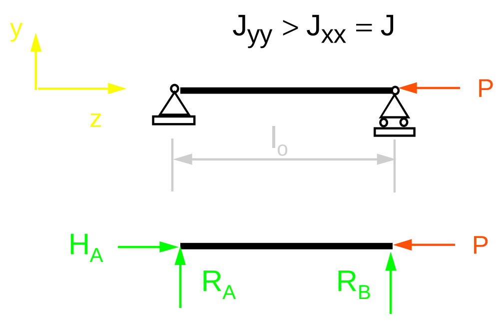
Indice

Carico di punta

Il cedimento di una struttura soggetta a carichi statici può avvenire in alcuni casi con un meccanismo diverso da quello di superamento dei limiti di resistenza del materiale.
Tale meccanismo di collasso si presenta in elementi di strutture soggetti a carichi normali di compressione (carichi di punta), che inducono nell'elemento una instabilità elastica.
Tale modalità di cedimento è particolarmente pericolosa, sia perché può avvenire con tensioni nominali molto al di sotto dei limiti di resistenza del materiale, sia perché può avvenire senza alcun tipo di preavviso (non vi è una fase di plastificazione) e con effetti di solito catastrofici.
Per trattare il fenomeno del carico di punta non è più possibile considerare la struttura come corpo rigido, ma sia per scrivere le equazioni di equilibrio sia per valutare le caratteristiche di sollecitazione si devono considerare le variazioni geometriche dovute all'applicazione del carico.

Asta di Eulero

Il caso più semplice di elementi soggetti a carico di punta è quello dell'asta di Eulero, cioè di un elemento asta con una cerniera ad un estremo ed un appoggio semplice nell'altro estremo soggetta ad una forza assiale di compressione (vedi figura). Il momento d'inerzia principale minore viene indicato semplicemente con la lettera J.

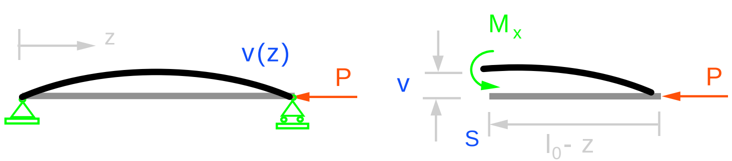


Le reazioni vincolari valgono:

$$HA = P \qquad RA = 0 \qquad RB = 0$$

Si ipotizzi che l'asta presenti un piccolo spostamento trasversale alla linea d'asse v(z); il momento in una generica sezione varrà:

$$M_x - Pv = 0 \Rightarrow M_x = Pv$$



Si ha dunque una situazione in cui il momento in una sezione generica dipende dallo spostamento trasversale.
Possiamo scrivere l'equazione della linea elastica, che risulta:

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M_x}{EJ} = -\frac{P}{EJ}v \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2v}{dz^2} + \frac{P}{EJ}v = 0$$

Si ottiene quindi una equazione differenziale del secondo ordine, omogenea, lineare a coefficienti costanti. La soluzione di tale equazione è:

$$v = V\,\mathrm{sen}(\omega z + \varphi) \quad \text{dove} \quad \omega = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$$

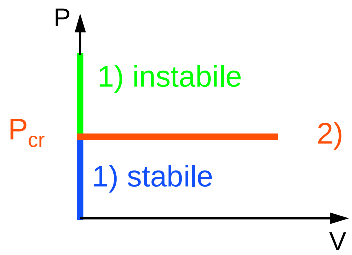
e le costanti V e φ vengono determinate in base alle condizioni al contorno, che nel caso in esame risultano

$$z = 0 \;\Rightarrow\; v = 0 \qquad z = l_0 \;\Rightarrow\; v = 0 \qquad \text{cioè} \quad V\mathrm{sen}(\varphi) = 0 \quad V\mathrm{sen}(\omega l_0 + \varphi) = 0$$

Tali condizioni al contorno sono soddisfatte in due distinti casi:
1) φ arbitrario V=0. In questo caso lo spostamento v è sempre nullo (cioè l'asta non si inflette);
2) φ=0, V arbitrario se $\omega \cdot l_0 = \pi$. In questo caso l'asta si inflette come una sinusoide.
Ricordando l'espressione di ω si ricava il carico che permette la soluzione 2) (carico critico):

$$\omega \cdot l_0 = \sqrt{\frac{P}{EJ}} \cdot l_0 = \pi \quad \Rightarrow \quad \frac{P \cdot l_0^2}{EJ} = \pi^2 \quad \Rightarrow \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2}$$

In pratica quando il carico applicato P è inferiore al carico critico P_{cr} è possibile solo la soluzione 1) per cui l'asta rimane rettilinea, mentre quando il carico P è uguale o superiore a P_{cr} sono possibili entrambe le soluzioni, cioè l'asta può anche inflettersi.



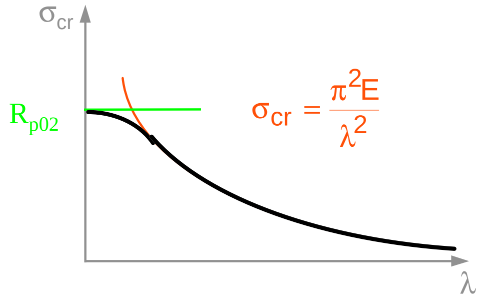
In questo secondo caso la configurazione 1) è instabile, in quanto basta una piccola perturbazione, come un carico trasversale anche di lieve entità, una imperfezione del materiale o geometrica, perché si instauri la soluzione 2).
In questo caso si ha in pratica un cedimento della struttura dovuto ad instabilità elastica, noto anche come collasso per carico di punta. Come già detto questo tipo di cedimento è molto pericoloso perché avviene praticamente senza preavviso.
Per analogia con il cedimento dovuto a snervamento si può effettuare la trattazione in termini di tensione. La tensione critica è definita semplicemente come il carico critico diviso la sezione trasversale dell'asta.

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2 A}$$

Ricordando la definizione di raggio d'inerzia ρ^2 = J/A (si ricordi che J è il momento d'inerzia principale minimo della sezione) e definendo il rapporto l_0/ρ come snellezza dell'asta λ la tensione critica può essere scritta come:

$$\sigma_{cr} = \pi^2 E \frac{\rho^2}{l_0^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Il grafico mostra l'andamento della tensione critica in funzione della snellezza.

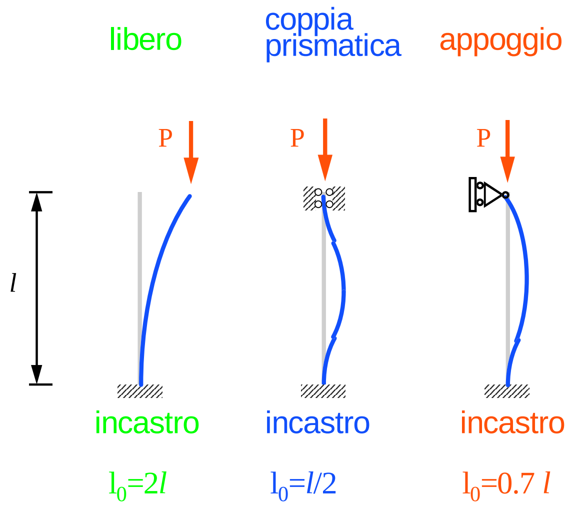


Dalla figura si osserva che la tensione che provoca il collasso per carico di punta è più bassa del limite elastico per valori alti della snellezza, mentre per bassi valori di snellezza (elementi tozzi), il cedimento avviene per collasso plastico.

In realtà la transizione fra collasso plastico e instabilità elastica non è cosi netta, e nella zona di transizione avvengono fenomeni più complessi con instabilità di tipo elasto-plastico. (curva spessa).

Si noti che la tensione critica dipende da fattori geometrici (la snellezza) e dal modulo di elasticità del materiale (E). Questo significa che la sicurezza della struttura rispetto a questo pericolo non viene aumentata utilizzando materiali con maggior resistenza ma che presentano lo stesso modulo elastico.

Nel caso considerato (asta incernierata agli estremi) la lunghezza l_0 coincide con la lunghezza dell'asta. In casi di vincolo diversi la lunghezza l_0 rappresenta la distanza fra due sezioni a momento nullo ed è pari alla semilunghezza d'onda della deformata. In pratica cambiando le condizioni di vincolo cambia la definizione di l_0. Nella figura vengono i valori da assegnare in alcuni casi notevoli.

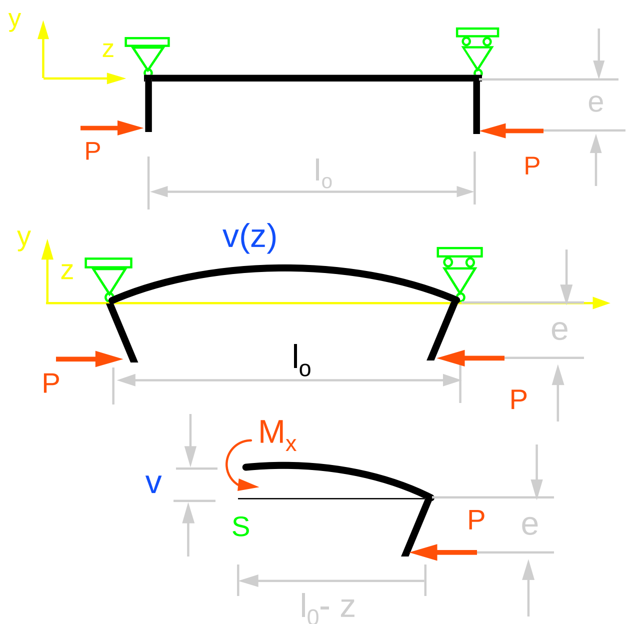


Carico di punta eccentrico

Si consideri adesso il caso in cui il carico applicato all'asta in compressione non agisca nominalmente nel baricentro della sezione ma sia applicato ad una certa distanza ('e') dalla linea d'asse.

La trattazione di questo caso segue lo stesso procedimento già visto per il caso senza eccentricità. Ipotizzando come in precedenza un piccolo spostamento v(z), l'equazione del momento in una sezione generica diventa:

$$M_x - P(v+e) = 0 \quad \Rightarrow \quad M_x = P(v+e)$$



L'equazione della linea elastica risulta quindi:

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M_x}{EJ} = -\frac{P}{EJ}(v+e)$$

e quindi:

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{P}{EJ}v = -\frac{P}{EJ}e$$

Questa equazione è lineare a coefficienti costanti non omogenea e ammette la soluzione:

$$v = V_1 \operatorname{sen}(\omega z) + V_2 \cos(\omega z) - e \quad \text{dove} \quad \omega = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$$

Le costanti di integrazione vanno determinate al solito imponendo le condizioni al contorno:

$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0; \qquad z = l_0 \quad \Rightarrow \quad v = 0$$

Utilizzando la prima condizione viene determinata la costante V_2.:

$$V_2 - e = 0 \qquad V_2 = e$$

Utilizzando la seconda condizione viene infine determinata la costante V_1:

$$0 = V_1 \operatorname{sen}(\omega l_0) + e\cos(\omega l_0) - e \quad \Rightarrow \quad V_1 \operatorname{sen}(\omega l_0) = e(1 - \cos(\omega l_0))$$

$$V_1 = e\frac{1-\cos(\omega l_0)}{\operatorname{sen}(\omega l_0)} = e\tan\left(\frac{\omega l_0}{2}\right)$$

L'equazione della deformata risulta quindi:

$$v = e\left[\tan\left(\frac{\omega l_0}{2}\right)\operatorname{sen}(\omega z) + \cos(\omega z) - 1\right]$$

La freccia v tende ad infinito quando:

$$v \to \infty \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\omega l_0}{2}\right) \to \infty \Leftrightarrow \frac{\omega l_0}{2} = \frac{\pi}{2}$$

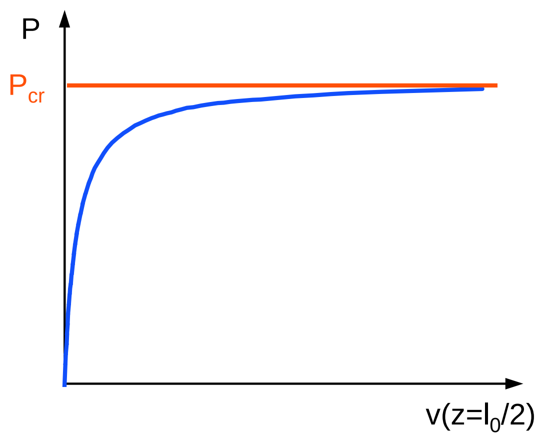
cioè quando:

$$\omega \cdot l_0 = \sqrt{\frac{P}{EJ}} \cdot l_0 = \pi \quad \Rightarrow \quad \frac{P \cdot l_0^2}{EJ} = \pi^2$$

Analogamente a quanto visto nel caso precedente possiamo quindi individuare un carico critico:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2}$$

Si noti che l'espressione del carico critico è identica nei due casi.
In questo caso però il fenomeno avviene con modalità leggermente diverse (si veda la figura che riporta la relazione fra la freccia in mezzeria e il carico applicato): all'aumentare del carico la freccia aumenta per tendere asintotticamente ad infinito. Il carico non può quindi superare quello critico neanche in condizioni di equilibrio instabile. Anche con carichi al di sotto di quello critico si possono avere frecce non accettabili; in particolare quando tali frecce non sono più piccole il calcolo dei momenti agenti, e quindi delle tensioni, non può prescindere dallo spostamento v, ed il calcolo diventa non lineare.



In entrambi i casi considerati il raggiungimento di una condizione critica può avvenire, con elementi snelli, molto al di sotto al carico che induce un cedimento del materiale.
Come consuetudine viene quindi calcolata la tensione critica:

$$\sigma_{cr} = \pi^2 E \frac{\rho^2}{l_0^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

il cui modulo viene confrontato con la tensione applicata.
I coefficienti di sicurezza da adottare contro il cedimento per carico di punta devono essere molto elevati, perché tale tipo di cedimento può avvenire senza preavviso e con esiti catastrofici.
Nella norma CNR-UNI 10011 (Costruzioni in acciaio: istruzioni per il calcolo, l'esecuzione e la manutenzione) sono prescritte le verifiche da effettuarsi in entrambi i casi considerati e vengono dati i diagrammi di resistenza per gli acciai da carpenteria in base anche al tipo di profilato utilizzato; per il caso di aste pressoinflesse (cioè con carico eccentrico) viene utilizzato un metodo formalmente diverso da quello qui descritto per semplicità, il metodo ω. Si invita il lettore a fare riferimento alla norma indicata per maggiori dettagli.

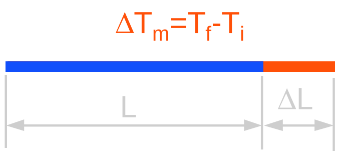
Esercizio 6-1

Data una struttura costituita da una trave in acciaio (E = 200000 MPa), di sezione rettangolare cava 30x40, spessore 3 mm, incastrata ad una estremità e libera all'altra estremità, di lunghezza L = 2 m, calcolare il carico critico e la tensione di compressione in corrispondenza di tale carico.

Cenni sulle tensioni di origine termica

Variazioni uniformi di temperatura

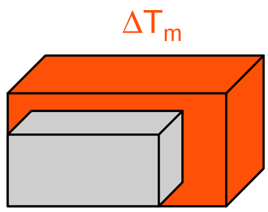
E' noto che un corpo soggetto a variazioni di temperatura cambia le proprie dimensioni. Consideriamo per esempio una barra (corpo considerato unidimensionale) che ad una certa temperatura T_i ha una lunghezza L. Se la barra subisce una variazione uniforme di temperatura ΔT_m la sua lunghezza diventa L+ΔL:



La variazione di lunghezza vale $\Delta L = \alpha L \Delta T_m$ essendo a il coefficiente di dilatazione termica, tipico del materiale. La barra quindi subisce una deformazione di origine termica pari a:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \alpha \Delta T_m$$

Nel caso tridimensionale ognuna delle dimensioni del corpo (supposto omogeneo ed isotropo) subisce un'analoga deformazione:



$$\varepsilon_{xx} = \alpha \Delta T_m$$
$$\varepsilon_{yy} = \alpha \Delta T_m$$
$$\varepsilon_{zz} = \alpha \Delta T_m$$

si noti che una variazione uniforme della temperatura provoca un aumento delle dimensioni ma, se il corpo è lasciato libero di dilatarsi, non sono presenti tensioni e non vi sono distorsioni.
La legge di Hooke può quindi essere scritta come:

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{ii} - \nu\sigma_{jj} - \nu\sigma_{kk}\right) + \alpha\Delta T_m \qquad \gamma_{ik} = \frac{1}{G}\tau_{ik}$$

Alcuni valori tipici del coefficiente di dilatazione termica α in (1/°C) sono i seguenti

Acciai al C	$12 \cdot 10^{-6}$
Acciai legati	$11 \cdot 10^{-6}$
Acciai Inox	$14 \cdot 10^{-6}$
Leghe Al	$22 \cdot 10^{-6}$
Ottone	$19 \cdot 10^{-6}$
Bronzo	$20 \cdot 10^{-6}$

Come si è appena detto le variazioni uniformi di temperatura non provocano tensioni se il corpo è lasciato libero di dilatarsi.

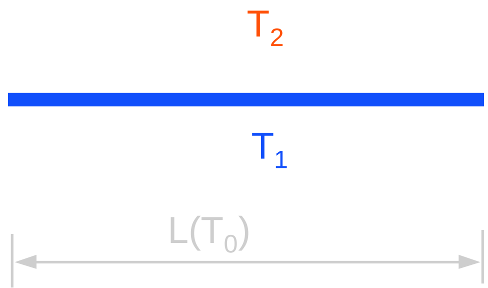
Se invece gli spostamenti provocati dalle variazioni di temperatura sono impediti nascono delle tensioni di origine termica.
Infatti in corrispondenza dei vincoli si generano delle reazioni vincolari che impediscono il movimento, che a loro volta generano delle tensioni nel corpo in esame.
Uno schema per il calcolo delle tensioni di origine termica è il seguente:

- calcolare gli spostamenti che si avrebbero in assenza dei vincoli
- determinare le forze necessarie per imporre spostamenti uguali e contrari (reazioni vincolari che impediscono il movimento)
- calcolare le tensioni associate alle reazioni vincolari

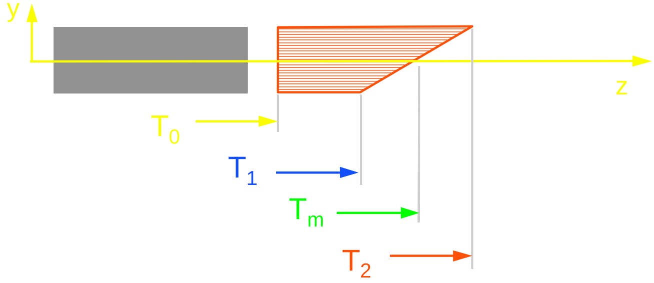
Di solito le dimensioni del corpo sono date per una temperatura di riferimento di 20° (temperatura ambiente), e si suppone che il montaggio delle strutture avvenga a tale temperatura.

Variazioni di temperatura non uniformi

Variazioni non uniformi di temperatura provocano effetti più complessi in quanto possono generare delle distorsioni del componente, in quanto la deformazione locale dipende dalla temperatura raggiunta in ogni punto del corpo. Il caso più semplice da studiare è quello delle travi con una differenza di temperatura fra due lati (estradosso ed intradosso).



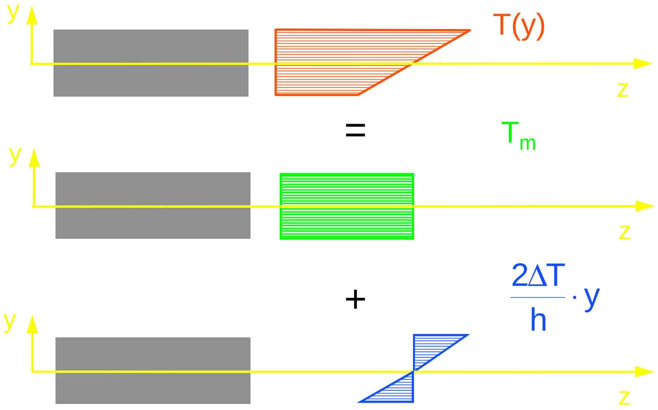
Si consideri una trave di sezione rettangolare ed altezza della sezione h soggetta ad una temperatura T_1 all'intradosso e T_2 all'estradosso; si supponga che la temperatura all'interno della trave segua una distribuzione lineare:



La temperatura media varrà $T_m = (T_1+T_2)/2$. Si indichi con $2\Delta T$ la differenza (T_2-T_1)
La temperatura in funzione della coordinata y sarà quindi:

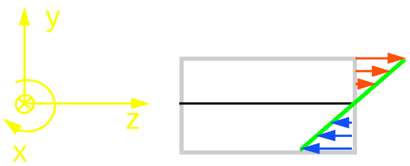
$$T(y) = T_m + \frac{2\Delta T}{h} \cdot y$$

Possiamo quindi dividere l'effetto della temperatura fra quello dovuto alla temperatura media (già analizzato in precedenza) e quello dovuto al gradiente di temperatura:

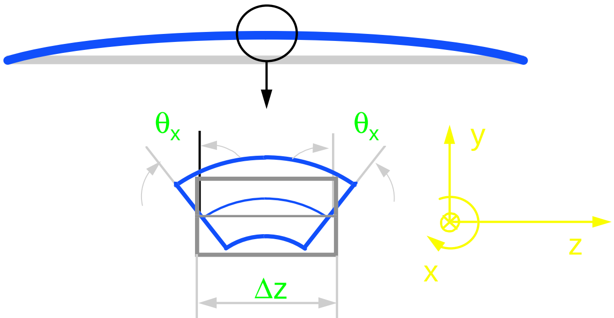


Le deformazioni lungo l'asse y saranno quindi date da:

$$\varepsilon_{zz} = \alpha T(y) = \alpha \frac{2\Delta T}{h} y = k_x y$$



Le deformazioni trovate corrispondono a quelle che abbiamo già analizzato nel caso di flessione:

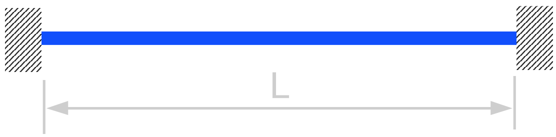


$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{d\theta_x}{dz} = -k_x$$

quindi una variazione di temperatura fra intradosso ed estradosso provoca una flessione della trave.
Anche in questo caso, quindi, se la flessione è impedita nascono delle tensioni di origine termica, che possono essere calcolate seguendo lo schema prima esposto.

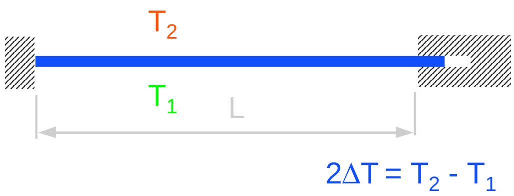
Esercizio 6-2

Si consideri un'asta in acciaio (E=200.000 MPa, α= 12 10^{-6} 1/°C) di sezione quadrata con A=100 mm^2 e lunghezza 1000 mm (a 20°) incastrata fra due pareti indeformabili. Si calcolino le tensioni nella barra se questa viene portata alla temperatura uniforme di 100°.



Esercizio 6-3

Si consideri una trave in acciaio (E= 200000 MPa, α = 12 10^{-6} 1/°K) di sezione rettangolare hxb = 30x10 mm, di lunghezza L = 200 mm, incastrata da un lato e vincolata con una coppia prismatica dall'altro soggetta ad una variazione di temperatura fra intradosso ed estradosso 2ΔT= 50°. Calcolare il momento applicato dal vincolo alla trave e le tensioni all'estradosso e all'intradosso



Torna ad inizio documento

Modulo 7

Soluzione esercizi