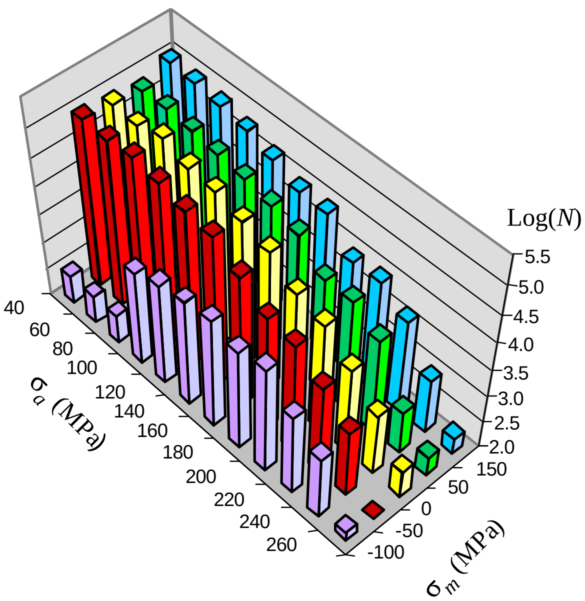
Massimo Rossetto

INTRODUZIONE ALLA FATICA DEI MATERIALI E DEI COMPONENTI MECCANICI

Esercizi svolti



Levrotto & Bella – Torino – ottobre 2000 - revisione 2005

CAPITOLO 1

Esercizio 1-1

Dimostrare che il rapporto di tensione R e il rapporto di ampiezza R_a sono legati dalle espressioni:

$$R_a = \frac{1-R}{1+R} \qquad R = \frac{1-R_a}{1+R_a}$$

Soluzione

Si procede per sostituzione:

$$R_a = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{(\sigma_{max} - \sigma_{min})/2}{(\sigma_{max} + \sigma_{min})/2} = \frac{(\sigma_{max} - \sigma_{min})/\sigma_{max}}{(\sigma_{max} + \sigma_{min})/\sigma_{max}} = \frac{1-R}{1+R}$$

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \frac{(\sigma_m - \sigma_a)}{(\sigma_m + \sigma_a)} = \frac{(\sigma_m - \sigma_a)/\sigma_m}{(\sigma_m + \sigma_a)/\sigma_m} = \frac{1-R_a}{1+R_a}$$

Esercizio 1-2

Una barra di torsione a sezione circolare con diametro D=10 mm è soggetta ad un momento torcente M_t variabile fra 8 e 12 Nm.
Calcolare i parametri del ciclo indicati nel paragrafo 1.2.

Soluzione

$$\tau = \frac{16M_t}{\pi D^3} \qquad \tau_{max} \cong 61 \text{ MPa} \qquad \tau_{min} \cong 41 \text{ MPa}$$

$$\tau_m = \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2} \cong 51 \text{ MPa} \qquad \tau_a = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2} \cong 10 \text{ MPa}$$

$$\Delta\tau = 2\tau_a \cong 20 \text{ MPa} \qquad R = \frac{\tau_{min}}{\tau_{max}} \cong 0.67 \qquad R_a = \frac{\tau_a}{\tau_m} \cong 0.20$$

N.B. Le tensioni sono approssimate al MPa, i rapporti di tensione e di ampiezza alla seconda cifra decimale.

Esercizio 1-3

Una barra di sezione quadrata 10x10 mm è soggetta ad un carico di trazione P variabile con R=0.25 e ΔP=8 kN
Calcolare i parametri del ciclo in termini di tensione indicati nel paragrafo 1.2.

Soluzione

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{l^2} \qquad \Delta\sigma = 80 \text{ MPa} \qquad \sigma_a = \Delta\sigma/2 = 40 \text{ MPa}$$

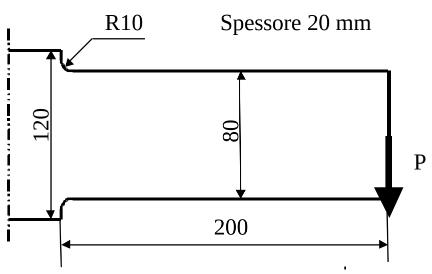
$$R_a = \frac{1-R}{1+R} = 0.60 \qquad \sigma_m = \sigma_a / R_a \approx 67 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a \approx 107 \text{ MPa} \qquad \sigma_{min} = \sigma_m - \sigma_a \approx 27 \text{ MPa}$$

CAPITOLO 2

Esercizio 2-1

Una piastra in S355 EN 10027/1 (Fe510 UNI 7070) delle dimensioni indicate in figura viene sollecitata da un carico trasversale P = 8000 N.
Con riferimento alla sezione con intaglio, calcolare i coefficienti di sicurezza a rottura duttile e a primo snervamento.



Soluzione

Tensione nominale (massima sulla sezione):

$$\sigma_f = \frac{6 \times M_f}{b \times h^2} = \frac{6 \times P \times l}{b \times h^2} = \frac{6 \times 8000 \times 200}{20 \times 80^2} = 75 \text{ MPa}$$

Coefficiente di sicurezza contro la rottura duttile:

$$CS_{\mathrm{rd}} = \frac{R_{\mathrm{m}}}{\sigma_f} = \frac{510}{75} = 6.80$$

Per il calcolo del coefficiente di sicurezza a primo snervamento:
Coefficiente di concentrazione delle tensioni (dall'apposito diagramma)

$$\frac{H}{h} = 1.5 \qquad \frac{r}{h} = 0.125 \qquad \Rightarrow \qquad K_{\mathrm{t}} = 1.65$$

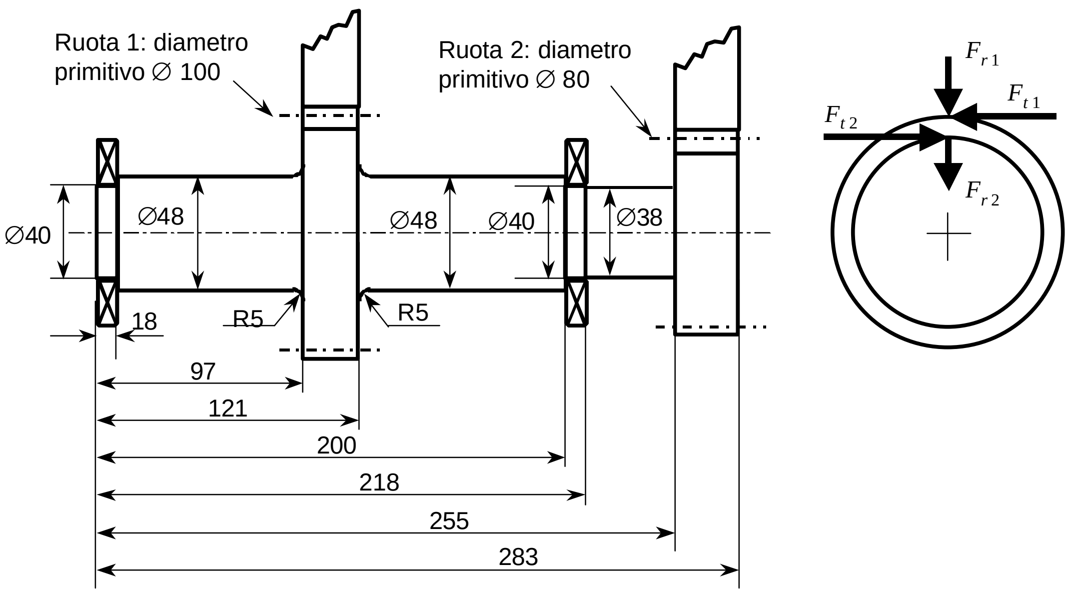
Tensione locale massima e coefficiente di sicurezza

$$\sigma^{\max} = K_{\mathrm{t}}\sigma_f = 124 \text{ MPa}$$

$$CS_{\mathrm{psn}} = \frac{R_{\mathrm{p0.2}}}{\sigma^{\max}} = \frac{355}{124} = 2.87$$

Esercizio 2-2

La figura illustra schematicamente l'albero di rinvio fra due ruote dentate a denti diritti con angolo di pressione di 20°. Il cuscinetto di sinistra sopporta eventuali carichi assiali. Il momento torcente trasmesso è di 200 Nm.
Calcolare i coefficiente di sicurezza a rottura duttile e a primo snervamento dell'albero (materiale 39NicrMo3: R_{m} = 980 MPa $R_{\mathrm{p0.2}}$ = 785 MPa).



Raggi di raccordo non quotati R1

Soluzione

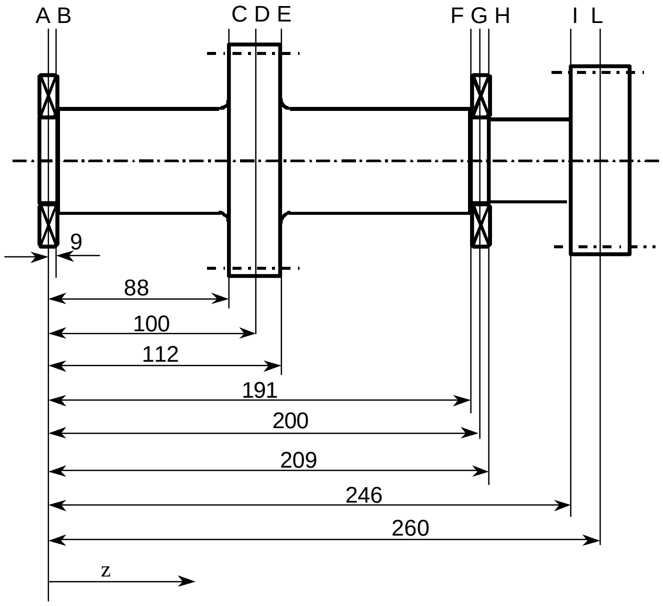
Calcolo delle forze agenti sull'albero:

$$F_{t1} = \frac{2 \cdot M_T}{D_{p1}} = \frac{2 \cdot 200000}{100} = 4000 \text{ N} \qquad F_{t2} = \frac{2 \cdot M_T}{D_{p2}} = \frac{2 \cdot 200000}{80} = 5000 \text{ N}$$

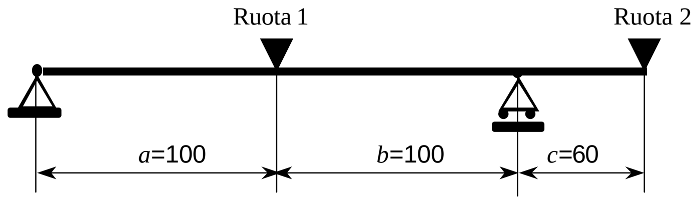
$$F_{r1} = F_{t1} \cdot \tan 20° = 1456 \text{ N} \qquad F_{r2} = F_{t2} \cdot \tan 20° = 1820 \text{ N}$$

Individuazione sezioni notevoli della struttura

Le sezioni A e G sono quelle in cui si considerano applicate le reazioni vincolari date dai cuscinetti. Le sezioni D e L sono quelle in cui si considerano applicate le forze scambiate dalle ruote dentate. Le altre sezioni sono quelle in cui è presente un intaglio.

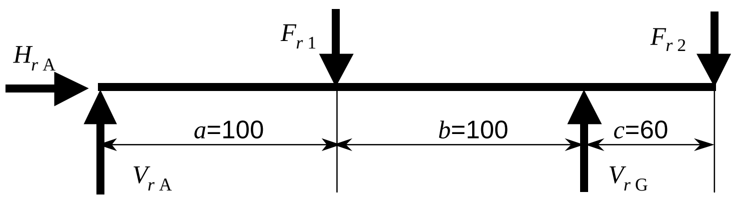


Schematizzazione per il calcolo delle reazioni vincolari



Calcolo delle reazioni vincolari

– Piano radiale

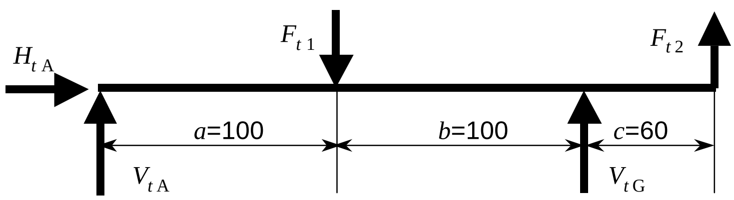


$$\rightarrow H_{rA} = 0$$

$$A \supset V_{rG}(a+b) = F_{r1}a + F_{r2}(a+b+c) \quad \Rightarrow \quad V_{rG} = \frac{F_{r1}a + F_{r2}(a+b+c)}{(a+b)} = 3094 \text{ N}$$

$$G \supset V_{rA}(a+b) = F_{r1}b - F_{r2}c \quad \Rightarrow \quad V_{rA} = \frac{F_{r1}b - F_{r2}c}{(a+b)} = 182 \text{ N}$$

– Piano tangenziale



$$\rightarrow H_{tA} = 0$$

$$A \supset V_{tG}(a+b) = F_{t1}a - F_{t2}(a+b+c) \quad \Rightarrow \quad V_{tG} = \frac{F_{t1}a - F_{t2}(a+b+c)}{(a+b)} = -4500 \text{ N}$$

$$G \supset V_{tA}(a+b) = F_{t1}b + F_{t2}c \quad \Rightarrow \quad V_{tA} = \frac{F_{t1}b + F_{t2}c}{(a+b)} = 3500 \text{ N}$$

– Reazioni vincolari complessive

$$V_A = \sqrt{V_{tA}^2 + V_{rA}^2} = 3505 \text{ N}$$

$$V_G = \sqrt{V_{tG}^2 + V_{rG}^2} = 5461 \text{ N}$$

Momenti flettenti nelle sezioni notevoli; diagrammi di taglio e di momento

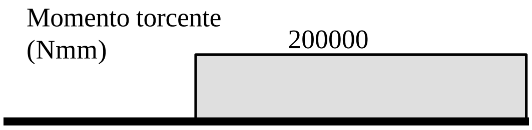
I momenti flettenti nei piani radiale e tangenziale sono calcolati con le usuali equazioni di equilibrio (verso positivo orario).

Il momento flettente totale è calcolato con la formula:

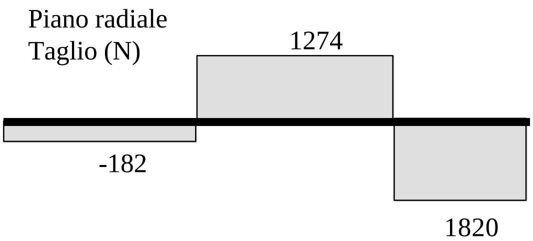
$$M_{\text{flex tot}} = \sqrt{M_{\text{tang}}^2 + M_{\text{rad}}^2}$$

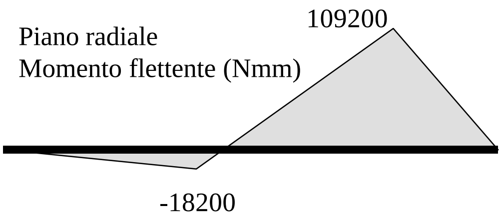
Sezione	z (mm)	M_{tang} (Nmm)	M_{rad} (Nmm)	$M_{\text{flex tot}}$ (Nmm)	M_T (Nmm)
A	0	0	0	0	0
B	9	-31500	-1638	31543	0
C	88	-308000	-16016	308416	0
D	100	-350000	-18200	350473	0
E	112	-344000	-2912	344012	200000
F	191	-304500	97734	319800	200000
G	200	-300000	109200	319256	200000
H	209	-255000	92820	271368	200000
I	246	-70000	25480	74493	200000
L	260	0	0	0	200000

– Diagramma del momento torcente

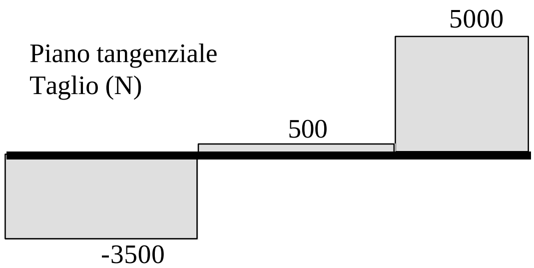


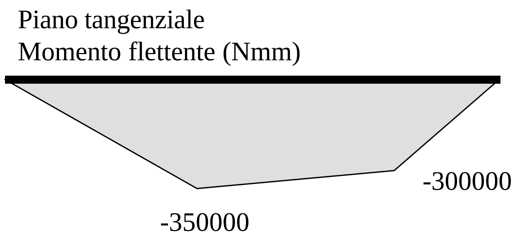
Diagrammi di taglio e momento nel piano radiale





Diagrammi di taglio e momento nel piano tangenziale





Calcolo delle tensioni nominali – Coefficiente di sicurezza rispetto alla rottura duttile

Sono calcolate le tensioni di flessione (σ_f), le tensioni tangenziali (τ) e le tensioni ideali secondo l'ipotesi della tensione tangenziale massima, con le seguenti formule:

$$\sigma_f = \frac{32 \cdot M_{\text{flex tot}}}{\pi d^3} \qquad \tau = \frac{16 \cdot M_T}{\pi d^3} \qquad \sigma_{id} = \sqrt{\sigma_f^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

Il calcolo è effettuato nelle sezioni notevoli in corrispondenza del diametro minimo; viene indicato se tale diametro è a destra (dx) o a sinistra (sx) della sezione; non si considerano le tensioni in corrispondenza delle ruote dentate:

Dalla tabella seguente si nota che la tensione ideale massima si verifica nella sezione H (a destra) ed è pari a 64 MPa. Il coefficiente di sicurezza rispetto alla rottura duttile vale quindi:

$$CS_{\text{rd}} = \frac{R_{\text{m}}}{\sigma_{id\,\text{max}}} = \frac{980}{64} = 15.3$$

Sezione	Z (mm)	$M_{\text{flex tot}}$ (Nmm)	M_T (Nmm)	d (mm)	σ_f (MPa)	τ (MPa)	σ_{id} (MPa)
A	0	0	0	40	0	0	0
Bsx	9	31542	0	40	6	0	6
Csx	88	308416	0	48	29	0	29
Edx	112	344012	200000	48	32	10	38
Fdx	191	319800	200000	40	51	16	61
G	200	319256	200000	40	51	16	61
Hdx	209	271367	200000	38	51	19	64
Isx	246	74493	200000	38	14	19	41

Coefficiente di sicurezza rispetto al primo snervamento.
Applicando l'ipotesi della tensione tangenziale massima si calcola la tensione ideale convenzionale nelle sezioni con intaglio utilizzando la formula:

$$\sigma_{id} = \sqrt{\left(\sigma_f^{\max}\right)^2 + 4 \cdot \left(\tau^{\max}\right)^2} \leq R_e$$

dove:

$$\sigma_f^{\max} = K_{t(flex)} \cdot \sigma_f \qquad \tau^{\max} = K_{t(tors)} \cdot \tau$$

I valori dei coefficienti di concentrazione delle tensioni sono ricavati dagli appositi diagrammi.
Come diametro delle ruote dentate viene considerato il diametro primitivo.
Possono essere esclusi a priori le sezioni:

– B perché ha la stessa geometria della sezione F con tensioni nominali inferiori
– C perché ha la stessa geometria della sezione E con tensioni nominali inferiori.

I risultati nelle sezioni considerate (E, F, H) sono riportati nella tabella seguente:

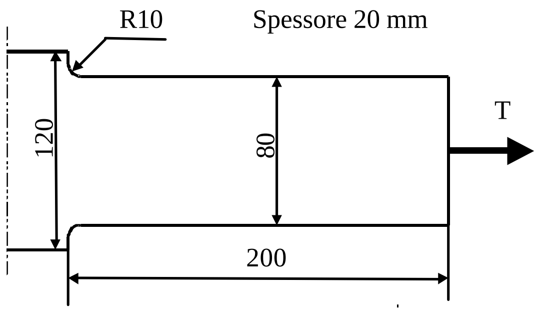
Punto	σ_f (MPa)	τ (MPa)	D (mm)	d (mm)	r (mm)	D/d	r/d	$K_{t(flex)}$	$K_{t(tors)}$	σ_{id} (MPa)
Edx	32	10	100	48	5	2.08	0.104	1.75	1.45	63
Fdx	51	16	48	40	1	1.20	0.025	2.35	1.90	134
Hdx	51	19	40	38	1	1.05	0.026	2.00	1.40	115

La tensione ideale massima convenzionale si verifica nella sezione F a destra (134 MPa).
Il coefficiente di sicurezza rispetto al primo snervamento vale quindi:

$$CS_{psn} = \frac{R_{p0.2}}{\sigma_{id\,\max}} = \frac{785}{134} = 5.84$$

Esercizio 2-3

Una piastra in S355 EN 10027/1 (Fe510 UNI 7070) delle dimensioni indicate in figura viene sollecitata da un carico assiale T = 64 kN. Con riferimento alla sezione con intaglio, calcolare i coefficienti di sicurezza a rottura duttile e a primo snervamento.
Supponendo di applicare un carico superiore del 20% a quello che porta al primo snervamento calcolare la tensione residua all'apice dell'intaglio una volta rimosso il carico (si supponga il materiale elastico-perfettamente plastico)



Soluzione
Calcolo tensione nominale (massima sulla sezione):

$$\sigma_N = \frac{T}{b \cdot h} = \frac{64000}{20 \cdot 80} = 40 \text{ MPa}$$

Calcolo coefficiente di sicurezza contro la rottura duttile:

$$CS_{\mathrm{rd}} = \frac{R_{\mathrm{m}}}{\sigma_N} = \frac{510}{40} = 12.75$$

Per il calcolo del coefficiente di sicurezza a primo snervamento:
Coefficiente di concentrazione delle tensioni (dall'apposito diagramma)

$$\frac{H}{h} = 1.5 \qquad \frac{r}{h} = 0.125 \qquad \Rightarrow \qquad K_{\mathrm{t}} = 1.95$$

Tensione locale massima e del coefficiente di sicurezza

$$\sigma^{\max} = K_{\mathrm{t}}\sigma_N = 78\,\mathrm{MPa} \qquad CS_{\mathrm{psn}} = \frac{R_{\mathrm{p0.2}}}{\sigma^{\max}} = \frac{355}{78} = 4.55$$

Carico di primo snervamento e carico ipotizzato

$$T_{\mathrm{psn}} = T \cdot CS_{\mathrm{psn}} = 291282.1\,\mathrm{N}$$

$$T_{120\%} = 1.2 \cdot T_{\mathrm{psn}} = 349538.5\,\mathrm{N}$$

Tensione teorica e tensione residua

$$\sigma^{\max}(T_{120\%}) = K_{\mathrm{t}} \cdot \sigma_{\mathrm{nom}}(T_{120\%}) = K_{\mathrm{t}} \cdot \frac{T_{120\%}}{bh} = 426\ \mathrm{MPa} \quad (\mathrm{NB: 426\ MPa} = 1.2 \cdot R_{\mathrm{p0.2}}!!)$$

$$\sigma_{residua} = R_{\mathrm{p0.2}} - \sigma^{\max}(T_{120\%}) = 355 - 426 = -71\,\mathrm{MPa}$$

CAPITOLO 3

Esercizio 3-1

In un componente il K_{I} applicato è pari a 21 $\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}$. Sapendo che il materiale ha un limite di snervamento di 560 MPa, stimare la dimensione della zona plastica nel caso di tensione piana e in quello di deformazione piana.

Soluzione:

Stato di tensione piana $\quad r_p \approx \frac{1}{\pi}\left(\frac{K_I}{\sigma_p}\right)^2 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{21}{560}\right)^2 \approx 4.5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m} = 0.45\,\mathrm{mm}$

Stato di deformazione piana $\quad r_p \approx \frac{1}{3\pi}\left(\frac{K_I}{\sigma_p}\right)^2 = \frac{1}{3\pi}\left(\frac{21}{560}\right)^2 \approx 1.5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m} = 0.15\,\mathrm{mm}$

Esercizio 3-2

Stimare l'estensione della zona plastica in deformazione piana in due componenti soggetti allo stesso K_{I} applicato (30 $\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}$), uno costruito con un materiale che presenta un limite di snervamento di 700 MPa, l'altro costruito con un materiale avente limite di snervamento di 1450 MPa.

Soluzione

Per il materiale con σ_p = 700 MPa $\quad r_p \approx \frac{1}{3\pi}\left(\frac{K_I}{\sigma_p}\right)^2 = \frac{1}{3\pi}\left(\frac{30}{700}\right)^2 \approx 1.9 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m} = 0.19\,\mathrm{mm}$

Per il materiale con σ_p = 1450 MPa $\quad r_p \approx \frac{1}{3\pi}\left(\frac{K_I}{\sigma_p}\right)^2 = \frac{1}{3\pi}\left(\frac{30}{1450}\right)^2 \approx 4.5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m} = 0.045\,\mathrm{mm}$

Esercizio 3-3

Data una trave in ghisa sferoidale con sezione rettangolare di altezza 100 mm, spessore 24 mm, soggetta ad un momento flettente di 4000 Nm che presenta un difetto laterale di lunghezza caratteristica 10 mm, calcolare il coefficiente di sicurezza a rottura fragile.

Soluzione
Il fattore di intensità delle tensioni applicato è dato dalla formula:

$$K_{\mathrm{I}} = Y\sigma\sqrt{a}$$

dove, essendo a= 10 mm = 0.01 m, B = 24 mm, w = 100 mm, a/w = 0.1:

$$Y = 1.12\sqrt{\pi} - 2.47\left(\frac{a}{w}\right) + 12.97\left(\frac{a}{w}\right)^2 - 23.17\left(\frac{a}{w}\right)^3 + 24.80\left(\frac{a}{w}\right)^4 = 1.85$$

$$\sigma = \frac{6 \cdot M}{B \cdot w^2} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 10^6}{24 \cdot 100^2} = 100\,\text{MPa}$$

da cui

$$K_\text{I} = Y\sigma\sqrt{a} = 1.85 \cdot 100 \cdot \sqrt{0.01} = 18.5\ \text{MPa}\sqrt{\text{m}}$$

Dalla tabella del Capitolo 3 si ricava che la ghisa sferoidale ha le seguenti caratteristiche:

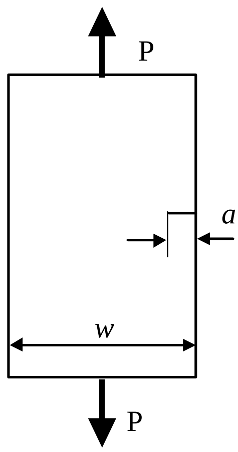
$$\sigma_p = 500\ \text{MPa e } K_{\text{Ic}} = 40\ \text{MPa}\sqrt{\text{m}}\ .$$

Il coefficiente di sicurezza a rottura fragile è quindi:

$$CS = \frac{K_{\text{Ic}}}{K_\text{I}} = \frac{40}{18.5} = 2.17$$

Esercizio 3-4

Una piastra in alluminio (7075-T6) , di larghezza imposta w = 100 mm, deve sopportare un carico di trazione di 360 kN. Si determini lo spessore della piastra (approssimato al mm) necessario affinché si abbia un coefficiente di sicurezza CS=1.5 supponendo che vi sia una cricca laterale passante con dimensione caratteristica 3.5 mm.



Soluzione

Dalla tabella riportata nel Capitolo 3 ricaviamo le seguenti caratteristiche per il materiale in esame:

$$\sigma_p = 560\ \text{MPa e } K_{\text{Ic}} = 32\ \text{MPa}\sqrt{\text{m}}\ .$$

Determinazione spessore considerando lo snervamento

$$\sigma_{net} = \frac{P}{B_{sn}(w-a)} = \frac{\sigma_p}{CS} \quad \Rightarrow \quad B_{sn} = CS\,\frac{P}{\sigma_p(w-a)} = 10\ \text{mm}$$

Determinazione spessore considerando la rottura fragile:

$$K_\text{I} = Y\sigma\sqrt{a} = Y\frac{P}{B_{fr} \cdot w}\sqrt{a} = \frac{K_{\text{Ic}}}{CS} \quad \Rightarrow \quad B_{fr} = CS\,\frac{Y \cdot P \cdot \sqrt{a}}{K_{\text{Ic}} \cdot w} = 20\ \text{mm}$$

essendo

$$Y = 1.12\sqrt{\pi} - 0.41\left(\frac{a}{w}\right) + 18.70\left(\frac{a}{w}\right)^2 - 38.48\left(\frac{a}{w}\right)^3 + 53.85\left(\frac{a}{w}\right)^4 = 1.99$$

Per avere un coefficiente di sicurezza 1.5 la piastra dovrà avere uno spessore di 20 mm.

Esercizio 3-5

Una volta messa in opera la piastra progettata nell'esercizio precedente si scopre un difetto superficiale semiellittico con profondità di cricca a= 5 mm e larghezza 2c = 20 mm. Calcolare il coefficiente di sicurezza.

Soluzione

Per il calcolo del fattore di intensità delle tensioni si utilizza la formula:

$$K_{\text{I,max}} = 1.12 M_k \sigma\sqrt{\frac{\pi a}{Q}}$$

La tensione applicata vale: $$\sigma = \frac{P}{WB} = 180\ \text{MPa}$$

I coefficienti M_k e Q si ricavano dagli appositi diagrammi tenendo conto dei seguenti rapporti:

$$\frac{a}{2c} = 0.25 \quad \frac{\sigma}{\sigma_p} \cong 0.3 \quad \frac{a}{B} = 0.25$$

e valgono $M_k \approx 1.05$ e $Q \approx 1.25$, quindi;

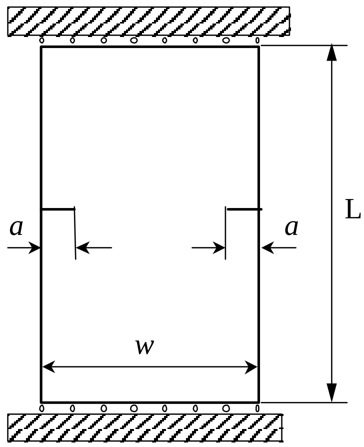
$$K_{\mathrm{I,max}} = 1.12 M_k \sigma \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} \cong 24 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$$

Il coefficiente di sicurezza vale quindi:

$$CS = \frac{K_{\mathrm{Ic}}}{K_{\mathrm{I,max}}} \cong 1.33$$

Esercizio 3-6

Una apparecchiatura consiste in una piastra di dimensioni L= 1000 mm, w= 200 mm, B = 40 mm.
La piastra è vincolata fra due pareti sostanzialmente indeformabili in modo che non sia possibile lo spostamento assiale ma sia possibile uno spostamento laterale.
La piastra viene montata alla temperatura di 20°C e durante il funzionamento può essere portata a temperature variabili da 120°C a -100°C.
Durante la vita dell'apparecchiatura vengono individuati due difetti laterali assimilabili a 2 cricche laterali passanti con a = 10 mm.
Il coefficiente di dilatazione termica medio nel campo di temperature di funzionamento è $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ 1/°C.
Le altre caratteristiche del materiale della piastra sono note a 4 differenti temperature riporttate nella tabella.
Verificare la possibilità di utilizzare l'apparecchiatura agli estremi del campo di temperatura previsto in presenza dei difetti rilevati.



:

Temperatura (°C)	-200	-20	20	200
σ_p (MPa)	1800	1800	1400	1400
K_{Ic} (MPa$\sqrt{\text{m}}$)	40	40	60	60
E (MPa)	$2.2 \cdot 10^5$	$2.2 \cdot 10^5$	$2.0 \cdot 10^5$	$2.0 \cdot 10^5$

Soluzione

Quando la temperatura passa da 20°C a 120°C il componente viene sollecitato in compressione, quindi la presenza dei difetti non influisce sulle sue prestazioni.
Viceversa, quando il componente è raffreddato si generano delle tensioni di trazione e la tenacità alla frattura diminuisce.

Calcolo della tensione nominale alla temperatura di –100°C
Si indichi con z la coordinata assiale della piastra (parallela alla dimensione L)
La tensione nominale può essere calcolata facilmente utilizzando la legge costitutiva del materiale, di cui si riporta solo l'equazione utile in questo esercizio:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) + \alpha \Delta T$$

Si osservi che, con le condizioni di vincolo imposte, risultano nulle le tensioni σ_x e σ_y e la deformazione ε_z. La differenza di temperatura è pari a: $\Delta T = (-100°) - 20° - = -120°C$, quindi:

$$\sigma_z = -\alpha E \Delta T = -12 \times 10^{-6} \times 2.2 \times 10^5 \times (-120) \cong 317 \text{ MPa}$$

Verifica a snervamento
Il rapporto fra la tensione nominale e quella netta è pari al rapporto fra le aree:

$$\sigma_{net} = \sigma_z \frac{Bw}{B(w - 2a)} = 317 \frac{200}{(200 - 20)} \cong 352 \text{ MPa}$$

Il coefficiente di sicurezza contro lo snervamento è quindi:

$$CS_{sn} = \frac{\sigma_p}{\sigma_{net}} = \frac{1800}{352} \cong 5.11$$

Verifica a rottura fragile
Si deve calcolare il fattore di intensità delle tensioni:

$$K_{\mathrm{I}} = Y\sigma\sqrt{a} = 2.01 \times 317 \times \sqrt{0.01} = 64\ \mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}$$

$$\text{essendo} \quad Y = 1.12\sqrt{\pi} + 0.76\left(\frac{a}{w}\right) - 8.48\left(\frac{a}{w}\right)^2 + 27.36\left(\frac{a}{w}\right)^3 = 2.01$$

Poiché la tenacità alla frattura per temperature inferiori a –20°C è di 40 $\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}$ il componente non può essere utilizzato alla temperatura di –100°C.
Utilizzando le funzioni di ricerca obiettivo di un foglio elettronico è facile ricavare che la temperatura minima che può essere sopportata dal componente (con coefficiente di sicurezza pari a 1) e di –55°C.

CAPITOLO 4

Esercizio 4-1

Una piastra di alluminio 7075-T6 di sezione rettangolare, larghezza w = 400 mm, spessore B = 10 mm è soggetta ad un carico normale alla sezione variabile P 100 ÷ 500 kN.
Durante una ispezione viene scoperta una cricca laterale passante di dimensione a = 4 mm.
Calcolare il numero di cicli sopportabile prima del cedimento della piastra, sapendo che nelle condizioni di funzionamento previste le caratteristiche dell'alluminio utilizzato sono le seguenti:

- Tensione di snervamento σ_p = 560 MPa
- Tenacità alla frattura $K_{\mathrm{Ic}} = 32\ \mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}$.
- Costanti della legge di Paris n = 4.4 C = 2.7 $\cdot 10^{-11}$
- Valore di soglia $\Delta K_{th} = 1.7\ \mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}$

Soluzione

- Calcolo delle tensioni nominali

$$\sigma_{\max} = \frac{P_{\max}}{B \cdot w} = \frac{500000}{10 \cdot 400} = 125\ \mathrm{MPa} \qquad \sigma_{\min} = \frac{P_{\min}}{B \cdot w} = \frac{100000}{10 \cdot 400} = 25\ \mathrm{MPa}$$

$$\Delta\sigma = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = 100\ \mathrm{MPa} \qquad R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = 0.2$$

- Calcolo della lunghezza critica

Per la geometria proposta il fattore geometrico vale:

$$Y = 1.12\sqrt{\pi} - 0.41\left(\frac{a}{w}\right) + 18.70\left(\frac{a}{w}\right)^2 - 38.48\left(\frac{a}{w}\right)^3 + 53.85\left(\frac{a}{w}\right)^4$$

Inizialmente il fattore geometrico assume quindi il valore Y_0 = 1.9829
Se si suppone che il fattore geometrico non cambi durante la propagazione si ottiene una lunghezza critica, per frattura fragile, di:

$$a_{\mathrm{cr}} = \left(\frac{K_{\mathrm{Ic}}}{Y_0\sigma_{\max}}\right)^2 = 0.0167\ \mathrm{m} = 16.7\ \mathrm{mm}$$

Il calcolo può essere raffinato considerando variabile il fattore geometrico, utilizzando ad esempio le funzioni di ricerca obiettivo o 'risolutore' di un foglio elettronico:

Situazione iniziale	Calcolo iterativo con risolutore				Situazione finale	Calcolo iterativo con risolutore		
a	Y	a_{cr}	a_{cr}-a		a	Y	a_{cr}	a_{cr}-a
0.0167	1.9980	0.0164	-0.000283		0.0164	1.9973	0.0164	2.181E-08

La differenza fra le due soluzioni è di 0.3 mm.
La dimensione critica che porta a collasso plastico viene calcolata considerando che in condizioni di collasso plastico per la geometria assegnata:

$$\sigma_{net} = \frac{P_{\max}}{B(w - a_{sn})} = \frac{\sigma_{\max}Bw}{B(w - a_{sn})} = \sigma_p$$

da cui con semplici passaggi si ottiene

$$a_{sn} = w\left(1 - \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_p}\right) = 0.311\ \mathrm{m}$$

Essendo in questo caso $a_{cr} < a_{sn}$ la condizione di cedimento è la rottura fragile e la dimensione critica vale 0.0167 m.

– Calcolo della durata

Il calcolo della durata può essere eseguito con facilità con un foglio elettronico imponendo un aumento fisso della cricca ad ogni passo.
Le varie grandezze sono calcolate per ogni passo utilizzando ilvalore medio della dimensione a.
Il calcolo termina quando viene raggiunta la dimensione critica.
Un esempio di integrazione che utilizza un passo di 0.001 m è riportato nella tabella seguente:

Calcolo della durata			aumento fisso		0.001	a_f=	0.0164
(calcolo con af da risolutore)							
a_i	a_{i+1}	a_m	Y	ΔK	da/dN	ΔN	N_{tot}
0.0040	0.0050	0.0045	1.9828	13.301	2.64E-06	378	378
0.0050	0.0060	0.0055	1.9829	14.706	4.12E-06	242	620
0.0060	0.0070	0.0065	1.9833	15.990	5.98E-06	167	787
0.0070	0.0080	0.0075	1.9838	17.180	8.22E-06	121	908
0.0080	0.0090	0.0085	1.9845	18.296	1.09E-05	91	999
0.0090	0.0100	0.0095	1.9855	19.352	1.39E-05	71	1070
0.0100	0.0110	0.0105	1.9866	20.357	1.75E-05	57	1127
0.0110	0.0120	0.0115	1.9879	21.318	2.14E-05	46	1173
0.0120	0.0130	0.0125	1.9895	22.243	2.59E-05	38	1211
0.0130	0.0140	0.0135	1.9912	23.136	3.08E-05	32	1243
0.0140	0.0150	0.0145	1.9931	24.000	3.63E-05	27	1270
0.0150	0.0160	0.0155	1.9952	24.840	4.23E-05	23	1293
0.0160	0.0164	0.0162	1.9968	25.426	4.69E-05	9	1302
0.0164	0.0164	0.0164	1.9973	25.600	4.83E-05	0	1302

Utilizzando un passo di 0.0005 m si ottiene una durata poco diversa (N= 1308 cicli)

CAPITOLO 5

Esercizio 5-1

Un programma di prove eseguito utlizzando il metodo stair case ha dato i risultati riportati in tabella. Calcolare i limiti di fatica con il 10%, 50% e 90% di probabilità di rottura.

Prove di fatica σ_m = 80 MPa							d=20 MPa					1 = Rotta; 0 = Non rotta								
σ_a (MPa)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
220	1																			
200		1																		
180			1																	
160				1				1										1		1
140					1		0		1				1				0		0	
120						0				1		0		1		0				
100											0				0					

Soluzione

Devono essere considerate solamente le prove dalla n° 4 alla n° 20.

– Conteggio eventi, individuazione evento meno frequente, calcolo coefficienti:

	Esito			Evento meno frequente: non rotte						
σ_a (MPa)	Rotte	Non rotte		i		n		$i{\times}n$		i^2n
160	4	0		3		0		0		0
140	3	3		2		3		6		12
120	2	3		1		3		3		3
100	0	2		0		2		0		0
tot	9	8			N =8		A =9		B =15	

– Calcolo limite di fatica al 50% di probabilità:

$$\sigma_{D(50\%)} = \sigma_0 + d \cdot \left(\frac{A}{N} + 0.5 \right) = 100 + 20 \cdot \left(\frac{9}{8} + 0.5 \right) \cong 133\,\text{MPa}$$

– Calcolo scarto tipo:
Essendo

$$\frac{NB-A^2}{N^2}=\frac{8\cdot 15-9^2}{8^2}=0.609>0.3$$

Si utilizza la formula:

$$s=1.62d\left(\frac{NB-A^2}{N^2}+0.029\right)=1.62\cdot 10\cdot(0.609+0.029)\cong 21\,\mathrm{MPa}$$

– I valori al 10% e 90% di probabilità di rottura sono quindi:

$$\sigma_{D(10\%)}=\sigma_{D(50\%)}-1.28\cdot s\cong 106\,\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_{D(90\%)}=\sigma_{D(50\%)}+1.28\cdot s\cong 159\,\mathrm{MPa}$$

Esercizio 5-2

Un materiale con R_m = 500 MPa, $R_{p0.2}$ = 400 MPa, viene provato a fatica utilizzando la procedura stair-case. Indicare i valori di partenza del secondo parametro del ciclo più adatto nei casi in cui il primo parametro del ciclo, mantenuto costante nelle varie prove, sia :

– R =-1
– R = 0 R = 0.1 R = 0.25 R = 0.6
– σ_{min} = 0 MPa σ_m = 50 MPa σ_m = 130 MPa σ_m = 250 MPa

Soluzione

– R=-1

E' la condizione standard. La stima del limite di fatica in questo caso è effettuata utilizzando il criterio di Bach:

$$\sigma_{D-1}=0.5\,R_m=250\,\mathrm{MPa}$$

– R = 0; R = 0.1; R = 0.25; R = 0.6

Tradizionalmente il secondo parametro nei casi in cui si imponga il rapporto di tensione è individuato nel campo di tensione $\Delta\sigma = 2\sigma_a$

Il valore della tensione alternata ammissibile (e quindi quello del campo di tensione) si può ricavare come intersezione fra la retta di Goodman e una retta con inclinazione R_a (rapporto di ampiezza), ricordando che :

$$R_a=\frac{1-R}{1+R}$$

Indicando con m l'inclinazione della retta di Goodman:

$$m=\frac{\sigma_{D-1}}{R_m}$$

si ha:

$$\frac{(\Delta\sigma)_D}{2}=\sigma_{D-1}-m\cdot\sigma_m \qquad \frac{(\Delta\sigma)_D}{2}=R_a\cdot\sigma_m$$

da cui, con semplici passaggi si ottiene

$$(\Delta\sigma)_D=\frac{2\cdot\sigma_{D-1}}{(1+m)}$$

Trovato questo valore è necessario verificare che la tensione massima non superi il valore $R_{p0.2}$:

$$\sigma_{max}=\sigma_a+\sigma_m=\sigma_a\left(1+\frac{1}{R_a}\right)=\sigma_a\left(1+\frac{1+R}{1-R}\right)=\frac{2\cdot\sigma_a}{1-R}$$

e quindi, nella condizione limite:

$$(\sigma_{max})_D=\frac{\Delta\sigma_D}{1-R}$$

Nel caso in cui la tensione massima sia superiore a quella di snervamento:

$$(\sigma_{max})_D>R_{p02} \qquad \Rightarrow \qquad (\Delta\sigma)_D=R_{p02}(1-R)$$

Per i casi indicati si ha quindi:

R	R_a	$(\Delta\sigma)_D$	σ_{max}	
0	1	332	332	$< R_{p0.2}$
0.1	0.82	310	344	$< R_{p0.2}$
0.25	0.6	272	363	$< R_{p0.2}$
0.6	0.25	166	415	$> R_{p0.2}$

Nell'ultimo caso (R=0.6) la tensione massima prevista è superiore a quella di snervamento; in questo caso il campo di tensione massimo che può essere impostato senza superare il limite elastico risulta:

$$(\Delta\sigma)_D = R_{p02}(1 - R) = 400(1 - 0.6) = 160 \text{ MPa}$$

– $\sigma_{min} = 0$ MPa $\sigma_m = 50$ MPa $\sigma_m = 150$ MPa $\sigma_m = 250$ MPa

Nel caso di prove con tensione minima costante si deve trovare la relazione fra la tensione massima prevista data la tensione minima. Anche in questo caso si considera l'equazione di Goodman

$$\sigma_D = \sigma_{D-1} - m \times \sigma_m$$

Ricordando che:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \qquad \sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$$

Con facili passaggi si ottiene:

$$\sigma_{max} = \frac{2 \times \sigma_{D-1} + (1 - m) \times \sigma_{min}}{1 + m}$$

Anche in questo caso il valore della tensione massima deve essere limitato dal valore di snervamento.
Nei casi indicati si ottiene

σ_{min}	σ_{max}	
0	333	$< R_{p0.2}$
50	350	$< R_{p0.2}$
150	383	$< R_{p0.2}$
250	416	$> R_{p0.2}$

Nell'ultimo caso si deve imporre $\sigma_{max} = 400$ MPa

L'intero esercizio può essere svolto graficamente utilizzando i diagrammi di Haig e master

Esercizio 5-3

Un provino in acciaio 39NicrMo3 bonificato ($R_m = 980$ MPa $R_{p0.2} = 785$ MPa) di diametro 10 mm è soggetto ad una prova di flessione rotante con tensione media pari a 300 MPa.
Supponendo di utilizzare diagrammi semilogaritmici:

– calcolare la durata prevista per una sollecitazione alternata di 400 MPa;
– calcolare la tensione alternata che dovrebbe portare ad una durata di $5 \cdot 10^5$ cicli;

Ripetere i calcoli utilizzando diagrammi doppio logaritmici.

Soluzione

La stima del limite di fatica con tensione media nulla è effettuata utilizzando il criterio di Bach:

$$\sigma_{D-1} = 0.5\, R_m = 490 \text{ MPa}$$

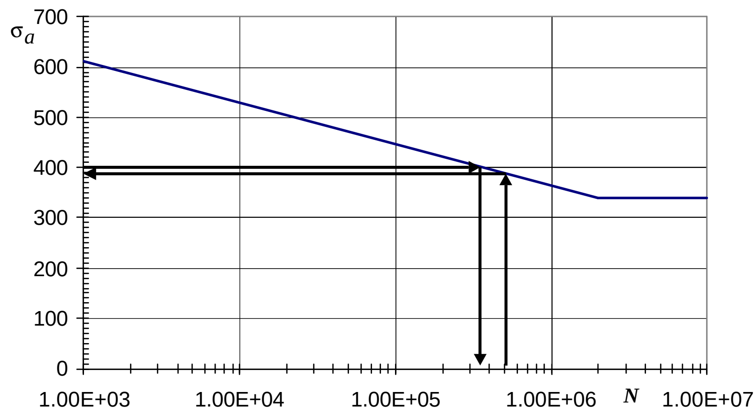
Il limite di fatica con tensione media di 300 MPa viene ricavato considerando l'equazione di Goodman:

$$\sigma_D = \sigma_{D-1} - \frac{\sigma_{D-1}}{R_m} \cdot \sigma_m = 490 - 0.5 \cdot 300 = 340 \text{ MPa}$$

Si noti che la tensione massima del ciclo, pari a 640 MPa, è inferiore a $R_{p0.2}$.
Si suppone che il numero di cicli corrispondente a tale valore si $N_G = 2 \cdot 10^6$ cicli
Il secondo punto (punto F) necessario per stimare la curva SN con una retta avrà coordinate:

$$(10^3, 0.9(R_m - \sigma_m)), \text{ cioè } (10^3, 612 \text{ MPa})$$

– Diagrammi semilogaritmici:



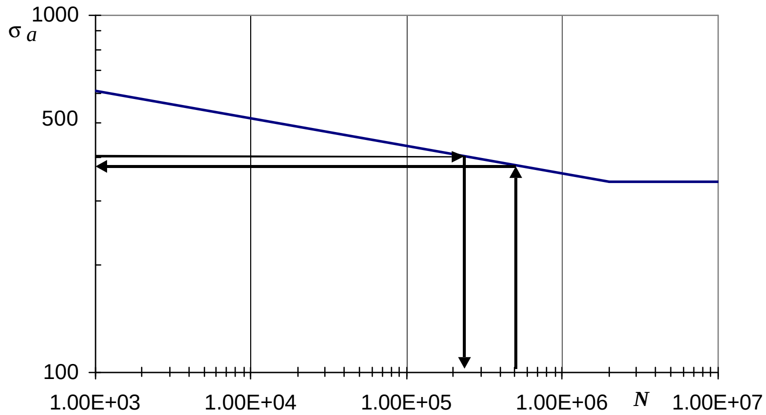
La durata prevista con una tensione alternata di 400 MPa si ottiene dalla formula:

$$\log N = \log N_F + \frac{\sigma_F - \sigma_a}{\sigma_F - \sigma_D}(\log N_G - \log N_F) = 5.573 \qquad N = 373991$$

La stima della tensione alternata per ottenere una durata N = 500000 cicli si ottiene dalla formula:

$$\sigma_a = \sigma_F - \frac{\sigma_F - \sigma_D}{\log N_G - \log N_F}(\log N - \log N_F) = 390 \text{ MPa}$$

– Diagrammi doppio logaritmici



Per valutare la durata prevista con una tensione alternata di 400 MPa si utilizza la formula:

$$N\sigma_a^k = B \qquad \text{ovvero} \qquad \log(N) = \log(B) - k\log(\sigma_a)$$

dove:

$$k = \frac{\log(N_G) - \log(N_F)}{\log(\sigma_F) - \log(\sigma_D)} = 12.93 \qquad \log(B) = \log(N_G) + k\log(\sigma_D) = 39.04$$

da cui log (N) = 5.39, N = 244552 cicli

Per stimare la tensione che consente di raggiungere una durata di 500000 cicli si utilizza la formula:

$$\sigma_a = AN^b \qquad \text{ovvero} \qquad \log(\sigma_a) = \log(A) + b\log(N)$$

dove

$$b = \frac{\log(\sigma_D) - \log(\sigma_F)}{\log(N_G) - \log(N_F)} = -\frac{1}{k} = -0.0773$$

$$\log(A) = \log(\sigma_D) - b\log(N_G) = 3.02$$

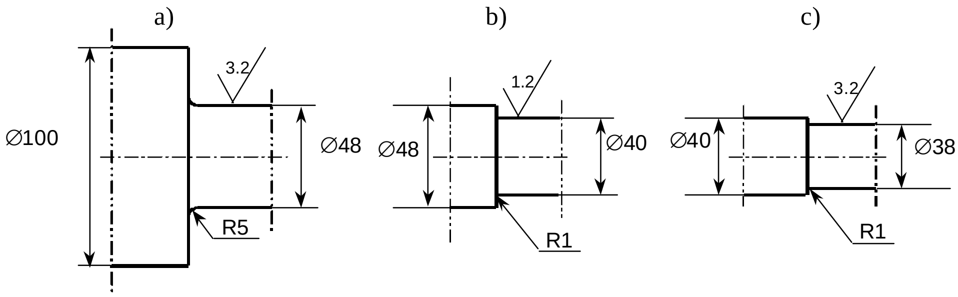
da cui log(σ_a) = 2.58, σ_a = 378 MPa

CAPITOLO 6

Esercizio 6-1

Un albero in 39NicrMo3 (R_m = 980 MPa $R_{p0.2}$ = 785 MPa) presenta i tre spallamenti illustrati nella figura (vedi esercizio 2-2). Per ognuna delle tre geometrie stimare:

– il limite di fatica a flessione rotante
– il limite di fatica a torsione alterna



Soluzione

Limiti di fatica a flessione rotante

Si adotta la formula:

$$\sigma_{D-1} = \sigma^*_{D-1} \cdot \frac{\prod C_i}{K_f}$$

Poiché si considera il limite di fatica a flessione rotante C_L= 1 (Fattore per il tipo di carico)

– Stima del limite di fatica in condizione standard:

Si utilizza il criterio di Bach:

$$\sigma^*_{D-1} = 0.5 R_m = 490 \text{ MPa}$$

– Stima dell'effetto delle dimensioni per le tre geometrie (fattori C_S)

Dall'apposito diagramma si ottiene:

Geometria	d (mm)	C_S
a)	48	0.83
b)	40	0.84
c)	38	0.86

– Stima dell'effetto della finitura superficiale per le tre geometrie (fattori C_F)

Dall'apposito diagramma si ottiene:

Geometria	R_m (MPa)	R_a (μm)	C_F
a)	980	3.2	0.95
b)	980	1.2	0.98
c)	980	3.2	0.95

– Stima del fattore di riduzione della resistenza a fatica

Si utilizza la formula:

$$K_f = 1 + q(K_t - 1)$$

dove:

$$q = \frac{1}{1 + A/\sqrt{r}}$$

La costante A dipende solo dal limite di scostamento dalla proporzionalità del materiale ($R_{p0.2}$) e si ricava dall'apposito diagramma (A = 0.25 mm$^{1/2}$)

Il fattore di concentrazione delle tensioni si ottiene in funzione dei rapporti fra le dimensioni indicate

Geometria	D (mm)	d (mm)	r (mm)	D/d	r/d	$K_{t(flex)}$	A (mm$^{1/2}$)	q	K_f
a)	100	48	5	2.08	0.104	1.75	0.25	0.9	1.68
b)	48	40	1	1.20	0.025	2.35	0.25	0.8	2.08
c)	40	38	1	1.05	0.026	2.00	0.25	0.8	1.80

– Calcolo dei limiti di fatica
Adottando la formula:

$$\sigma_{D\text{-}1} = \sigma^*_{D\text{-}1} \cdot \frac{\prod C_i}{K_f}$$

si ottengono i seguenti risultati:

Geometria	C_L	C_S	C_F	K_f	σ_{D-1} (MPa)
a)	1	0.83	0.95	1.68	230
b)	1	0.84	0.98	2.08	194
c)	1	0.86	0.95	1.80	222

Limiti di fatica a torsione alterna
Si adotta la formula:

$$\tau_{D-1} = \tau^*_{D-1} \cdot \frac{\prod C_i}{K_f}$$

– Stima del limite di fatica in condizione standard in torsione alternata:
Si adotta l'ipotesi di von Mises:

$$\tau^*_{D-1} = \frac{\sigma^*_{D-1}}{\sqrt{3}} = 283 \text{ MPa}$$

Essendo, per il criterio di Bach:

$$\sigma^*_{D\text{-}1} = 0.5 R_\mathrm{m} = 490 \text{ MPa}$$

– Stima dell'effetto delle dimensioni per le tre geometrie (fattori C_S)
Dall'apposito diagramma si ottiene:

Geometria	d (mm)	C_S
a)	48	0.83
b)	40	0.84
c)	38	0.86

– Stima dell'effetto della finitura superficiale per le tre geometrie (fattori C_F)
Dall'apposito diagramma si ottiene:

Geometria	R_m (MPa)	R_a (μm)	C_F
a)	980	3.2	0.95
b)	980	1.2	0.98
c)	980	3.2	0.95

– Stima del fattore di riduzione della resistenza a fatica
Si utilizza la formula:

$$K_f = 1 + q(K_\mathrm{t} - 1)$$

dove:

$$q = \frac{1}{1 + A/\sqrt{r}}$$

La costante A dipende solo dal limite di scostamento dalla proporzionalità del materiale ($R_{\mathrm{p}0.2}$) e si ricava dall'apposito diagramma (A = 0.25 $\mathrm{mm}^{1/2}$)
Il fattore di concentrazione delle tensioni si otiiene in funzione dei rapporti fra le dimensioni indicate

Geometria	D (mm)	d (mm)	r (mm)	D/d	r/d	$K_{\mathrm{t}(tors)}$	A ($\mathrm{mm}^{1/2}$)	q	K_f
a)	100	48	5	2.08	0.104	1.45	0.25	0.9	1.41
b)	48	40	1	1.20	0.025	1.90	0.25	0.8	1.72
c)	40	38	1	1.05	0.026	1.40	0.25	0.8	1.32

– Calcolo dei limiti di fatica

Geometria	C_L	C_S	C_F	K_f	τ_{D-1} (MPa)
a)	1	0.83	0.95	1.41	158
b)	1	0.84	0.98	1.72	135
c)	1	0.86	0.95	1.32	175

Esercizio 6-2

Con riferimento ai dati e ai risultati del caso b) dell'esercizio 6-1:

– Stimare il limite di fatica a flessione alternata per i rapporti di tensione R = 0 e R = 0.5, supponendo di adottare il metodo delle tensioni medie nominali.

– Stimare il limite di fatica a flessione alternata per i rapporti di tensione R = 0 e R = 0.5, supponendo di adottare il metodo proposto da Fuchs.

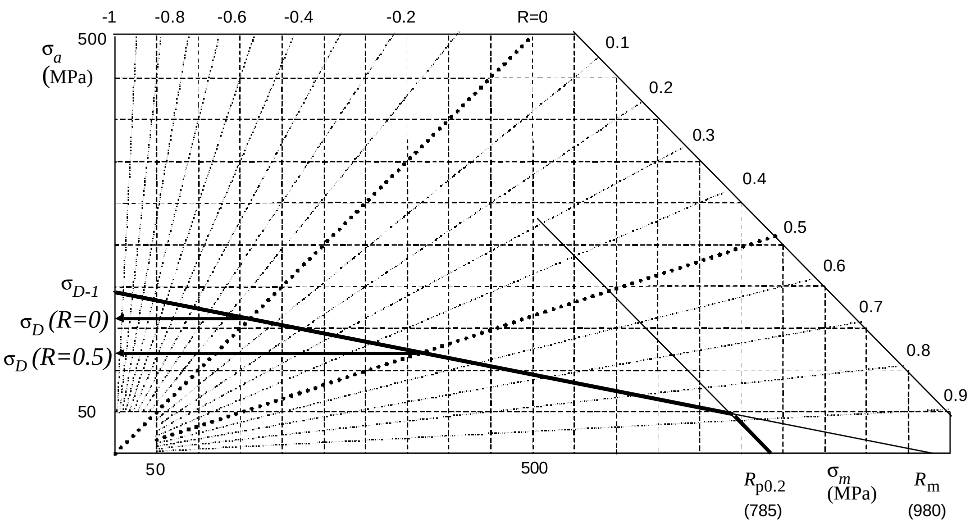
Soluzione

– Metodo delle tensioni medie nominali

Sono dati σ_{D-1}= 194 MPa, R_{m} = 980 MPa $R_{\mathrm{p0.2}}$ = 785 MPa

In questo caso la retta di Goodman su un diagramma di Haigh unisce il punto (0, σ_{D-1}) con il punto (R_{m}, 0).

Il limite di fatica corrisponde alla tensione alternata ottenuta con l'intersezione della retta di Goodman con quella corrispondente al rapporto di tensione voluto.



Per semplificare i calcoli conviene utilizzare il rapporto di ampiezza R_a invece del rapporto di tensione R.

$$R_a = \frac{1-R}{1+R} \qquad R = 0 \Rightarrow R_a = 1 \qquad R = 0.5 \Rightarrow R_a = \frac{1}{3}$$

e definire il rapporto:

$$m = \frac{\sigma_{D-1}}{R_{\mathrm{m}}} = 0.198$$

quindi:

$$\begin{cases} \sigma_D = \sigma_{D-1} - m \cdot \sigma_m \\ \sigma_D = R_a \cdot \sigma_m \end{cases}$$

da cui

$$\sigma_D = \frac{\sigma_{D-1}}{\left(1 + \dfrac{m}{R_a}\right)}$$

Nei casi previsti ottiene:

$$R = 0 \Rightarrow \sigma_D = 162 \text{ MPa} \qquad R = 0.5 \Rightarrow \sigma_D = 122 \text{ MPa}$$

Occorre ancora verificare che la tensione massima non superi il carico unitario di scostamento dalla proporzionalità (tale verifica può essere effettuata anche per via grafica).

$$\sigma_{\max} = \sigma_D + \sigma_m = \sigma_D\left(1+\frac{1}{R_a}\right)$$

Nei casi considerati risultano

$$R = 0 \Rightarrow \sigma_{\max} = 324\,\text{MPa} \qquad R = 0.5 \Rightarrow \sigma_D = 488\,\text{MPa}$$

La tensione massima è sempre inferiore a quella di snervamento. In caso contrario si sarebbero dovuti rifare i calcoli considerando, in luogo della retta di Goodman, quella derivannte dalla condizione di non senrvamento, cioè

$$\sigma_D = R_{\text{p}0.2} - \sigma_m$$

– Metodo di Fuchs

Il procedimento è simile a quello utilizzato per il metodo delle tensioni medie nominali, con la differenza che la tensione alternata limite è individuata da una retta parallela a quella di un provino non intagliato.
Il limite di fatica di un provino non intagliato risulta:

$$\sigma_{D-1}^{ni} = \sigma_{D-1}^{*} \cdot \prod C_1 = 404\ \text{MPa}$$

Il coefficiente angolare della retta risulta quindi:

$$m^{ni} = \frac{\sigma_{D-1}^{ni}}{R_{\text{m}}} = 0.412$$

Per tracciare il diagramma di Haigh si deve inoltre stimare il valore di soglia; per questo acciaio si consideri $\Delta\sigma_{\text{th}}^{+}$ ≈ 60 MPa (σ_{ath}^{+} ≈ 30 MPa)
Il limite di fatica si ricava quindi dal sistema:

$$\begin{cases}\sigma_D = \sigma_{D-1} - m^{ni} \cdot \sigma_m \\ \sigma_D = R_a \cdot \sigma_m\end{cases}$$

da cui

$$\sigma_D = \frac{\sigma_{D-1}}{\left(1+\dfrac{m^{ni}}{R_a}\right)}$$

Nei casi previsti ottiene:

$$R = 0 \Rightarrow \sigma_D = 138\,\text{MPa} \qquad R = 0.5 \Rightarrow \sigma_D = 87\ \text{MPa}$$

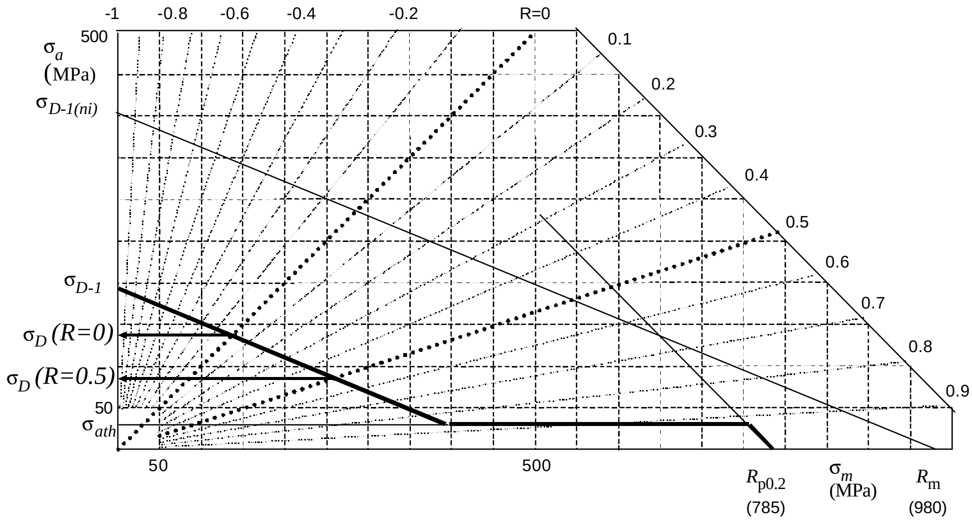
Entrambi i valori sono al di sopra della soglia.
Nel caso in cui il risultato fosse al di sotto della soglia si dovrebbe adottare tale valore come limite di fatica.
Occorre ancora verificare che la tensione massima non superi il carico unitario di scostamento dalla proporzionalità (tale verifica può essere effettuata anche per via grafica).

$$\sigma_{\max} = \sigma_D + \sigma_m = \sigma_D\left(1+\frac{1}{R_a}\right)$$

Nei casi considerati risultano

$$R = 0 \Rightarrow \sigma_{\max} = 276\ \text{MPa} \qquad R = 0.5 \Rightarrow \sigma_D = 348\,\text{MPa}$$

Queste ultime due verifiche possono essere effettuate anche per via grafica.



Esercizio 6-3

Con riferimento ai dati dell'esercizio 6-1 caso b) si supponga che il componente, nella sezione considerata, sia soggetto ad una tensione media di 250 MPa e a una tensione alternata di 200 MPa.
Si stimi la durata prevista, assumendo il limite di fatica a 2 milioni di cicli ottenuto utilizzando il metodo delle tensioni medie nominali e adottando un diagramma *SN* semilogaritmico.

Soluzione

Si deve tracciare il diagramma *SN* del componente
Il limite di fatica a $2 \cdot 10^6$ cicli si ottiene dalla equazione di Goodman:

$$\sigma_D = \sigma_{D-1} - \frac{\sigma_{D-1}}{R_m} \cdot \sigma_m$$

dove (vedi esercizio precedente): σ_{D-1}= 194 MPa, R_m = 980 MPa.

Risulta quindi σ_D = 145 MPa

Le coordinate del primo punto necessario per la stima della retta con cui viene approssimata la curva di Wöhler (G) sono quindi: $(2 \cdot 10^6, 145)$

Il secondo punto (F) ha coordinate $(10^3, 0.9 \cdot (R_m - \sigma_m)$, cioè $(10^3$, 657 MPa)

La durata viene stimata con l'equazione:

$$\log N = \log N_F + \frac{\sigma_F - \sigma_a}{\sigma_F - \sigma_D}(\log N_G - \log N_F) = 5.946$$

Da cui si ottiene N ≈ 884.000 cicli

Esercizio 6-4

Con riferimento ai dati dell'esercizio 6-1 e adottando la teoria di Siebel e Stieler:

- stimare i coefficienti d'intaglio β a flessione rotante, a torsione alterna per le tre geomtrie
- tracciare il diagramma di Haigh del componente (tensioni medie positive. Limitatamente al caso b)).

Soluzione

- Coefficienti di intaglio

Per valutare il coefficiente d'intaglio si utilizza la formula

$$\beta = \frac{K_t}{\delta}$$

dove δ viene letto dall'apposito diagramma in funzione del limite di scostamento dalla proporzionalità del materiale ($R_{p0.2}$ = 785 MPa) e del gradiente relativo.

I gradienti relativi sono calcolati con le formule (vedi Appendice V):

Flessione: $\chi = \frac{4}{D+d} + \frac{2}{r}$

Torsione: $\chi = \frac{4}{D+d} + \frac{1}{r}$

I risultati sono riportati nella tabella seguente:

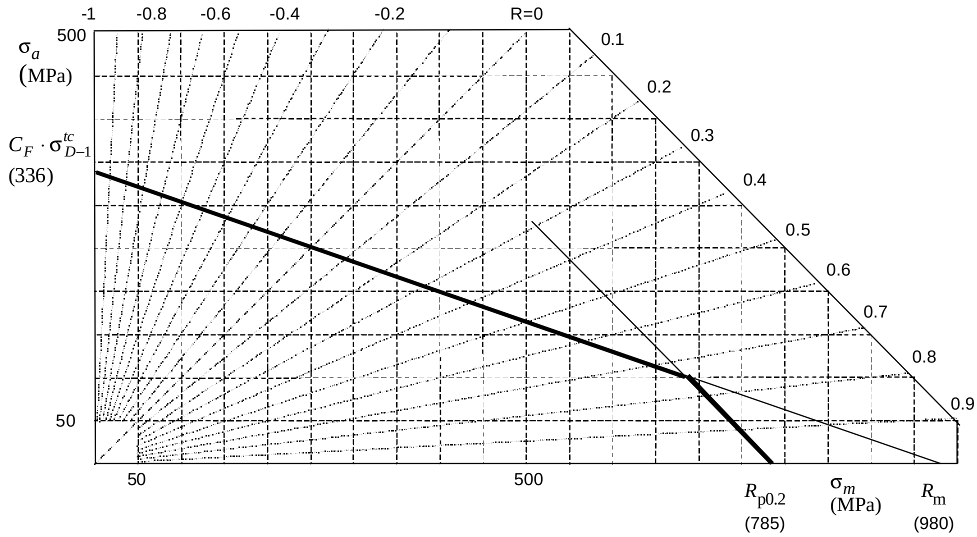
Geometria	Carico	D (mm)	d (mm)	*r* (mm)	K_t	χ	δ	β
a)	Flessione	100	48	5	1.75	0.43	1.04	1.68
	Torsione	100	48	5	1.45	0.23	1.03	1.41
b)	Flessione	48	40	1	2.35	2.05	1.08	2.18
	Torsione	48	40	1	1.90	1.05	1.06	1.81
c)	Flessione	40	38	1	2.00	2.01	1.08	1.85
	Torsione	40	38	1	1.40	1.01	1.05	1.33

- Diagramma di Haigh

Per tracciare il diagramma di Haigh è necessario stimare il limite di fatica del componente non intagliato a trazione compressione:

$$\text{punto A} = C_F \cdot \sigma_{D-1}^{tc} = C_L \cdot C_F \cdot \sigma_{D-1}^{*} = 0.7 \cdot 0.98 \cdot 490 = 336 \text{ MPa}$$

Dal quale è possibile tracciare il diagramma di Haigh (per la teoria di Siebel e Stieler):



CAPITOLO 7

Esercizio 7-1

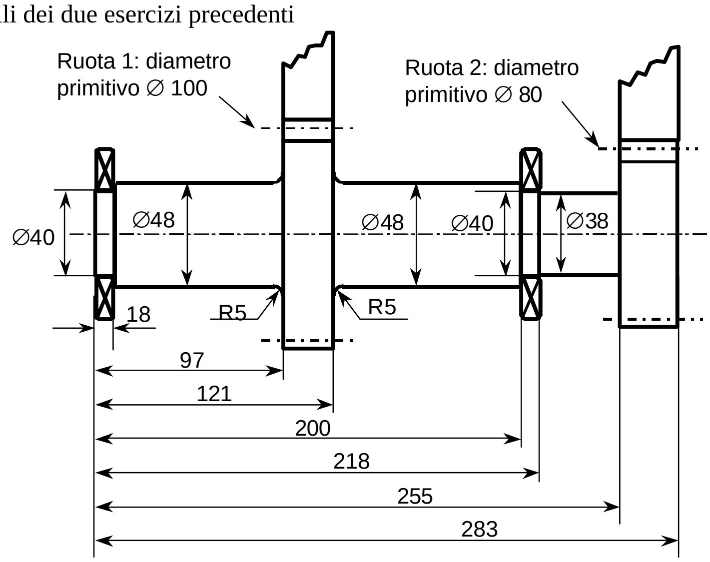
Calcolare il coefficiente di sicurezza a fatica dell'albero dell'esercizio 2-2 (si vedano anche i risultati dell'esercizio 6-1).

Soluzione

Le sezioni dell'albero sono soggette a flessione rotante e ad un momento torcente costante.
Ricordando che una tensione tangenziale costante non influisce sulla resistenza a fatica del componente il coefficiente di sicurezza è calcolato con la formula:

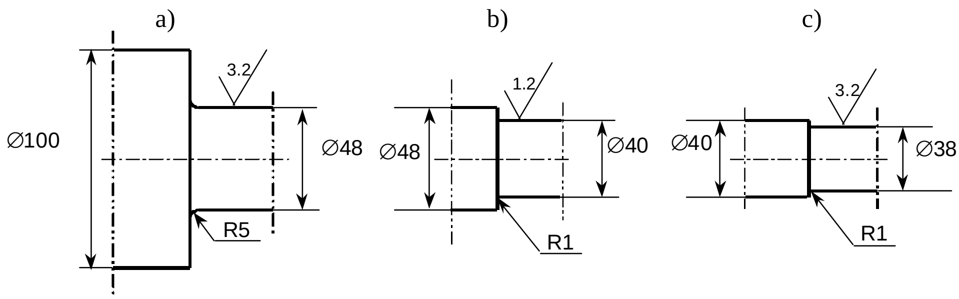
$$CS = \frac{\sigma_{D-1}}{\sigma_a}$$

Per quanto riguarda la tensione alterna applicata questa è uguale alla tensione di flessione calcolata nell'esercizio 2-2, mentre il limite di fatica dipende dalla geometria (esercizio 6-1).
Si riportano i risultati utili dei due esercizi precedenti



Raggi di raccordo non quotati R1

Geometrie:



Sezione	Bsx	Csx	Edx	Fdx	G	Hdx
d (mm)	40	48	48	40	40	38
σ_a (MPa) [Es 2-2]	6	29	32	51	51	51
geometria	b)	a)	a)	b)	-	c)
σ_{D-1} (MPa) [Es 6-1]	194	230	230	194	403	222

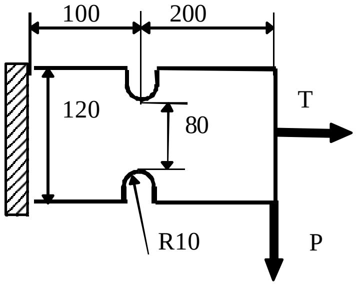
Risulta evidente che la sezione critica e la Fdx, dove si ha il limite di fatica minore associato all tensione alternata applicata più elevata.
Il coefficiente di sicurezza risulta quindi:

$$CS = \frac{\sigma_{D-1}}{\sigma_a} = \frac{194}{51} = 3.8$$

Esercizio 7-2

Una piastra in S355 EN 10027/1 (Fe510 UNI 7070), limite di fatica standard $\sigma_{D\text{-}1}$ = 250 MPa, delle dimensioni indicate in figura e spessore b= 15 mm viene caricata con un carico trasversale variabile P = -2÷2 kN e da un carico parallelo all'asse costante T = 36 kN.
La piastra è ottenuta per fresatura, con rugosità superficiale 16 μm.
Calcolare il coefficiente di sicurezza a fatica della piastra, utilizzando il metodo delle tensioni medie nominali nella zona dell'intaglio nei seguenti casi:

a) all'aumentare delle prestazioni richieste aumenta solo il modulo di P;
b) all'aumentare delle prestazioni richieste aumentano proporzionalmente P e T;
c) all'aumentare delle prestazioni richieste aumenta solo T.



Soluzione

– Calcolo delle tensioni nominali:

$$\sigma_N \equiv \sigma_m = \frac{T}{A} = \frac{36000}{80 \cdot 15} = 30\,\text{MPa}$$
$$\sigma_f^{\max} \equiv \sigma_a = \frac{6M_f}{b \cdot h^2} = \frac{6 \cdot 2000 \cdot 200}{15 \cdot 80^2} = 25\,\text{MPa}$$

– Stima del limite di fatica del componente

$$C_S \approx 0.77, \quad C_F \approx 0.88$$

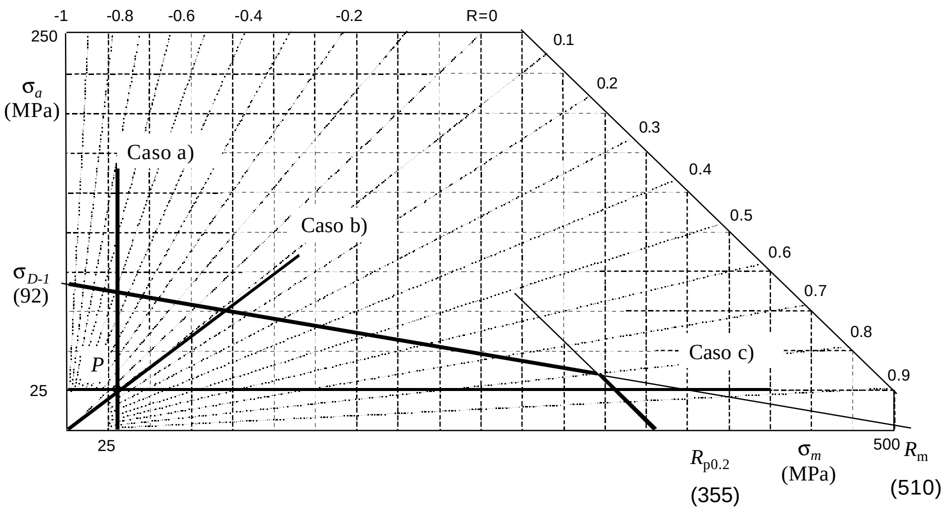
$$\frac{H}{h} = \frac{120}{80} = 1.5 \qquad \frac{r}{h} = \frac{10}{80} = 0.125 \quad \Rightarrow \quad K_t(\text{flessione}) = 1.95$$

$$q = \frac{1}{1 + A/\sqrt{r}} = \frac{1}{1 + \frac{0.45}{\sqrt{10}}} = 0.88$$

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) = 1.84$$

$$\sigma_{D-1} = \sigma^*_{D-1} \cdot \frac{\prod C_i}{K_f} = 250 \frac{0.77 \cdot 0.88}{1.84} \cong 92\text{ MPa}$$

– Calcolo dei coefficienti di sicurezza nei tre casi



Calcolo del coefficiente angolare (in modulo) della retta di Goodman e del rapporto di ampiezza:

$$m = \frac{\sigma_{D-1}}{R_\mathrm{m}} \approx 0.180 \qquad R_a = \frac{\sigma_a}{\sigma_\mathrm{m}} \approx 0.833$$

Caso a)

$$\sigma_D^{\lim} = \sigma_{D-1} - m \cdot \sigma_m = 92 - \frac{92}{510}30 \cong 86 \ \text{MPa}$$

Verifica sulla tensione massima limite

$$\sigma_{\max}^{\lim} = \sigma_D^{\lim} + \sigma_m = 86 + 30 = 116 \,\text{MPa} < R_{\mathrm{p}0.2} (= 355\,\text{MPa})$$

Il coefficiente di sicurezza vale quindi: $CS = \dfrac{\sigma_D^{\lim}}{\sigma_a} = \dfrac{86}{25} = 3.44$

Caso b)

$$\begin{cases} \sigma_D^{\lim} = \sigma_{D-1} - m \cdot \sigma_m^{\lim} \\ \sigma_D^{\lim} = R_a \sigma_m^{\lim} \end{cases} \Rightarrow \qquad \begin{aligned} \sigma_D^{\lim} &= \frac{\sigma_{D-1}}{\left(1 + \frac{m}{R_a}\right)} \cong 76\,\text{MPa} \\ \sigma_m^{\lim} &= \frac{\sigma_{D-1}}{(R_a + m)} \cong 91\,\text{MPa} \end{aligned}$$

Verifica della tensione massima

$$\sigma_{\max}^{\lim} = \sigma_D^{\lim} + \sigma_m^{\lim} = 76 + 91 = 167\,\text{MPa} < R_{\mathrm{p}0.2} (= 355\,\text{MPa})$$

e quindi il coefficiente di sicurezza vale:

$$CS = \frac{\sigma_D^{\lim}}{\sigma_a} = \frac{76}{25} = 3.04$$

caso c)

$$\sigma_D^{\lim} = \sigma_{D-1} - m \cdot \sigma_m^{\lim} = \sigma_a \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_m^{\lim} = \frac{(\sigma_{D-1} - \sigma_a)}{m} = 371\,\text{MPa}$$

La tensione massima limite è superiore alla tensione di snervamento (355 MPa).
Il valore limite deve quindi essere trovato utilizzando la retta a 45° corrispondente alla condizione di snervamento

$$\sigma_{\max}^{\lim} = \sigma_m^{\lim} + \sigma_a = R_{\mathrm{p}0.2} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_m^{\lim} = R_{\mathrm{p}0.2} - \sigma_a = 355 - 25 = 330\,\text{MPa}$$

Da cui il coefficiente di sicurezza risulta:

$$CS = \frac{\sigma_m^{\lim}}{\sigma_m} = \frac{330}{30} = 11$$

Esercizio 7-3

Ripetere l'esercizio 7-2 – caso b), utilizzando il metodo di Fuchs.

Soluzione

– Calcolo delle tensioni nominali:

$$\sigma_N \equiv \sigma_m = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{A}} = \frac{36000}{80 \cdot 15} = 30\,\text{MPa}$$
$$\sigma_f^{\max} \equiv \sigma_a = \frac{6M_f}{b \cdot h^2} = \frac{6 \cdot 2000 \cdot 200}{15 \cdot 80^2} = 25\,\text{MPa}$$

– Stima del limite di fatica del componente

$$C_S \approx 0.77, \quad C_F \approx 0.88$$

$$\frac{H}{h} = \frac{120}{80} = 1.5 \qquad \frac{r}{h} = \frac{10}{80} = 0.125 \qquad \Rightarrow \qquad K_\mathrm{t}(\text{flessione}) = 1.95$$

$$q = \frac{1}{1 + A/\sqrt{r}} = \frac{1}{1 + \frac{0.45}{\sqrt{10}}} = 0.88$$

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) = 1.84$$

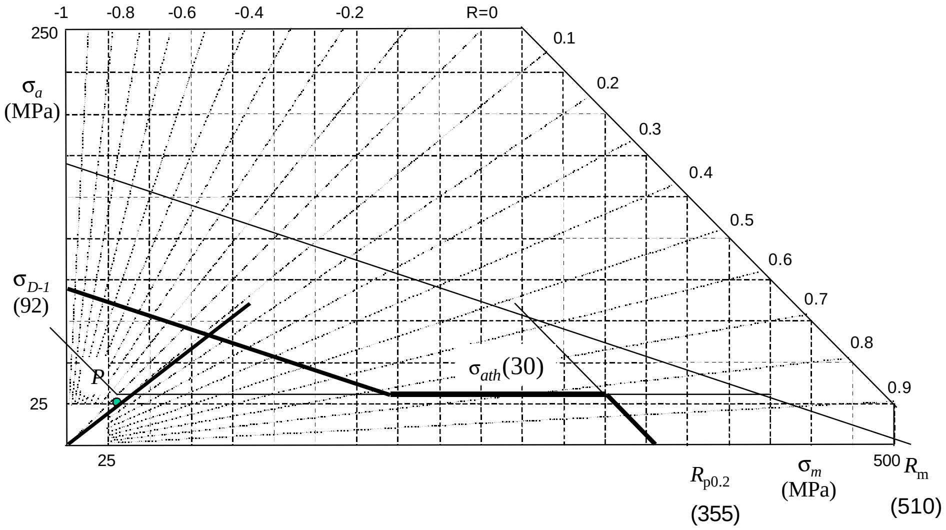
$$\sigma_{D-1} = \sigma^*_{D-1} \cdot \frac{\prod C_i}{K_f} = 250 \frac{0.77 \cdot 0.88}{1.84} \cong 92 \text{ MPa}$$

– Stima del limite di fatica del componente non intagliato

$$\sigma^{ni}_{D-1} = \sigma^*_{D-1} \cdot \prod C_i = 250 \cdot 0.77 \cdot 0.88 \cong 169 \text{ MPa}$$

Si suppone inoltre che il materiale presenti un valore di soglia $\Delta\sigma^+_{th} \approx 60$ MPa

– Calcolo del coefficiente di sicurezza



Calcolo del coefficiente angolare (in modulo) della retta di Goodman e del rapporto di ampiezza:

$$m^{ni} = \frac{\sigma^{ni}_{D-1}}{R_m} \approx 0.331 \qquad R_a = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} \approx 0.833$$

$$\begin{cases} \sigma^{\lim}_D = \sigma_{D-1} - m^{ni} \cdot \sigma^{\lim}_m \\ \sigma^{\lim}_D = R_a \sigma^{\lim}_m \end{cases} \Rightarrow \qquad \sigma^{\lim}_D = \frac{\sigma_{D-1}}{\left(1 + \frac{m^{ni}}{R_a}\right)} \cong 66 \text{ MPa} \qquad \sigma^{\lim}_m = \frac{\sigma_{D-1}}{\left(R_a + m^{ni}\right)} \cong 79 \text{ MPa}$$

Verifica della tensione massima

$$\sigma^{\lim}_{\max} = \sigma^{\lim}_D + \sigma^{\lim}_m = 66 + 79 = 167 \text{ MPa} < R_{p0.2} (= 355 \text{ MPa}) \qquad \sigma^{\lim}_{\max} > \sigma_{ath} (= 30 \text{ MPa})$$

e quindi il coefficiente di sicurezza vale:

$$CS = \frac{\sigma^{\lim}_D}{\sigma_a} = \frac{66}{25} = 2.64$$

Si noti che con il metodo di Fuchs il coefficiente di sicurezza risulta inferiore a quello ottenuto con il metodo delle tensioni medie nominali. In particolare questa procedura porta ad un coefficiente di sicurezza inferiore a 3, che normalmente non è accettabile.

Esercizio 7-4

Ripetere l'esercizio 7-2 – caso b), utilizzando il metodo di Siebel e Stieler.

Soluzione

– Calcolo delle tensioni nominali:

$$\sigma_N \equiv \sigma_m = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{A}} = \frac{36000}{80 \cdot 15} = 30\ \mathrm{MPa}$$
$$\sigma_f^{\max} \equiv \sigma_a = \frac{6M_f}{b \cdot h^2} = \frac{6 \cdot 2000 \cdot 200}{15 \cdot 80^2} = 25\ \mathrm{MPa}$$

– Stima del limite di fatica del componente non intagliato a trazione e compressione

$$C_L \approx 0.7, \quad C_F \approx 0.88$$

$$C_F \sigma_{D-1}^{tc} = C_F \cdot C_S \cdot \sigma_{D-1}^{*} \cdot = 0.88 \cdot 0.7 \cdot 250 \cong 170\ \mathrm{MPa}$$

Comportamento a flessione

$$\frac{H}{h} = \frac{120}{80} = 1.5 \qquad \frac{r}{h} = \frac{10}{80} = 0.125 \qquad \Rightarrow \qquad K_\mathrm{t}(\text{flessione}) = 1.95$$

Gradiente relativo, coefficiente δ (da diagramma) e coefficiente d'intaglio β

$$\chi = \frac{2}{h} + \frac{2}{r} = \frac{2}{80} + \frac{2}{10} = 0.225 \qquad \delta \approx 1.07 \qquad \beta_f = \frac{K_\mathrm{t}}{\delta} = \frac{1.95}{1.07} \approx 1.82$$

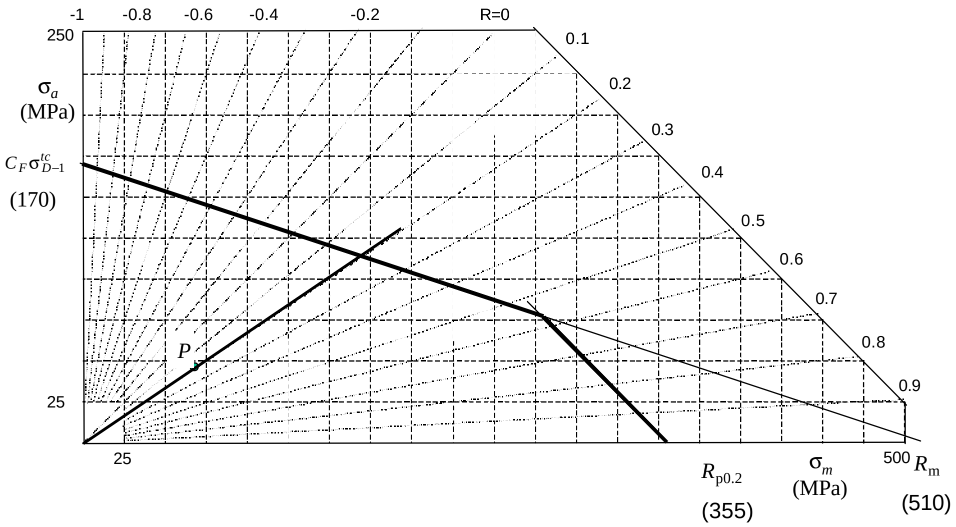
Comportamento a trazione compressione

$$\frac{H}{h} = \frac{120}{80} = 1.5 \qquad \frac{r}{h} = \frac{10}{80} = 0.125 \qquad \Rightarrow \qquad K_\mathrm{t}(\text{sforzo normale}) = 2.4$$

Gradiente relativo, coefficiente δ (da diagramma) e coefficiente d'intaglio β

$$\chi = \frac{2}{r} = \frac{2}{10} = 0.2 \qquad \delta \approx 1.06 \qquad \beta_{tc} = \frac{K_\mathrm{t}}{\delta} = \frac{2.4}{1.06} \approx 2.26$$

– Calcolo del coefficiente di sicurezza



Coordinate del punto P:

$$\beta_{tc}\sigma_\mathrm{m} \approx 68\ \ \mathrm{MPa} \qquad \beta_f \sigma_a \approx 45\ \mathrm{MPa}$$

Calcolo del coefficiente angolare (in modulo) della retta di Goodman e del rapporto di ampiezza:

$$m^{ss} = \frac{\sigma_{D-1}^{tc}}{R_\mathrm{m}} \approx 0.333 \qquad R_a = \frac{\beta_f \sigma_a}{\beta_{tc}\sigma_m} \approx 0.671$$

$$\begin{cases}\sigma_D^{\lim} = C_F\sigma_{D-1}^{tc} - m^{ss}\cdot\sigma_m^{\lim} \\ \sigma_D^{\lim} = R_a\sigma_m^{\lim}\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l}\sigma_D^{\lim} = \dfrac{C_F\sigma_{D-1}^{tc}}{\left(1+\dfrac{m^{ni}}{R_a}\right)} \cong 114\,\text{MPa} \\ \sigma_m^{\lim} = \dfrac{C_F\sigma_{D-1}^{tc}}{\left(R_a + m^{ni}\right)} \cong 169\,\text{MPa}\end{array}$$

Verifica della tensione massima

$$\sigma_{\max}^{\lim} = \sigma_D^{\lim} + \sigma_m^{\lim} = 114+169 = 283\,\text{MPa} < R_{p0.2}(= 355\,\text{MPa})$$

e quindi il coefficiente di sicurezza vale:

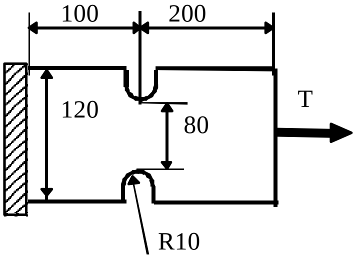
$$CS = \frac{\sigma_D^{\lim}}{\beta_f\sigma_a} = \frac{114}{1.82\cdot 25} = 2.50$$

Esercizio 7-5

Una piastra in S355 EN 10027/1 (Fe510 UNI 7070), con limite di fatica standard $\sigma_{D\text{-}1}$ = 250 MPa, delle dimensioni indicate in figura e spessore b= 20 mm viene caricata con un carico normale variabile T = 0÷64 kN

La piastra ha rugosità superficiale R_a = 1.6μm.

Calcolare il coefficiente di sicurezza, considerando che all'aumentare delle prestazioni richieste aumenti solo il valore massimo del carico applicato (si utilizzi il metodo delle tensioni medie nominali).



Soluzione

– Calcolo delle tensioni nominali:

$$\sigma_{\max} = \frac{T_{\max}}{A} = \frac{64000}{80\cdot 20} = 40\text{ MPa} \qquad \sigma_{\min} = 0$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = 20\text{ MPa} \qquad \sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = 20\text{ MPa}$$

$$NB: R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = 0$$

– Stima del limite di fatica del componente

$$C_L \approx 0.7, \quad C_F \approx 0.97$$

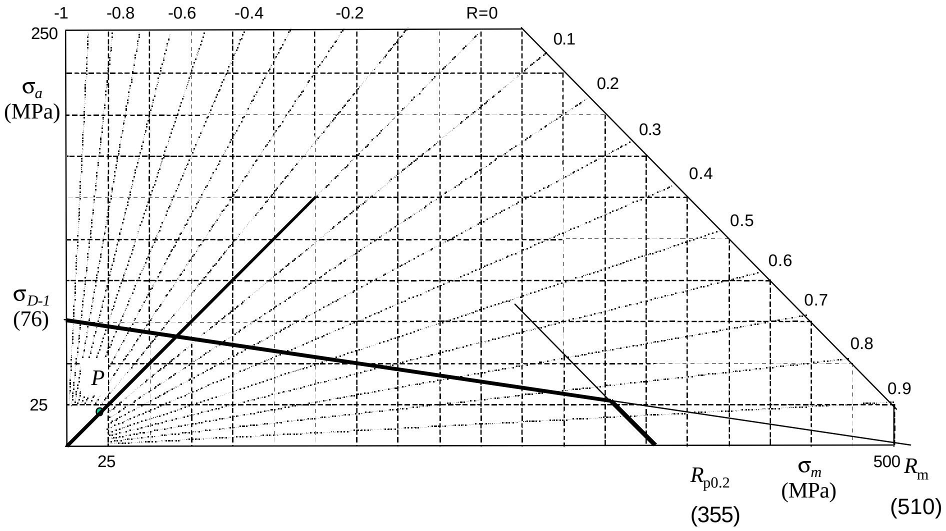
$$\frac{H}{h} = \frac{120}{80} = 1.5 \qquad \frac{r}{h} = \frac{10}{80} = 0.125 \quad\Rightarrow\quad K_t(\text{sforzo normale}) = 2.4$$

$$q = \frac{1}{1+ A\big/\sqrt{r}} = \frac{1}{1+\dfrac{0.45}{\sqrt{10}}} = 0.88$$

$$K_f = 1+q(K_t - 1) \approx 2.23$$

$$\sigma_{D-1} = \sigma_{D-1}^{*}\cdot\frac{\prod C_i}{K_f} = 250\frac{0.7\cdot 0.97}{2.23} \cong 76\text{ MPa}$$

– Calcolo del coefficiente di sicurezza



Calcolo del coefficiente angolare (in modulo) della retta di Goodman e del rapporto di ampiezza:

$$m = \frac{\sigma_{D-1}}{R_m} \approx 0.149 \qquad R_a = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = 1$$

$$\begin{cases} \sigma_D^{lim} = \sigma_{D-1} - m \cdot \sigma_m^{lim} \\ \sigma_D^{lim} = R_a \sigma_m^{lim} \end{cases} \Rightarrow \qquad \begin{aligned} \sigma_D^{lim} &= \frac{\sigma_{D-1}}{\left(1+\dfrac{m}{R_a}\right)} \cong 66\,\text{MPa} \\ \sigma_m^{lim} &= \frac{\sigma_D^{lim}}{R_a} \cong 66\,\text{MPa} \end{aligned}$$

Calcolo della tensione massima limite

$$\sigma_{max}^{lim} = \sigma_D^{lim} + \sigma_m^{lim} = 132\,\text{MPa} < R_{p02} (= 355\,\text{MPa})$$

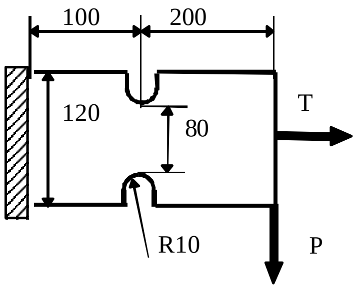
$$CS = \frac{\sigma_{max}^{lim}}{\sigma_{max}} = \frac{132}{40} = 3.30$$

Esercizio 7-6

Una piastra in S355 EN 10027/1 (Fe510 UNI 7070), con limite di fatica standard $\sigma_{D\text{-}1}$ = 250 MPa, delle dimensioni indicate in figura e spessore *b*= 15 mm viene caricata con un carico trasversale costante P = 2 kN e da un carico parallelo all'asse variabile T = 0÷36 kN

La piastra ha rugosità superficiale R_a = 1.6μm.

Calcolare il coefficiente di sicurezza considerando che all'aumentare delle prestazioni richieste aumenti solo il valore massimo di T (utilizzare il metodo delle tensioni medie nominali).



Soluzione

– Calcolo delle tensioni nominali:

Questo è un caso in cui, all'aumentare delle prestazioni richieste, aumenta solo la tensione massima. Questi casi possono essere risolti sia utilizzando il diagramma di master sia con il diagramma di Haigh. Questo caso corrisponde infatti ad avere una tensione media costante (dovuta al carico costante) ed una proporzionale (tensione media del carico variabile) e una pendenza della retta di funzionamento pari a 1.

$$\sigma_{T\max} = \frac{T}{A} = \frac{36000}{80 \cdot 15} = 30 \text{ MPa} \qquad \sigma_{T\min} = 0$$

$$\sigma_f = \frac{6M_f}{b \cdot h^2} = \frac{6 \cdot 2000 \cdot 200}{15 \cdot 80^2} = 25 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_{T\max} + \sigma_f = 30 + 25 = 55 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_{T\min} + \sigma_f = 0 + 25 = 25 \text{ MPa}$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = 15 \text{ MPa} \qquad \sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = 40 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{mc} = 25 \text{ MPa} \qquad \sigma_{mp} = 15 \text{ MPa}$$

– Stima del limite di fatica del componente

$$C_L \approx 0.7, \quad C_F \approx 0.97$$

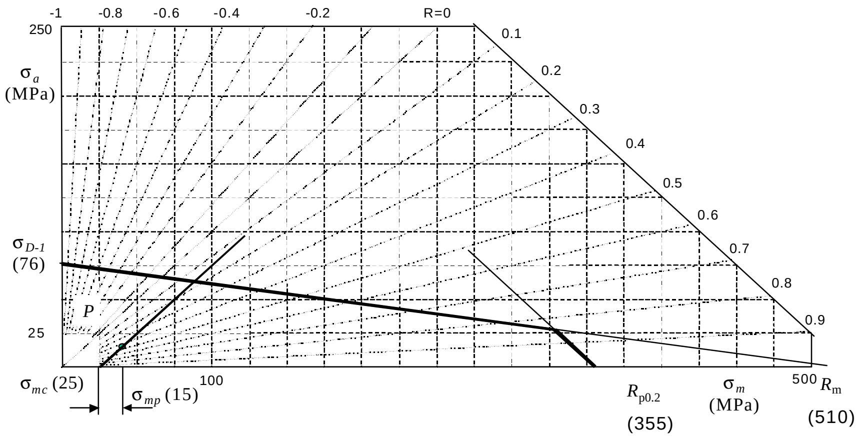
$$\frac{H}{h} = \frac{120}{80} = 1.5 \qquad \frac{r}{h} = \frac{10}{80} = 0.125 \quad \Rightarrow \quad K_t(\text{sforzo normale}) = 2.4$$

$$q = \frac{1}{1 + A/\sqrt{r}} = \frac{1}{1 + \frac{0.45}{\sqrt{10}}} = 0.88$$

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) \approx 2.23$$

$$\sigma_{D-1} = \sigma^*_{D-1} \cdot \frac{\prod C_i}{K_f} = 250 \frac{0.7 \cdot 0.97}{2.23} \cong 76 \text{ MPa}$$

– Calcolo del coefficiente di sicurezza



Calcolo del coefficiente angolare (in modulo) della retta di Goodman e del rapporto di ampiezza:

$$m = \frac{\sigma_{D-1}}{R_m} \approx 0.149 \qquad R_a = \frac{\sigma_a}{\sigma_{mp}} = 1$$

$$\begin{cases} \sigma_D^{\lim} = \sigma_{D-1} - m \cdot \sigma_m^{\lim} \\ \sigma_D^{\lim} = R_a(\sigma_m^{\lim} - \sigma_{mc}) \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \sigma_m^{\lim} &= \frac{\sigma_{D-1} + \sigma_{mc}}{(R_a + m)} \cong 88 \text{ MPa} \\ \sigma_D^{\lim} &= \sigma_{D-1} - m \cdot \sigma_m^{\lim} \cong 63 \text{ MPa} \end{aligned}$$

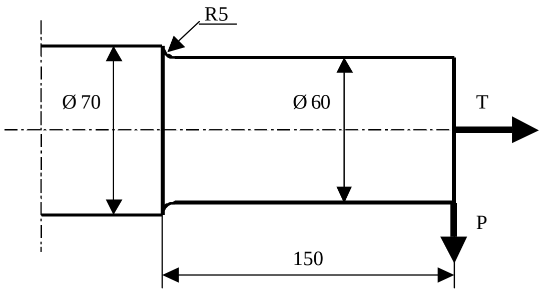
$$\sigma_{\max}^{\lim} = \sigma_D^{\lim} + \sigma_m^{\lim} = 63 + 88 = 151 \text{ MPa} < R_{p02} (= 355 \text{ MPa})$$

$$CS = \frac{\sigma_{\max}^{\lim}}{\sigma_{\max}} = \frac{151}{55} = 2.75$$

Il componente non risulta verificato in quanto il coefficiente di sicurezza è < 3.

Esercizio 7-7

Una barra costruita per tornitura (R_a =2 μm) con acciaio UNI 7845 C40 Bonificato (R_m = 700 MPa, R_e = 490 MPa, σ_{D-1}= 350 MPa) nella sua parte terminale è soggetta ad un carico trasversale P variabile fra – 25 kN e 25 kN e ad un carico normale T= 140 kN.
Volendo una durata di 0.5 milioni di cicli calcolare il coefficiente di sicurezza in termini di durata e di tensione. Utilizzare diagrammi SN doppio logaritmici



Soluzione

– Calcolo delle tensioni nominali:

$$\sigma_N \equiv \sigma_m = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{A}} = \frac{140000 \cdot 4}{\pi d^2} \approx 50\,\mathrm{MPa}$$
$$\sigma_f \equiv \sigma_a = \frac{32 M_f}{\pi \cdot d^3} = \frac{32 \cdot 25000 \cdot 150}{\pi \cdot 60^3} \approx 177\,\mathrm{MPa}$$

– Stima del limite di fatica del componente

$$C_S \approx 0.8, \quad C_F \approx 0.96$$

$$\frac{D}{d} = \frac{70}{60} = 1.17 \qquad \frac{r}{d} = \frac{5}{60} = 0.083 \qquad \Rightarrow \qquad K_\mathrm{t}(\text{flessione}) = 1.7$$

$$q = \frac{1}{1 + A/\sqrt{r}} = \frac{1}{1 + \frac{0.35}{\sqrt{5}}} = 0.86$$

$$K_f = 1 + q(K_\mathrm{t} - 1) \approx 1.60$$

$$\sigma_{D-1} = \sigma^*_{D-1} \cdot \frac{\prod C_i}{K_f} = 350 \frac{0.8 \cdot 0.96}{1.6} \cong 168\ \mathrm{MPa}$$

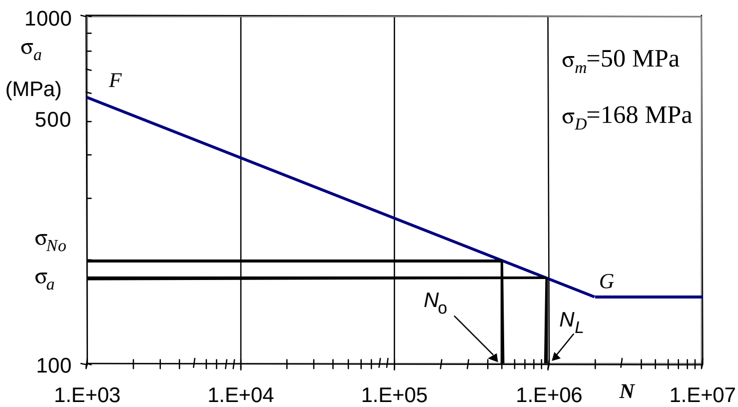
– Calcolo del limite di fatica in corrispondenza della tensione media data:

$$m = \frac{\sigma_{D-1}}{R_\mathrm{m}} = \frac{168}{700} = 0.24 \qquad \sigma_D = \sigma_{D-1} - m \cdot \sigma_m \cong 156\ \mathrm{MPa}$$

Il limite di fatica risulta inferiore alla sollecitazione applicata (177 MPa).

– Calcolo del coefficiente di sicurezza

$N_G = 2\cdot10^6$ σ_D = 156 MPa N_F= 1000 $\sigma_F = 0.9\cdot(R_m - \sigma_m)$ = 585 MPa $N_\mathrm{o} = 5\cdot10^5$



– Coefficiente di sicurezza in termini di tensioni:
Si utilizza la formula:

$$\sigma_{No} = A N_\mathrm{o}^b \qquad \text{ovvero} \qquad \log(\sigma_{No}) = \log(A) + b\log(N_\mathrm{o})$$

dove

$$b = \frac{\log(\sigma_D) - \log(\sigma_F)}{\log(N_G) - \log(N_F)} = -0.174$$
$$\log(A) = \log(\sigma_D) - \frac{\log(\sigma_D) - \log(\sigma_F)}{\log(N_G) - \log(N_F)} \log(N_G) = 3.29$$

da cui σ_{No} = 199 MPa

Il coefficiente di sicurezza in termini di tensione è quindi:

$$CS_\sigma = \frac{\sigma_{No}}{\sigma_a} = \frac{199}{177} = 1.12$$

– Coefficiente di sicurezza in termini di durata:

Si utilizza la formula:

$$N_L \sigma_a^k = B \qquad \text{ovvero} \qquad \log(N_L) = \log(B) - k \log(\sigma_a)$$

dove

$$k = \frac{\log(N_G) - \log(N_F)}{\log(\sigma_F) - \log(\sigma_D)} = -\frac{1}{b} = 5.75$$
$$\log(B) = \log(N_G) + \frac{\log(N_G) - \log(N_F)}{\log(\sigma_F) - \log(\sigma_D)} \log(\sigma_D) = 18.91$$

da cui N_L = 967424 cicli

Il coefficiente di sicurezza in termini di durata è quindi:

$$CS_N = \frac{N_L}{N_o} = \frac{967424}{500000} = 1.93$$

E’ facile verificare che:

$$CS_N = CS_\sigma^k$$

CAPITOLO 8

Esercizio 8-1

Un cilindro idraulico di dimetro interno Ø 150 mm e spessore del mantello 13 mm (rugosità R_a = 0.4 μm), costruito in acciaio UNI EN 10083 2 C 30, è soggetto ad una pressione interna pulsante fra 0 e 180 bar. In conseguenza di tale pressione le sollecitazioni nelle tre direzioni principali nel punto più sollecitato (raggio interno) risultano:
Tensione circonferenziale $\sigma_c = \sigma_1 = 0 \div 114$ MPa; Tensione assiale $\sigma_z = \sigma_2 = 0 \div 48$ MPa;
Tensione radiale $\sigma_r = \sigma_3 = 0 \div -18$ MPa.
Le caratteristiche meccaniche del materiale sono le seguenti: R_m = 550 MPa; $R_{p0.2}$ = 370 MPa; σ_{D-1} = 220 MPa.
Calcolare il coefficiente di sicurezza del mantello del cilindro.

Soluzione
Calcolo delle tensioni alternate e medie nelle tre direzioni principali:

$$\sigma_{mi} = \frac{\sigma_{\max i} + \sigma_{\min i}}{2} \qquad \sigma_{ai} = \frac{\sigma_{\max i} - \sigma_{\min i}}{2}$$

da cui

$$\sigma_{m1} = 57 \text{ MPa} \qquad \sigma_{m2} = 24 \text{ MPa} \qquad \sigma_{m3} = -9 \text{ MPa}$$
$$\sigma_{a1} = 57 \text{ MPa} \qquad \sigma_{a2} = 24 \text{ MPa} \qquad \sigma_{a3} = 9 \text{ MPa}$$

Le tensioni alternata equivalente e la tensione media equivalente, secondo la teoria di Sines, risultano:

$$\sigma_{a,eq} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{a1}-\sigma_{a2})^2 + (\sigma_{a1}-\sigma_{a3})^2 + (\sigma_{a2}-\sigma_{a3})^2} = 42 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{m,eq} = (\sigma_{m1} + \sigma_{m2} + \sigma_{m3}) = 72 \text{ MPa}$$

Con questi valori è possibile effettuare la verifica con i metodi già visti. Si noti che all'aumentare delle prestazioni, cioè della pressione interna al cilindro, le tensioni alternata e media (equivalenti) crescono proporzionalmente.
Si noti che ad un rapporto fra i carichi R = 0 (R_a = 1) non corrispondono analoghi rapporti in termini di tensioni equivalenti.
Essendo:

$$m = \frac{\sigma_{D-1}}{R_m} = 0.4 \qquad R_a = \frac{\sigma_{aeq}}{\sigma_{meq}} \approx 0.59$$

$$\begin{cases} \sigma_D^{\lim} = \sigma_{D-1} - m \cdot \sigma_m^{\lim} \\ \sigma_D^{\lim} = R_a \sigma_m^{\lim} \end{cases} \Rightarrow \qquad \begin{aligned} \sigma_D^{\lim} &= \frac{\sigma_{D-1}}{\left(1+\dfrac{m}{R_a}\right)} \cong 131 \text{ MPa} \\ \sigma_m^{\lim} &= \frac{\sigma_{D-1}}{(R_a + m)} \cong 222 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Verifica della tensione massima limite

$$\sigma_{\max}^{\lim} = \sigma_D^{\lim} + \sigma_m^{\lim} = 131 + 222 = 353 \text{ MPa} < R_{p0.2} (= 370 \text{ MPa})$$

e quindi il coefficiente di sicurezza vale:

$$CS = \frac{\sigma_D^{\lim}}{\sigma_{aeq}} = \frac{131}{42} = 3.10$$

Allo stesso risultato si perviene dividendo i due membri dell'equazione di Sines:

$$CS = \frac{\sigma_{D-1}}{\sigma_{a,eq} + m \cdot \sigma_{m,eq}} = \frac{220}{71} = 3.10$$

Esercizio 8-2

Si ripeta l'esercizio 8-1 considerando una pressione pulsante fra 60 e 180 bar.

Soluzione
Calcolo delle tensioni alternate e medie nelle tre direzioni principali:

$$\sigma_{mi} = \frac{\sigma_{\max i} + \sigma_{\min i}}{2} \qquad \sigma_{ai} = \frac{\sigma_{\max i} - \sigma_{\min i}}{2}$$

da cui

$$\sigma_{m1} = 76 \text{ MPa} \qquad \sigma_{m2} = 32 \text{ MPa} \qquad \sigma_{m3} = -12 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{a1} = 38 \text{ MPa} \qquad \sigma_{a2} = 16 \text{ MPa} \qquad \sigma_{a3} = 6 \text{ MPa}$$

Le tensioni alternata equivalente e la tensione media equivalente, secondo la teoria di Sines, risultano:

$$\sigma_{a,eq} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{a1}-\sigma_{a2})^2 + (\sigma_{a1}-\sigma_{a3})^2 + (\sigma_{a2}-\sigma_{a3})^2} = 28 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{m,eq} = (\sigma_{m1} + \sigma_{m2} + \sigma_{m3}) = 96 \text{ MPa}$$

Essendo:

$$m = \frac{\sigma_{D-1}}{R_\mathrm{m}} = 0.4 \qquad R_a = \frac{\sigma_{aeq}}{\sigma_{meq}} \approx 0.3$$

$$\begin{cases} \sigma_D^{\lim} = \sigma_{D-1} - m \cdot \sigma_m^{\lim} \\ \sigma_D^{\lim} = R_a \sigma_m^{\lim} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \sigma_D^{\lim} &= \frac{\sigma_{D-1}}{\left(1+\dfrac{m}{R_a}\right)} \cong 93\,\text{MPa} \\ \sigma_m^{\lim} &= \frac{\sigma_{D-1}}{(R_a + m)} \cong 316\,\text{MPa} \end{aligned}$$

Verifica della tensione massima limite

$$\sigma_{\max}^{\lim} = \sigma_D^{\lim} + \sigma_m^{\lim} = 94 + 316 = 416\,\text{MPa} > R_{\mathrm{p}0.2} (= 370 \text{ MPa})$$

Essendo la tensione massima limite superiore a quella di snervamento la condizione limite viene trovata (convenzionalmente) considerando la retta limita la tensione massima al valore di snervamento dl materiale.

$$\begin{cases} \sigma_D^{\lim} = R_{\mathrm{p}0.2} - \sigma_m^{\lim} \\ \sigma_D^{\lim} = R_a \sigma_m^{\lim} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \sigma_D^{\lim} &= R_a \frac{R_{\mathrm{p}.02}}{(1+R_a)} \cong 84\,\text{MPa} \\ \sigma_m^{\lim} &= \frac{R_{\mathrm{p}.02}}{(1+R_a)} \cong 286\,\text{MPa} \end{aligned}$$

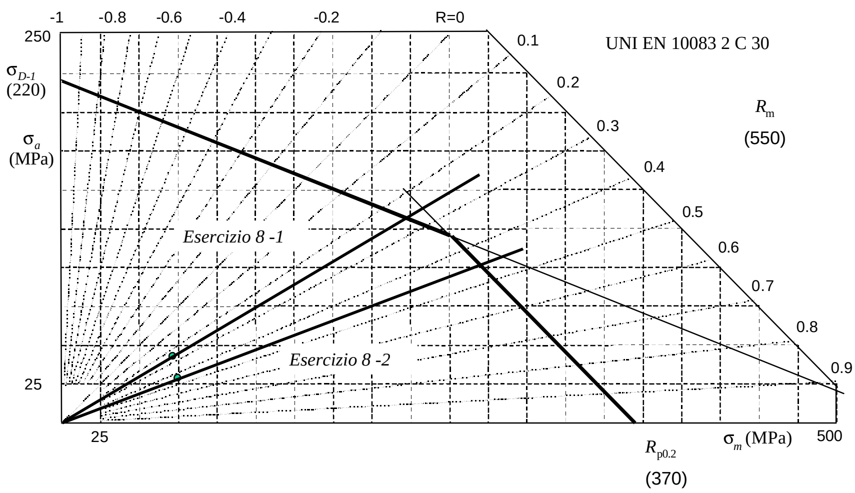
Il coefficiente di sicurezza risulta quindi:

$$CS = \frac{\sigma_D^{\lim}}{\sigma_{aeq}} = \frac{84}{28} = 3$$

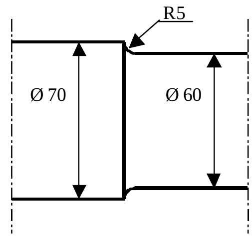
Dividendo invece i due membri dell'equazione di Sines si ottiene:

$$CS = \frac{\sigma_{D-1}}{\sigma_{a,eq} + m \cdot \sigma_{m,eq}} = \frac{220}{66} = 3.31$$

risultato non corretto in quanto non si tiene conto della condizione limite convenzionale dovuta allo snervamento.



Esercizio 8-3



Una barra di torsione presenta l'intaglio illustrato in figura.
La sezione dell'intaglio è soggetta a una tensione di flessione σ variabile fra – 8 e 8 MPa e ad una tensione tangenziale τ dovuta alla torsione variabile fra -32 e 32 MPa che agiscono in fase.
Sapendo che la barra è costruita in acciaio UNI 7845 C40 Bonificato (R_m = 700 MPa, R_e = 490 MPa, σ_{D-1}= 350 MPa) con rugosità R_a =2 µm, calcolare il coefficiente di sicurezza.

Soluzione

– Stima del limite di fatica del componente

$$C_S \approx 0.8, \quad C_F \approx 0.96$$

$$\frac{D}{d} = \frac{70}{60} = 1.17 \qquad \frac{r}{d} = \frac{5}{60} = 0.083 \qquad \Rightarrow \qquad K_t(\text{flessione}) = 1.7$$

$$q = \frac{1}{1 + A/\sqrt{r}} = \frac{1}{1 + \frac{0.35}{\sqrt{5}}} = 0.86$$

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) \approx 1.60$$

$$\sigma_{D-1} = \sigma^*_{D-1} \cdot \frac{\prod C_i}{K_f} = 350\frac{0.8 \cdot 0.96}{1.6} \cong 168 \text{ MPa}$$

Si considera il fattore di riduzione della resistenza a fatica calcolato con il coefficiente di concentrazione delle tensioni per la flessione perché più elevato di quello corrispondente a torsione, agendo così dalla parte della sicurezza.

– Calcolo della tensione alternata equivalente:

$$\sigma_{a,eq} = \sqrt{\sigma_a^2 + 3 \cdot \tau_a^2} = 56 \text{ MPa}$$

– Calcolo del coefficiente di sicurezza:

$$CS = \frac{\sigma_{D-1}}{\sigma_{a,eq}} = \frac{168}{56} = 3$$

Esercizio 8-4

Ripetere l'esercizio 8-3 considerandole seguenti sollecitazioni: σ = 0÷16 MPa, τ = 0÷64 MPa supponendo che all'aumentare delle sollecitazioni aumenti solo il valore massimo delle tensioni applicate.

Soluzione

– Stima del limite di fatica del componente

$$C_S \approx 0.8, \quad C_F \approx 0.95$$

$$\frac{D}{d} = \frac{70}{60} = 1.17 \qquad \frac{r}{d} = \frac{5}{60} = 0.083 \qquad \Rightarrow \qquad K_t(\text{flessione}) = 1.7$$

$$q = \frac{1}{1 + A/\sqrt{r}} = \frac{1}{1 + \frac{0.35}{\sqrt{5}}} = 0.86$$

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) \approx 1.60$$

$$\sigma_{D-1} = \sigma^*_{D-1} \cdot \frac{\prod C_i}{K_f} = 350\frac{0.8 \cdot 0.96}{1.6} \cong 168 \text{ MPa}$$

Si considera il fattore di riduzione della resistenza a fatica calcolato con il coefficiente di concentrazione delle tensioni per la flessione perché più elevato di quello corrispondente a torsione, agendo così dalla parte della sicurezza.

– Calcolo delle componenti medie e alternate delle tensioni

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \qquad \sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

$$\sigma_m = 8 \text{ MPa} \qquad \sigma_a = 8 \text{ MPa} \qquad \tau_m = 32 \text{ MPa} \qquad \tau_a = 32 \text{ MPa}$$

– Calcolo delle tensione alternata equivalenti:

$$\sigma_{aeq} = \sqrt{\sigma_a^2 + 3 \cdot \tau_a^2} = 56 \text{ MPa}$$
$$\sigma_{meq} = \sigma_m = 8 \text{ MPa}$$

Si noti che nel calcolo della tensione media equivalente non si tiene conto della tensione tangenziale media e che ai un rapporti fra i carichi $R = 0$ ed $R_a = 1$ non corrispondono analoghi rapporti in termini di tensioni equivalenti.

– Calcolo delle tensioni limite

$$m = \frac{\sigma_{D-1}}{R_m} = 0.24 \qquad R_a = \frac{\sigma_{aeq}}{\sigma_{meq}} = 7$$

$$\begin{cases} \sigma_D^{lim} = \sigma_{D-1} - m \cdot \sigma_m^{lim} \\ \sigma_D^{lim} = R_a \sigma_m^{lim} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \sigma_D^{lim} &= \frac{\sigma_{D-1}}{\left(1 + \frac{m}{R_a}\right)} \cong 162 \text{ MPa} \\ \sigma_m^{lim} &= \frac{\sigma_{D-1}}{(R_a + m)} \cong 23 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Verifica della tensione massima limite

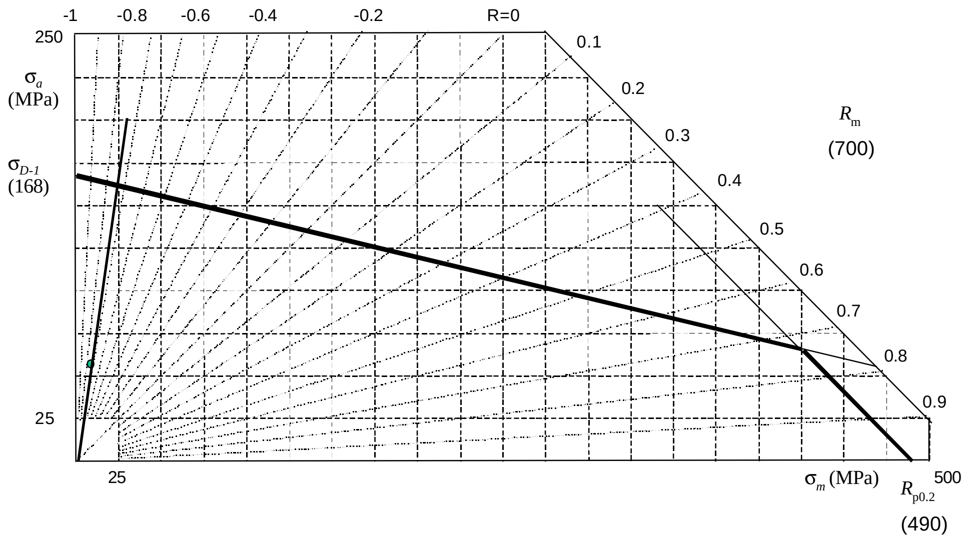
$$\sigma_{max}^{lim} = \sigma_D^{lim} + \sigma_m^{lim} = 23 + 162 = 185 \text{ MPa} < R_{p0.2} (= 490 \text{ MPa})$$

– Calcolo del coefficiente di sicurezza:

$$CS = \frac{\sigma_D^{lim}}{\sigma_{a,eq}} = \frac{162}{56} = 2.89$$

Allo stesso risultato si perviene dividendo i due membri dell'equazione di Sines:

$$CS = \frac{\sigma_{D-1}}{\sigma_{a,eq} + m \cdot \sigma_{m,eq}} = \frac{168}{58} = 2.89$$



Esercizio 8-5

Ripetere l'esercizio 8-4 considerandole seguenti sollecitazioni utilizzando la teoria di Siebel e Stieler

Soluzione

– Stima del limite di fatica a trazione compressione del componente

$$C_S = 0.7, \quad C_F \approx 0.95$$

$$\sigma_{D-1}^{tc} = \sigma_{D-1}^{*} \cdot \frac{\prod C_i}{K_f} = 350 \cdot 0.7 \cdot 0.95 \cong 232 \text{ MPa}$$

Fattori di concentrazione delle tensioni

$$\frac{D}{d} = \frac{70}{60} = 1.17 \qquad \frac{r}{d} = \frac{5}{60} = 0.083 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} K_{\mathrm{t}}(\text{flessione}) = 1.7 \\ K_{\mathrm{t}}(\text{torsione}) = 1.35 \end{array}$$

Gradienti relativi e coefficienti di intaglio

$$\textit{Flessione} \qquad \chi = \frac{4}{D+d} + \frac{2}{r} = 0.43 \qquad \delta_f = 1.08 \qquad \beta_f = \frac{K_t(\text{flessione})}{\delta_f} = 1.57$$

$$\textit{Torsione} \qquad \chi = \frac{4}{D+d} + \frac{1}{r} = 0.23 \qquad \delta_f = 1.05 \qquad \beta_t = \frac{K_t(\text{torsione})}{\delta_t} = 1.28$$

– Tensioni equivalenti

$$\sigma_{aeq} = \sqrt{(\beta_f \cdot \sigma_a)^2 + 3 \cdot (\beta_f \cdot \tau_a)^2} \cong 72 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{meq} = \beta_f \sigma_m \cong 13 \text{ MPa}$$

– Calcolo delle tensioni limite

$$m = \frac{\sigma_{D-1}^{tc}}{R_{\mathrm{m}}} = 0.33 \qquad R_a = \frac{\sigma_{aeq}}{\sigma_{meq}} \cong 5.54$$

$$\begin{cases} \sigma_D^{\lim} = \sigma_{D-1}^{tc} - m \cdot \sigma_m^{\lim} \\ \sigma_D^{\lim} = R_a \sigma_m^{\lim} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} \sigma_D^{\lim} = \dfrac{\sigma_{D-1}^{tc}}{\left(1 + \dfrac{m}{R_a}\right)} \cong 219 \text{ MPa} \\ \sigma_m^{\lim} = \dfrac{\sigma_{D-1}^{tc}}{(R_a + m)} \cong 40 \text{ MPa} \end{array}$$

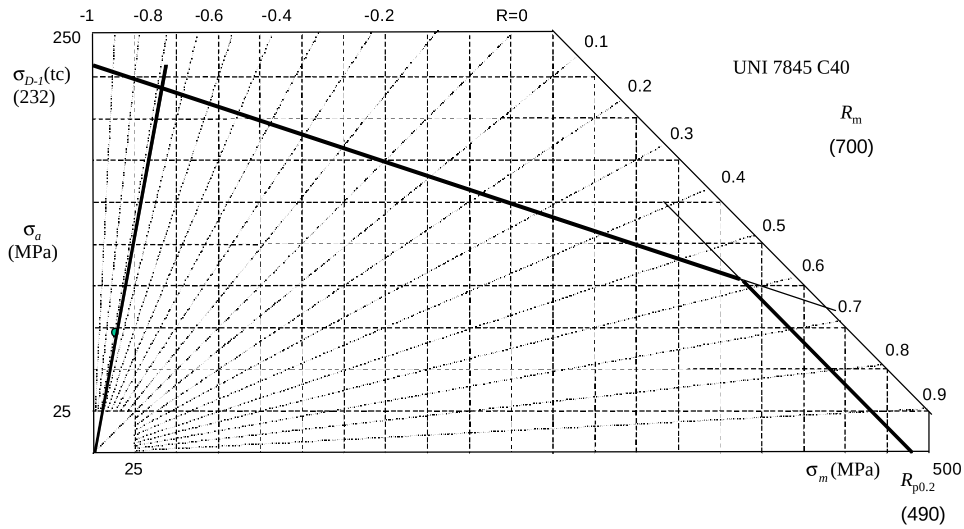
Verifica della tensione massima limite

$$\sigma_{\max}^{\lim} = \sigma_D^{\lim} + \sigma_m^{\lim} = 219 + 40 = 259 \text{ MPa} < R_{\mathrm{p}0.2} (= 490 \text{ MPa})$$

– Calcolo del coefficiente di sicurezza

$$CS = \frac{\sigma_D^{\lim}}{\sigma_{a,eq}} = \frac{232}{72} = 3.22$$

Si deve notare che in questo specifico caso il coefficiente di sicurezza calcolato con la teoria di Siebel e Stieler è meno conservativo rispetto a quello calcolato nelle stesse condizioni con la formula di Sines.



CAPITOLO 9

Esercizio 9-1

Un componente costruito in acciaio 42CrMo4 bonificato (R_m = 1030 MPa, $R_{p0.2}$ = 835 MPa) ha un limite di fatica stimato σ_{D-1} = 200 MPa ($2 \cdot 10^6$ cicli) ed è soggetto allo spettro di carico riportato in tabella:

n_i		σ_m (MPa)	
		100	200
σ_a (MPa)	200	10640	6160
	250	7560	5500
	300	4200	4400
	350	2800	2640
	400	1400	1760
	450	1120	1100
	500	280	440
	totale	28000	22000

Supponendo di utilizzare diagrammi *SN* semilogaritmici stimare il numero di volte che può essere ripetuto lo spettro di carico prima di arrivare a rottura.

Soluzione

Il danneggiamento dovuto allo spettro di carico indicato nella tabella viene calcolato con l'ipotesi di Miner:

$$D = \sum D_i = \sum \frac{n_i}{N_i}$$

dove n_i sono i cicli effettuati nelle varie condizioni e N_i sono i cicli che porterebbero a rottura in condizioni di ampiezza costante, ricavabili dagli opportuni diagrammi *SN*.

Stima dei diagrammi SN

Il primo passo da compiere è la determinazione dei limiti di fatica alle tensioni medie considerate. Per questo scopo si utilizza l'equazione di Goodman:

$$\sigma_D = \sigma_{D-1} - \frac{\sigma_{D-1}}{R_m} \cdot \sigma_m$$

Si deve inoltre calcolare il secondo punto del diagramma SN con la formula $\sigma_F = 0.9(R_m - \sigma_m)$, in corrispondenza di 10^3 cilcli); per le tensioni medie considerate si ha quindi:

σ_m (MPa)	100	200
σ_F (MPa) - $N_F = 10^3$	837	747
σ_D (MPa) - $N_G = 2 \cdot 10^6$	181	161

E' facile verificare che in tutti i casi la somma della tensione media e del limite di fatica non supera il limite di snervamento del materiale.

Calcolo dei cicli che porterebbero a rottura il componente in condizioni di ampiezza costante.

Per ogni situazione prevista si utilizza la formula, valida per diagrammi semilogaritmici:

$$\log N_i = \log N_F + \frac{\sigma_F - \sigma_a}{\sigma_F - \sigma_D}(\log N_G - \log N_F)$$

ottenendo i seguenti risultati:

N_i		σ_m (MPa)	
		100	200
σ_a (MPa)	200	1.597E+06	1.208E+06
	250	8.952E+05	6.316E+05
	300	5.018E+05	3.302E+05
	350	2.812E+05	1.726E+05
	400	1.576E+05	9.021E+04
	450	8.834E+04	4.715E+04
	500	4.951E+04	2.465E+04
	totale	28000	22000

Calcolo del danneggiamento
Applicando la regola di Miner si ottengono i seguenti risultati parziali:

D_i		σ_m (MPa)	
		100	200
σ_a (MPa)	200	6.66E-03	5.10E-03
	250	8.44E-03	8.71E-03
	300	8.37E-03	1.33E-02
	350	9.96E-03	1.53E-02
	400	8.88E-03	1.95E-02
	450	1.27E-02	2.33E-02
	500	5.66E-03	1.79E-02
	totale	28000	22000

Che sommati forniscono il danneggiamento complessivo D = 0.1638

Il numero di volte che può essere ripetuto lo spettro indicato non è altro che l'inverso del danno, coincide quindi con il coefficiente di sicurezza:

$$CS = \frac{1}{D} = 6.11$$

Esercizio 9-2

Un componente provato a fatica mostra un esponente della curva *SN* (scale doppio logaritmiche) k = 5 ed un limite di fatica di σ_D= 210 MPa ($2 \cdot 10^6$ cicli). Il componente è soggetto all uno spettro di carico indicato in tabella, con tensione media uguale quella adottata nelle prove ad ampiezza costante. Stimare il numero di volte che può essere ripetuto lo spettro di carico prima di arrivare a rottura.

σ_a (MPa)	n_i
150	38000
200	27000
250	15000
300	10000
350	5000
400	4000
450	1000
totale	100000

Soluzione
Anche i questo caso si utilizza la regola di Miner.
Essendo presenti carichi alterni al di sotto del limite di fatica si utilizza il metodo di Haibach:
per le ampiezze di sollecitazione al di sopra del limite di fatica si utilizza la formula:

$$N_i \sigma_a^k = B \quad \text{con} \quad k = 5$$

mentre per le ampiezze al di sotto del limite di fatica si utilizza la formula:

$$N_i \sigma_a^{k'} = B' \quad \text{con} \quad k' = 2k - 1 = 9$$

Le costanti B e B' si determinano facilmente conoscendo tensione e durata in corrispondenza del limite di fatica:

$$B = N_G \sigma_D^k = 2 \cdot 10^6 \cdot 210^5 = 8.17 \cdot 10^{17}$$
$$B' = N_G \sigma_D^{k'} = 2 \cdot 10^6 \cdot 210^9 = 1.59 \cdot 10^{27}$$

Si possono quindi calcolare facilmente i numeri di cicli che porterebbero a rottura il componente sollecitato ad ampiezza costante:

Si possono quindi calcolare facilmente i numeri di cicli che porterebbero a rottura il componente sollecitato ad ampiezza costante:

σ_a (MPa)	N_i	
150	4.132E+07	*B' – k'*
200	3.103E+06	*B' – k'*
250	8.364E+05	*B – k*
300	3.361E+05	*B – k*
350	1.555E+05	*B – k*
400	7.977E+04	*B – k*
450	4.427E+04	*B – k*

Analogamente a quanto fatto nell'esercizio precedente si possono calcolare i danni parziali e il danno complessivo:

σ_a (MPa)	D_i
150	9.20E-04
200	8.70E-03
250	1.79E-02
300	2.97E-02
350	3.22E-02
400	5.01E-02
450	2.26E-02
Totale=D	0.1622

Il numero di volte che può essere ripetuto lo spettro indicato non è altro che l'inverso del danno, coincide quindi con il coefficiente di sicurezza:

$$CS = \frac{1}{D} = 6.17$$

Esercizio 9-3

Un componente (σ_D= 300 MPa, esponente della curva *SN* k = 3 con $s_a^k \cdot N = B$) è sottoposto a: σ_{a1} = 530 MPa per il 10% della vita, σ_{a2} = 450 MPa per il 25% della vita, σ_{a3} = 320 MPa per il 50% della vita, σ_{a4} = 270 MPa per il 15% della vita. Calcolare il numero totale di cicli prima della rottura.

Soluzione

I cicli <u>non sono</u> tutti efficaci ai fini della rottura infatti $\sigma_{a4} < \sigma_{D\text{-}1}$. I cicli corrispondenti a σ_{a4} non sono conteggiati e le percentuali α_i corrispondenti agli altri cicli vengono aggiornate.

$$\alpha_{tot} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0{,}1 + 0{,}25 + 0{,}5 = 0{,}85$$

$$\alpha'_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_{tot}} = \frac{0{,}1}{0{,}85} = 0{,}12 \qquad \sigma_{a1} = 530 \text{ MPa}$$

$$\alpha'_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_{tot}} = \frac{0{,}25}{0{,}85} = 0{,}29 \qquad \sigma_{a2} = 450 \text{ MPa}$$

$$\alpha'_3 = \frac{\alpha_3}{\alpha_{tot}} = \frac{0{,}5}{0{,}85} = 0{,}59 \qquad \sigma_{a3} = 320 \text{ MPa}$$

K è noto, si ricava la costante B:$\rightarrow \sigma_D^k \cdot 2 \cdot 10^6 = B$

$$B = 300^3 \cdot 2 \cdot 10^6 = 5{,}4 \cdot 10^{13}$$

Si può calcolare la tensione alternata equivalente con la formula:

$$s_{a,eq} = \sqrt[k]{\sum a'_i \, s_{ai}^k}$$

e ricordando l'equazione della curva *SN* si ottiene il numero di cicli voluto:

$$N = \frac{B}{(\sigma_{a,eq})^k} = \frac{B}{\sum \alpha'_i \cdot \sigma_{a,i}} = \frac{5.4 \cdot 10^{13}}{0.12 \cdot 530^3 + 0.29 \cdot 450^3 + 0.59 \cdot 320^3} = 8.49 \cdot 10^5 \text{ cicli}$$