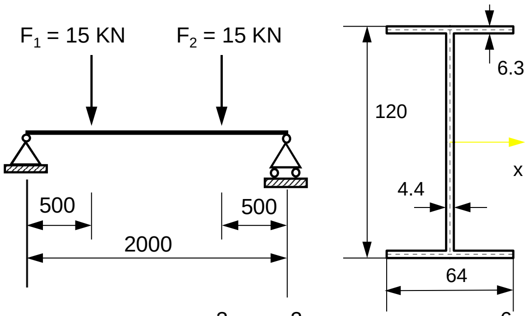
Esercizio 3-3

Una trave di sezione rettangolare 60x40 mm lunga 2 m, appoggiata alle estremità, è soggetta ad un carico verticale di 6000 N che agisce nella mezzeria.
Calcolare le massime tensioni normali e tangenziali.



Esercizio 3-4

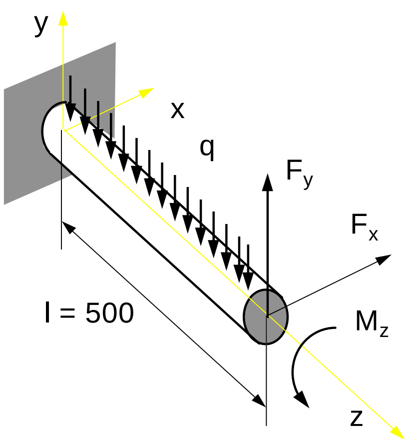
Una trave IPE 120 UNI 5398 lunga 2 m è soggetta ai carichi indicati in figura. Determinare le tensioni agenti sulla trave.



Caratteristiche della sezione: $A = 1.32 \cdot 10^3$ mm^2 $J_{xx} = 3.18 \cdot 10^6$ mm^4 $J_{yy} = 2.77 \cdot 10^5$ mm^4)

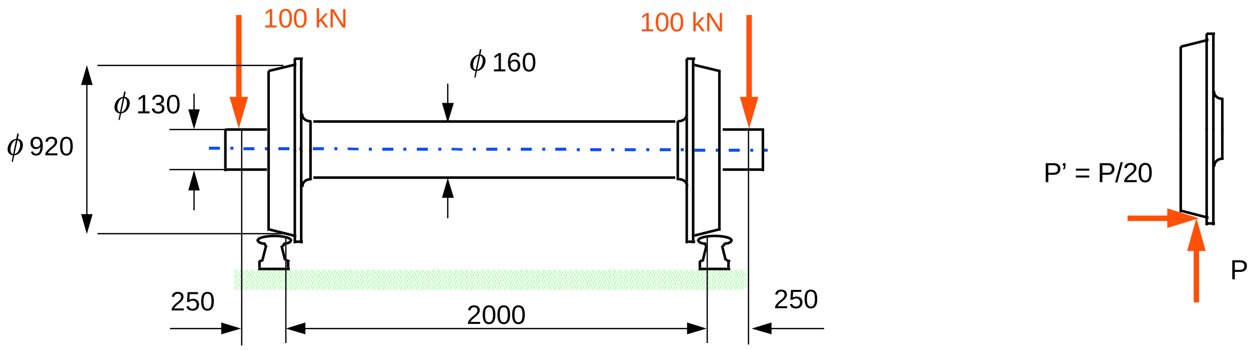
Esercizio 3-5

Una trave incastrata lunga 500 mm, di sezione circolare ∅ 35 mm, è soggetta ad un momento torcente M_z = 360 Nm, ad un carico distribuito in direzione verticale (q) di 700 N/m diretto verso il basso, ad un carico F_y = 1000 N verso l'alto ed un carico in direzione orizzontale F_x = 1200 N, applicati all'estremità libera della sezione.
Calcolare la tensione ideale nel punto più sollecitato della trave.



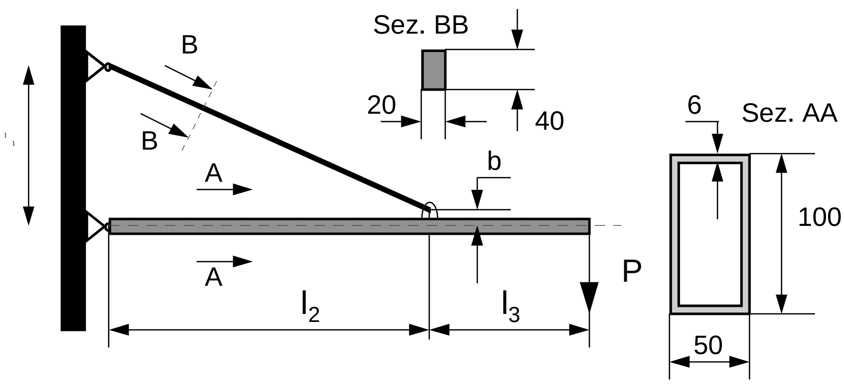
Esercizio 3-6

La figura illustra schematicamente un assale ferroviario con i carichi ad esso applicati. Si noti che, a causa della geometria del contatto fra ruota e rotaia, se la rotaia applica un carico P in direzione verticale, sarà presente anche un carico orizzontale P' pari ad un ventesimo di P.(nel nostro caso 5000 N). Calcolare le tensioni agenti nel tratto fra le due ruote.



Esercizio 3-7

Nella figura è schematizzato il braccio di un paranco formato da una trave orizzontale di sezione rettangolare cava incernierata in un muro e da un'asta[1] che funge da tirante. Calcolare le tensioni agenti.

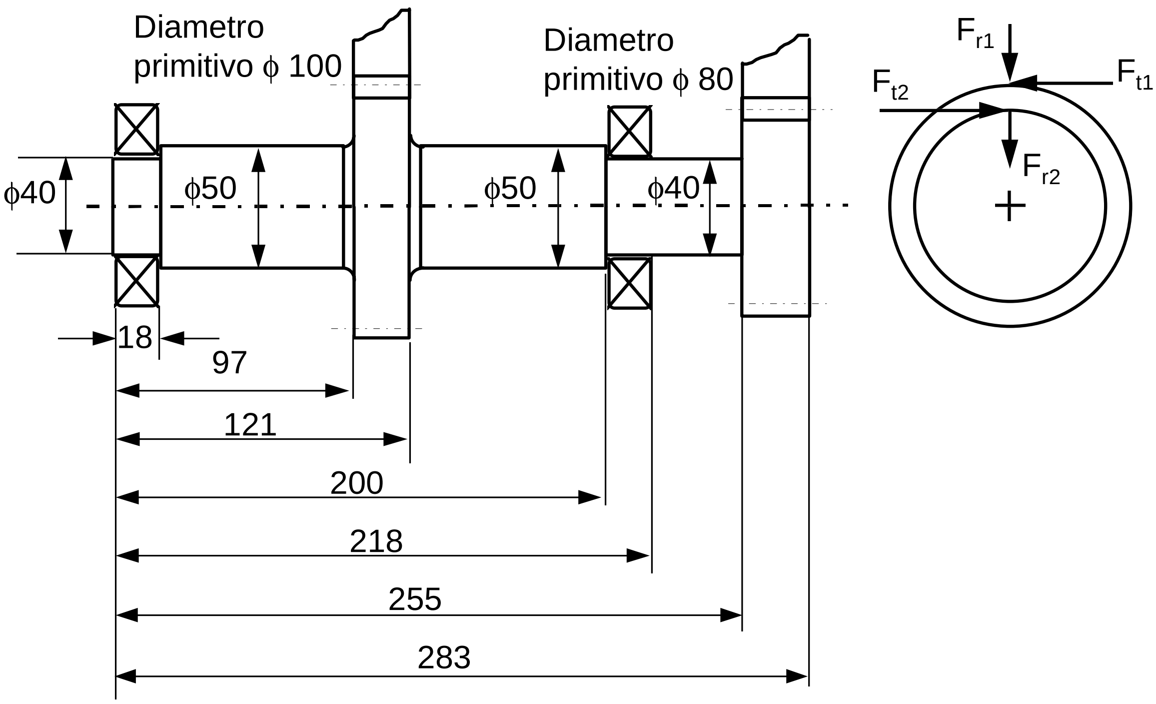


Dati: l_1 = 1 m ; l_2 = 1.5 m; l_3 = 0.9 m b= 100 mm; P = 5 kN

Esercizio 3-8

La figura illustra schematicamente l'albero di rinvio fra due ruote dentate a denti diritti con angolo di pressione di 20°. Il cuscinetto di sinistra è bloccato sia sull'anello esterno sia sull'anello interno e sopporta eventuali carichi assiali; il cuscinetto di destra è libero di muoversi assialmente. Sapendo che il momento torcente trasmesso è di 200 Nm, calcolare le tensioni agenti sull'albero.

[1] *Asta = elemento che sopporta solo carichi normali, agenti lungo l'asse del corpo. Sono aste tutti i corpi incernierati alle estremità in cui i carichi sono applicati solo in corrispondenza delle cerniere. La risultante delle forze applicate è diretta lungo l'asse dell'asta.*
Tirante = Asta posta in trazione. Puntone = Asta posta in compressione.



Torna ad inizio documento

Modulo 4

Soluzione esercizi