Spostamenti locali

In genere il progettista di una struttura non è chiamato solo a verificare che le tensioni ideali siano al di sotto della tensione ammissibile ma anche che gli spostamenti provocati dai carichi siano compatibili con la funzionalità della struttura o della macchina che si sta progettando.
Rigidezze elevate (cioè piccoli spostamenti) possono essere richieste ad esempio per i telai delle macchine utensili che devono garantire la possibilità di effettuare lavorazioni accurate. Inflessioni eccessive possono comportare interferenza di componenti diversi nel funzionamento di una macchina o la perdita del corretto ingranamento fra due ruote dentate.
Vi sono casi in cui una elevata rigidezza è richiesta per eliminare problemi derivanti da vibrazioni delle macchine.
Spesso lo spostamento massimo ammissibile è determinato da norme o dalle specifiche tecniche della macchina, e le strutture a volte devono essere irrigidite a tal punto da rendere praticamente trascurabili, al fine della sicurezza, le tensioni presenti nella struttura. Vedremo nel seguito alcuni semplici casi di calcolo degli spostamenti

Comportamento torsionale (sezioni circolari)

Nel caso di una trave a sezione circolare di raggio R soggetta a momento torcente (che vengono dette ‘alberi’), lo spostamento locale consiste in una rotazione delle sezioni.
Per valutare tale rotazione ricordiamo alcune formule già viste:

Relazione fra l’angolo di rotazione e lo scorrimento: $\Delta\theta = \dfrac{\gamma_R \Delta L}{R}$

Relazione fra la tensione massima e momento torcente applicato $\tau_R = \dfrac{M_z}{J_p} R$

Relazione fra tensione e angolo di scorrimento (legge di Hooke): $\tau = G\gamma$

(G = modulo di elasticità tangenziale)

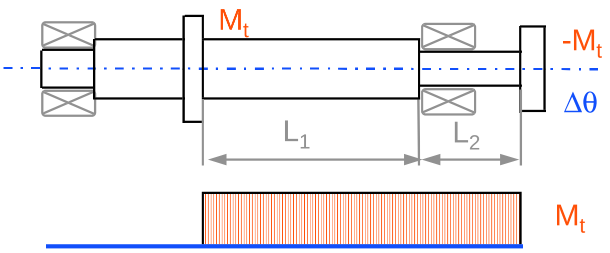
Combinando queste relazioni si ottiene facilmente la relazione che lega la rotazione relativa fra due sezioni poste alla distanza ΔL in una trave a sezione circolare soggetta a un momento torcente M_z:

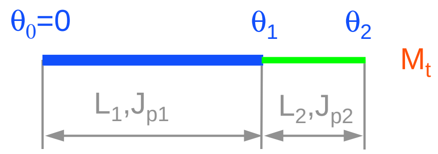
$$\Delta\theta = \frac{M_z \Delta L}{G J_p}$$

Si definisce <u>rigidezza torsionale</u> il rapporto fra il momento torcente applicato e la rotazione relativa:

$$K_T = \frac{M_z}{\Delta\theta} = \frac{G J_p}{\Delta L}$$

Nel caso di un albero a sezione variabile, la rigidezza complessiva può essere valutata con il seguente ragionamento: si consideri l’albero in figura formato da due tratti di sezione diversa soggetti allo stesso momento torcente. Nella figura è mostrata anche la schematizzazione con gli angoli delle tre sezioni interessate.





L'angolo di rotazione totale sarà:

$$\Delta\theta = (\theta_2 - \theta_0) = (\theta_2 - \theta_1) + (\theta_1 - \theta_0)$$

dove i due addendi sono facilmente calcolabili perchè si riferiscono a tratti a sezione costante:

$$(\theta_2 - \theta_1) = \frac{M_t}{K_2} = \frac{M_t L_2}{GJ_{p2}} \qquad (\theta_1 - \theta_0) = \frac{M_t}{K_1} = \frac{M_t L_1}{GJ_{p1}}$$

Avremo quindi che la rotazione complessiva può essere calcolata come somma dei due termini visti:

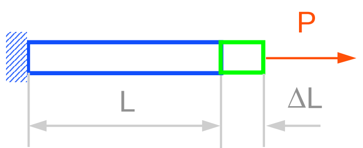
$$\Delta\theta = \frac{M_t}{K_t} = M_t\left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right)$$

e quindi la rigidezza complessiva K_t (da non confondere con il coefficiente di concentrazione delle tensioni….) è data dalla formula:

$$\frac{1}{K_t} = \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right) \quad \Rightarrow \quad K_t = \frac{K_1 \cdot K_2}{K_1 + K_2}$$

Comportamento estensionale

In modo analogo a quanto visto per il comportamento torsionale, e dalla definizione stessa di deformazione, per il caso di una trave soggetta ad un carico normale si ottiene lo spostamento di una sezione rispetto ad una sezione considerata ferma:

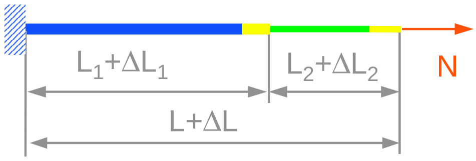


$$\Delta L = \varepsilon \cdot L = \frac{\sigma}{E} L = \frac{P}{EA} L$$

Anche in questo caso si definisce la <u>rigidezza assiale</u> della trave come rapporto fra il carico e lo spostamento ottenuto:

$$K_A = \frac{P}{\Delta L} = \frac{EA}{L}$$

Nel caso di travi composte da due tratti di sezione diverse si utilizza un procedimento analogo a quello visto per il comportamento torsionale:



L'allungamento complessivo sarà la somma degli allungamenti subiti dai due tratti, dati dalle formule:

$$\Delta L_1 = \frac{N}{K_1} = \frac{NL_1}{EA_1} \qquad \Delta L_2 = \frac{N}{K_2} = \frac{NL_2}{EA_2}$$

e quindi sarà:

$$\Delta L = \frac{N}{K_t} = N \cdot \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right)$$

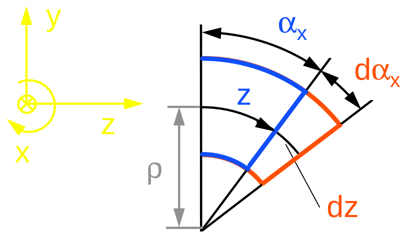
Anche in questo caso la rigidezza complessiva è data quindi dalla formula:

$$\frac{1}{K_t} = \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right) \Rightarrow K_t = \frac{K_1 \cdot K_2}{K_1 + K_2}$$

Si noti la completa analogia formale fra il comportamento torsionale e quello estensionale.

Comportamento flessionale (equazione della linea elastica)

Quando si considera il comportamento flessionale gli spostamenti consistono sia in una rotazione relativa fra due sezioni sia in uno spostamento ortogonale alla linea d'asse indeformata; tale spostamento è chiamato 'freccia'.
Si consideri il comportamento della trave in un piano xy e si trascurino gli spostamenti dovuti al taglio. Si indichi con $d\alpha_x$ la rotazione fra due sezioni disposte ad una distanza dz (vedi figura).



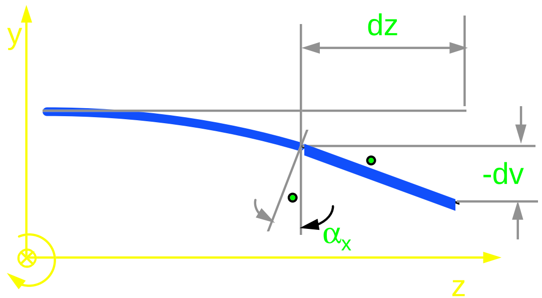
Ricordiamo che la curvatura k_x (inverso del raggio di curvatura) è legata al momento flettente applicato dalla relazione:

$$\frac{1}{\rho} = k_x = \frac{M_x}{EJ_{xx}}$$

Osservando la figura è facile ricavare la relazione fra il momento applicato e la variazione della rotazione della sezione:

$$dz = \rho d\alpha_x \Rightarrow \frac{d\alpha_x}{dz} = \frac{1}{\rho} = k_x = \frac{M_x}{EJ_{xx}} \Rightarrow \frac{d\alpha_x}{dz} = \frac{M_x}{EJ_{xx}}$$

Da cui si ricava che la derivata della rotazione è proporzionale al momento applicato.



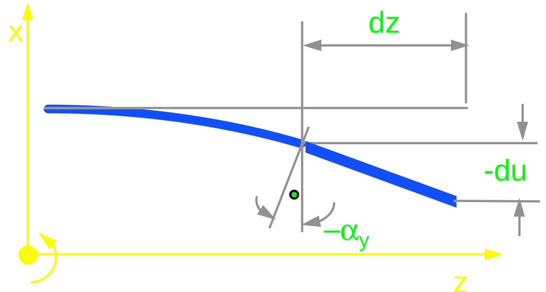
La relazione fra la freccia ‘v’ e la rotazione si ricava osservando la figura sopra:

$$-dv \cong dz \cdot \tan(\alpha_x) \cong dz \cdot \alpha_x \Rightarrow \frac{dv}{dz} = -\alpha_x$$

Derivando ancora rispetto a dz entrambi i membri si ottiene la relazione fra lo spostamento e il momento applicato:

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{d\alpha_x}{dz} = -k_x = -\frac{M_x}{EJ_{xx}} \Rightarrow \frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M_x}{EJ_{xx}}$$

Quest’ultima relazione differenziale viene detta equazione della linea elastica.
Per ottenere la linea elastica si parte quindi dal diagramma di momento diviso per il modulo di elasticità del materiale e per il momento d’inerzia della sezione. Si effettua quindi una doppia integrazione in cui le costanti di integrazione sono determinate conoscendo i vincoli.
Nel piano xz il ragionamento è del tutto analogo, facendo solamente attenzione che a causa del sistema di riferimento che abbiamo scelto (terna destrorsa), i segni vengono cambiati:



$$-du \cong dz \cdot \tan(-\alpha_y) \cong -dz \cdot \alpha_y \Rightarrow \frac{du}{dz} = \alpha_y$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{M_y}{EJ_{yy}}$$

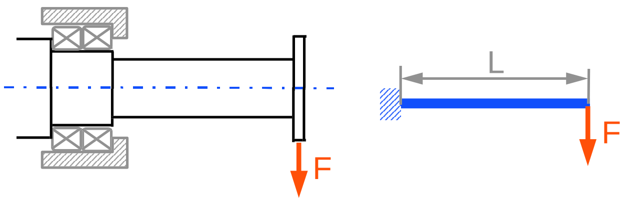
(Lo spostamento in direzione x viene indicato tradizionalmente con la lettera ‘u’)
Le equazioni della linea elastica sono le ultime di una serie di equazioni fondamentali che legano fra loro varie grandezze e che vengono qui riassunte:

Piano yz	*Piano xz*
$\frac{dT_y}{dz} = -q_y$	$\frac{dT_x}{dz} = -q_x$
$\frac{dM_x}{dz} = T_y$	$\frac{dM_y}{dz} = -T_x$
$\frac{d\alpha_x}{dz} = \frac{M_x}{EJ_{xx}}$	$\frac{d\alpha_y}{dz} = \frac{M_y}{EJ_{yy}}$
$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M_x}{EJ_{xx}}$	$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{M_y}{EJ_{yy}}$

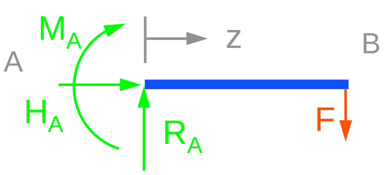
Nel caso del comportamento flessionale si devono considerare due rigidezze, una relativa alla rotazione e una alla freccia. Poiché le deformate non sono costanti, per consuetudine si intendono come rigidezze i rapporti fra il carico e lo spostamento massimo (presi in valore assoluto). Le espressioni della rigidezza variano evidentemente da struttura a struttura e non è possibile dare delle formule di uso generale.

Esempio di integrazione della linea elastica

Si consideri l'albero a sbalzo illustrato in figura. La coppia di cuscinetti affiancati si comporta come un incastro, per cui la schematizzazione è quella riportata a fianco.



In primo luogo occorre calcolare le reazioni vincolari:

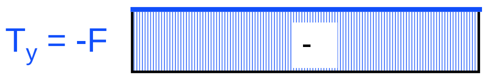


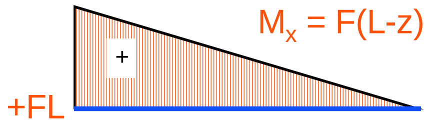
$H_A = 0$

$R_A - F = 0 \Rightarrow R_A = F$

A) $M_A + FL = 0 \Rightarrow M_A = -FL$

Una volta calcolate le reazioni vincolari si tracciano i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione:





Si noti che in assenza di carichi distribuiti il taglio è costante, mentre il momento flettente varia linearmente.
Si integra quindi una prima volta il diagramma di momento diviso per il modulo di elasticità (E) e per il momento d'inerzia diametrale (siamo in presenza di una sezione circolare), ottenendo l'andamento della rotazione a meno della costante di integrazione:

$$-\frac{d\alpha_x}{dz} = \frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{M_x}{EJ_D} = -\frac{F}{EJ_D}(L - z) \qquad \alpha_x = \int \frac{M_x}{EJ_D}dz = \frac{F}{EJ_D}\left(Lz - \frac{z^2}{2}\right) + C_1$$

Integrando una seconda volta si ottiene l'andamento della freccia a meno delle costanti di integrazione:

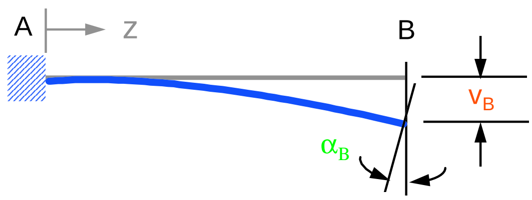
$$v = -\int \alpha_x dz = -\frac{F}{EJ_D}\left(L\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right) - C_1 z + C_2$$

Le costanti di integrazione si determinano imponendo le condizioni al contorno date dai vincoli. Nel caso in esame per z = 0 sia la freccia sia la rotazione sono nulle (abbiamo schematizzato la coppia di cuscinetti come un incastro. Si ottiene quindi:

$$C_1 = 0 \qquad C_2 = 0$$

Le equazioni della rotazione e della freccia sono quindi:

$$\alpha_x = \frac{F}{EJ_D}\left(Lz - \frac{z^2}{2}\right) \qquad v = -\frac{F}{EJ_D}\left(L\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right)$$



In particolare il valore della rotazione massima e della freccia massima si hanno in corrispondenza della sezione dove è applicato il carico (z = L):

$$\alpha_B = \frac{FL^2}{2EJ_D} \qquad v_B = -\frac{FL^3}{3EJ_D}$$

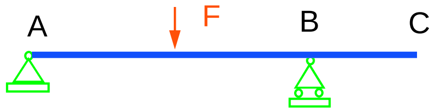
Le rigidezze, nel senso detto prima, di questa struttura e di tutte quelle similari (mensole a sezione costante) saranno quindi:

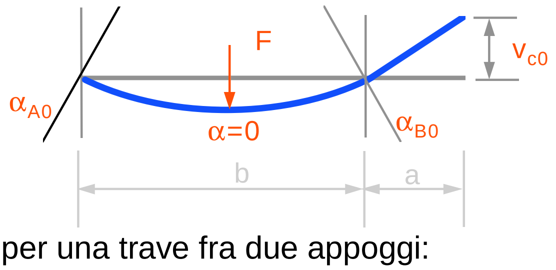
$$K_{f\alpha} = \left|\frac{F}{\alpha_B}\right| = \frac{2EJ_D}{L^2} \qquad K_{fv} = \left|\frac{F}{v_B}\right| = \frac{3EJ_D}{L^3}$$

Nel caso di diagrammi di momento che presentino discontinuità, oppure nel caso di sezioni non costanti, il procedimento è analogo, con la differenza che il diagramma di momento deve essere diviso di volta in volta per l'opportuno momento d'inerzia (oltre che per il modulo elastico) e che l'integrazione viene effettuata a tratti, imponendo delle condizioni di continuità fra i vari tratti.
Questi casi (discontinuità del diagramma del momento e/o discontinuità delle sezioni), che sono di gran lunga i più comuni in meccanica, possono essere risolti effettuando una integrazione grafica del diagramma di momento diviso per ogni tratto dall'opportuno valore di EJ.
Il procedimento grafico risulta comunque piuttosto lungo e possibile fonte di errori.
Fortunatamente questi problemi sono modernamente affrontati per via numerica utilizzando i calcolatori, o con programmi che effettuano automaticamente l'integrazione o con programmi basati sul metodo degli elementi finiti.
La teoria del metodo e il suo utilizzo esulano dallo scopo di questo corso, e non verranno quindi affrontati.

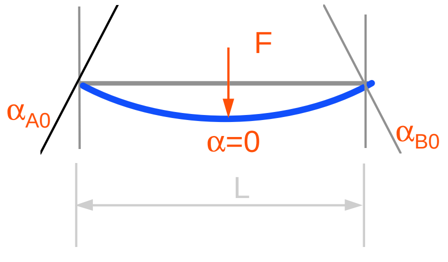
Utilizzo dei manuali

In molti manuali, scolastici o professionali, vi sono tabelle che raccolgono le soluzioni dell'equazione della linea elastica per i casi delle strutture più comuni (mensole, travi appoggiate, etc.).
Di solito è riportata l'equazione della freccia (eventualmente anche quella della rotazione) e i valori notevoli delle grandezze d'interesse (freccia e rotazione massima, rotazione agli estremi, freccia e rotazione sotto il carico quando non coincidono con quelle massime).
Bisogna porre un minimo di attenzione ai sistemi di riferimento utilizzati, che possono differire da quello utilizzato in questo corso.
Molto spesso la soluzione di un caso non previsto può essere ricavata utilizzando la sovrapposizione degli effetti.
Si prenda ad esempio una trave come quella in figura per la quale si voglia conoscere lo spostamento dell'estremo C:





Nei manuali si trova di solito la soluzione per una trave fra due appoggi:



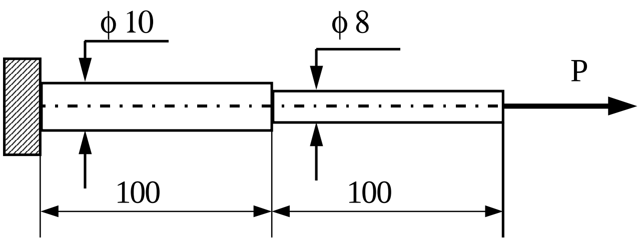
$$v_{max} = \frac{FL^3}{48EJ} \qquad \alpha_{estremi} = \frac{FL^2}{16EJ}$$

La freccia nel punto C si ricava facilmente consideranto che il tratto BC è scarico:

$$|v_{c0}| = |\alpha_{B0} \cdot a| = \frac{Fb^2}{16EJ} a$$

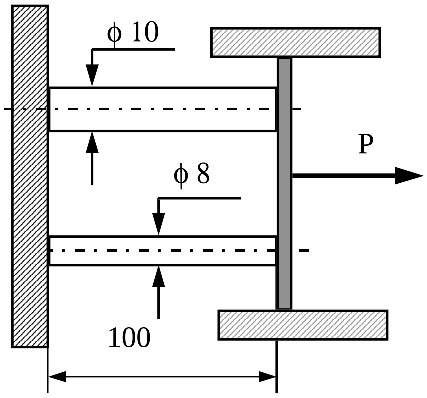
Esercizio 5-1

Calcolare lo spostamento dell'estremo e le sollecitazioni presenti nella struttura in figura, composta da due aste in serie con sezione circolare di diametro D_1 = 10 mm e D_2 = 8 mm, lunghe entrambe 100 mm e soggette ad un carico P di 10 kN.
Il materiale è un acciaio da costruzione con modulo elastico E = 200000 MPa



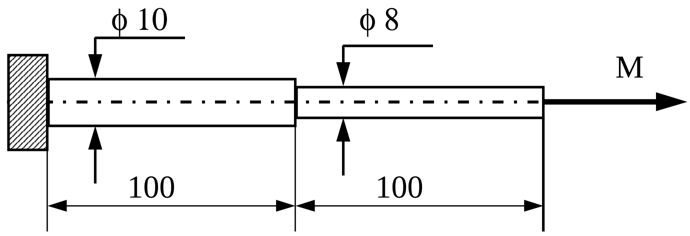
Esercizio 5-2

Si considerino le due aste dell'esercizio precedente disposte in parallelo, come indicato in figura, e si calcoli lo spostamento dell'elemento rigido di collegamento, la forza agente su ognuna delle aste e la tensione nelle aste.



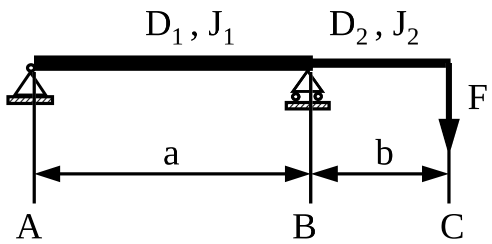
Esercizio 5-3

Si considerino ancora le due aste dell'esercizio 1, soggette però ad un momento torcente M=10 Nm.
Si calcolino lo spostamento angolare totale e le tensioni tangenziali presenti nelle due aste.



Esercizio 5-4

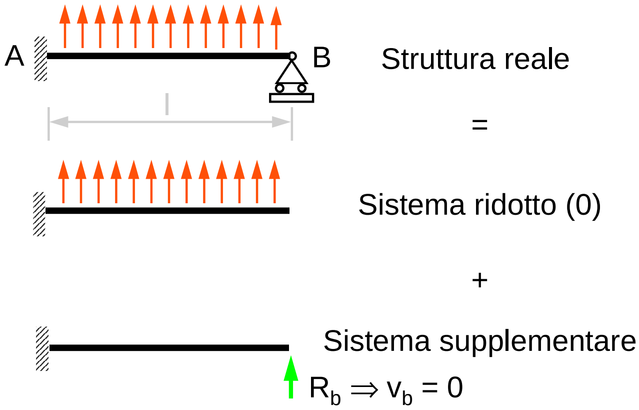
La figura mostra la schematizzazione di un albero costituito da due tratti: il tratto AB ha una lunghezza a = 400 mm con sezione di diametro D_1=60 mm, il tratto BC ha una lunghezza b = 200 mm con sezione di diametro D_2=50 mm. Il materiale è acciaio (E = 200000 MPa), e la forza applicata è F = 5000 N. Calcolare gli spostamenti nel punto di applicazione della forza e nella mezzeria del tratto AB.



Cenni sulla soluzione di sistemi iperstatici

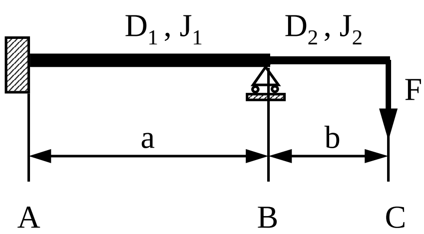
Come visto in precedenza si dicono iperstatiche le strutture in cui il numero di vincoli (e quindi di reazioni vincolari incognite) eccede il numero di equazioni di equilibrio indipendenti che è possibile scrivere per la struttura (3 nel piano e 6 nello spazio). Il numero di vincoli sovrabondanti è pari ad h, cioè al grado di iperstaticità della struttura.
Per risolvere questo tipo di problemi devono essere aggiunte altre h condizioni alle equazioni di equilibrio; queste condizioni possono essere introdotte considerando la deformabilità della struttura e imponendo che le condizioni di vincolo delle strutture deformate siano rispettate.
Fra i vari metodi sviluppati per il calcolo delle iperstatiche il più semplice da utilizzare manualmente è il *metodo delle forze,* illustrato schematicamente nella figura
Il metodo prevede la sostituzione della struttura reale con una isostatica ottenuta eliminando semplicemente i vincoli sovrabbondanti (la scelta dei vincoli da eliminare non è in generale univoca); tale struttura viene detta *sistema ridotto* o *sistema principale*.
Essendo il sistema ridotto isostatico si possono facilmente ottenere le reazioni vincolari, i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione e la configurazione deformata, cioè gli spostamenti locali.
Ovviamente in corrispondenza dei vincoli che sono stati eliminati vi saranno degli spostamenti non nulli.
Per valutare le reazioni vincolari incognite si considera una ulteriore struttura per ognuno dei vincoli che sono stati eliminati.

Tali strutture, detti *sistemi supplementari*, sono costituite ognuna da una struttura con i vincoli considerati nel sistema ridotto su cui agisce una componente di forza o di momento, incognita, corrispondente al vincolo eliminato. Per determinare il valore da assegnare a tale componente si impone che essa produca nel sistema supplementare uno spostamento (in senso generale, cioè una traslazione se viene applicata una forza o una rotazione se viene applicato un momento) uguale e contrario a quello ottenuto per il sistema ridotto nella sezione in cui agisce la forza incognita.
La soluzione della struttura reale si ottiene poi semplicemente utilizzando la sovrapposizione degli effetti.



Esercizio 5-5

Si consideri la struttura iperstatica ottenuta sostituendo all'appoggio sinistro dell'albero presentato nell'esercizio 5-4 un incastro (ad esempio perché è stato utilizzato un cuscinetto a rulli o due cuscinetti a sfere affiancati): il tratto AB ha una lunghezza a = 400 mm con sezione di diametro D_1=60 mm, il tratto BC ha una lunghezza b = 200 mm con sezione di diametro D_2=50 mm. Il materiale è acciaio (E = 200000 MPa), e la forza applicata è F = 5000 N. Si ricavino le reazioni vincolari e gli spostamenti sotto al carico e nella mezzeria del tratto AB.



Torna ad inizio documento

Modulo 6

Soluzione esercizi