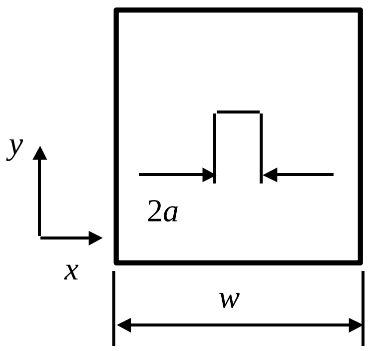
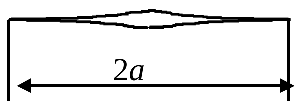
Meccanica della Frattura Lineare Elastica (cenni)

piastra con difetto passante



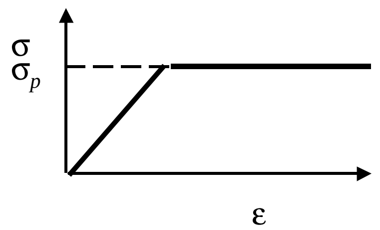


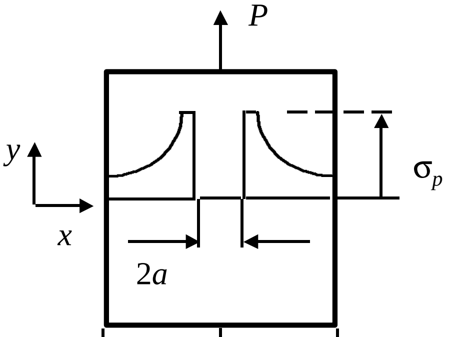
raggio di fondo intaglio

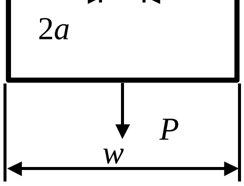
$\rho \to 0$

$K_t \to \infty$

materiale elastico -perfettamente plastico







A collasso plastico

$P_{cr} \equiv P_{sn} = \sigma_p B(w - 2a)$

B rottura fragile

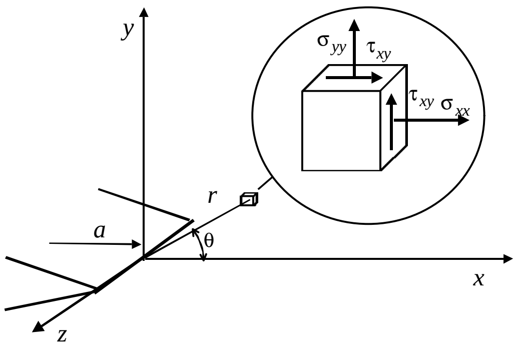
$P'' \equiv P_{cr} < P_{sn}$

Legato a tensioni di trazione

Stato di tensione all'apice della cricca

Impostazione di Irwin (1957), basata sulle equazioni proposte da Westergaard (1939)

materiale perfettamente elastico, omogeneo ed isotropo



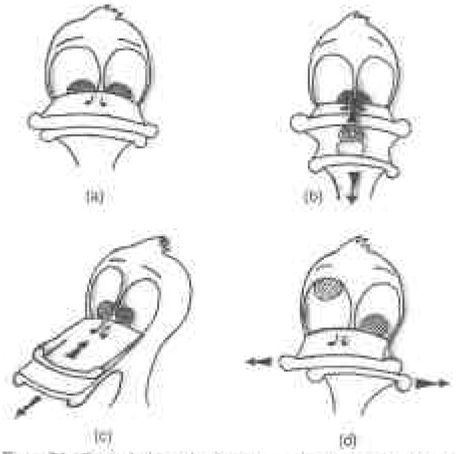
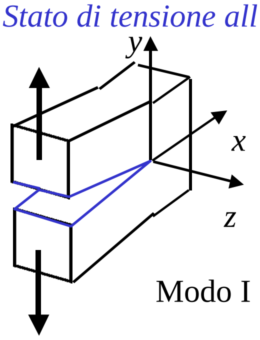
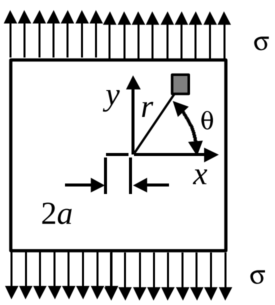


Figure 7.1 "Goofy duck" analog for three modes of crack loading. (a) Crack/beak closed. (b) Opening mode. (c) Sliding mode. (d) Tearing mode. (Courtesy of M. H. Meyers)

Modi di apertura della cricca

Stato di tensione all'apice della cricca (I)





$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1 - sen\left(\frac{\theta}{2}\right) sen\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] + o[r]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1 + sen\left(\frac{\theta}{2}\right) sen\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] + o[r]$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) sen\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + o[r]$$

$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ tensione piana

$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ def. piana

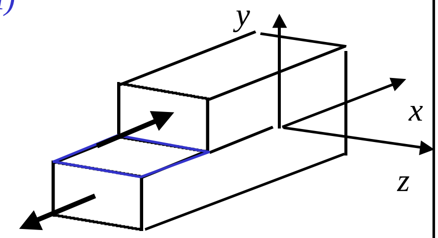
$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{I}(\theta)$$

$$K_I = Y\sigma\sqrt{a}$$

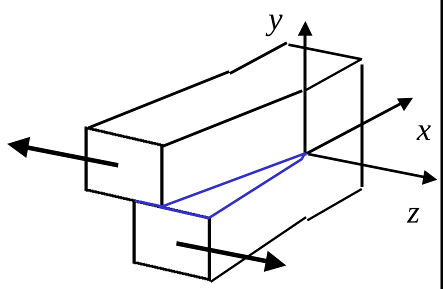
K_I = fattore di intensità delle tensioni

Stato di tensione all'apice della cricca (II III)

Modo II $\sigma_{ij} = \dfrac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta)$

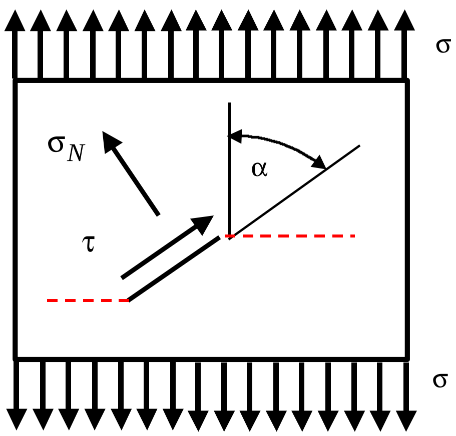


Modo III $\sigma_{ij} = \dfrac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{III}(\theta)$



Cenni di meccanica della frattura lineare elastica 5

il modo I è il più studiato perché........



$\sigma_N = \sigma\,\mathrm{sen}^2(\alpha)$

$\tau = \sigma\,\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$

Cenni di meccanica della frattura lineare elastica 6

Modo I: andamenti per $\theta = 0$

$$\sigma_{xx} = \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1 - sen\left(\frac{\theta}{2}\right) sen\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] + o[r] = \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}} + o[r]$$

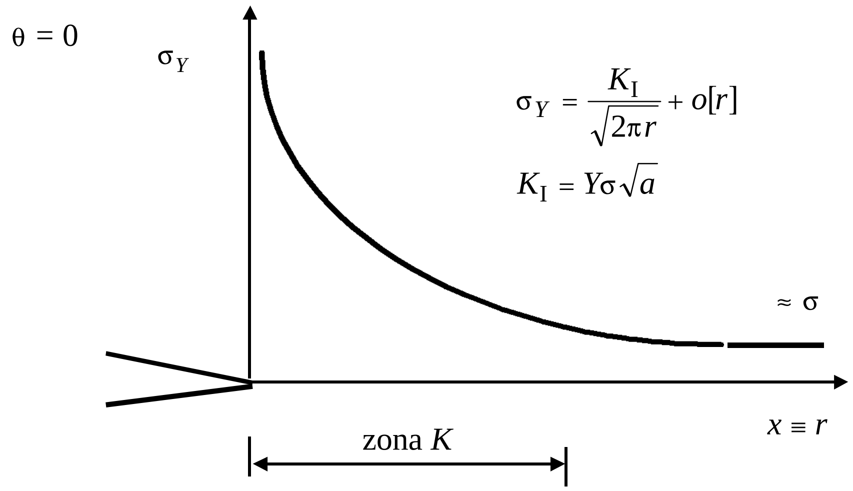
$$\sigma_{yy} = \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1 + sen\left(\frac{\theta}{2}\right) sen\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] + o[r] = \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}} + o[r]$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) sen\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) = 0$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_X \qquad \sigma_{yy} = \sigma_Y$$

$$r \to 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_X \to \infty \quad \sigma_Y \to \infty$$

Cenni di meccanica della frattura lineare elastica 7



$$\sigma_Y = \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}} + o[r]$$

$$K_{\mathrm{I}} = Y\sigma\sqrt{a}$$

I materiali reali non possono sopportare tensioni “infinite”

⇓

Zona plastica all’apice del difetto

Cenni di meccanica della frattura lineare elastica 8

Estensione della zona plastica

Stato di tensione piana: $r_p = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{K_\mathrm{I}}{\sigma_p}\right)^2$

Stato di deformazione piana: $r_p = \dfrac{1}{3\pi}\left(\dfrac{K_\mathrm{I}}{\sigma_p}\right)^2$

Lo stato di deformazione piana è più pericolosa !!!!

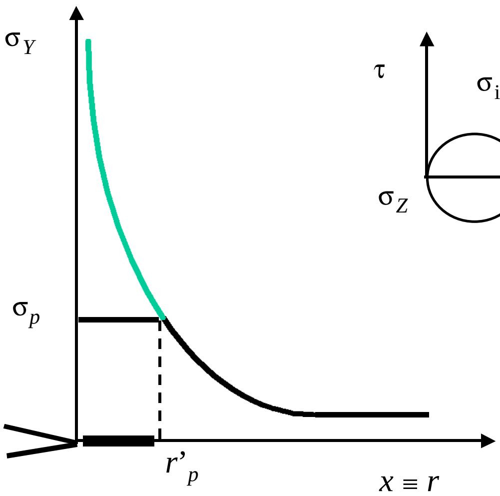
a parità di tensione nominale c'è maggiore energia a disposizione per aprire la cricca

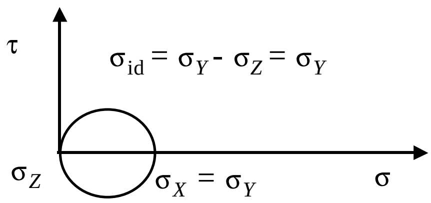
Cenni di meccanica della frattura lineare elastica 9

Valutazione estensione zona plastica STP - 1

$\theta = 0$

stato di tensione piano $\Rightarrow \sigma_Z = 0$





$$\sigma_p = \frac{K_\mathrm{I}}{\sqrt{2\pi r'_p}}$$

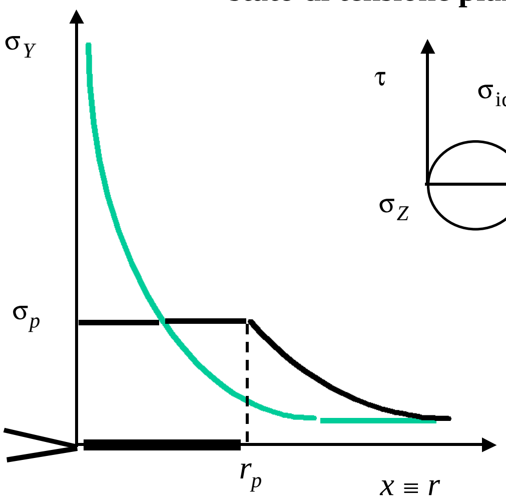
$$r'_p = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_\mathrm{I}}{\sigma_p}\right)^2$$

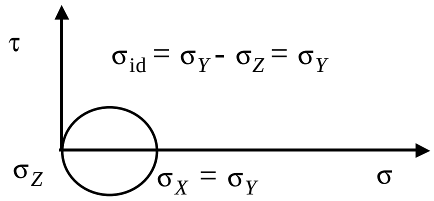
Cenni di meccanica della frattura lineare elastica 10

Valutazione estensione zona plastica STP - 2

$\theta = 0$

stato di tensione piano $\Rightarrow \sigma_Z = 0$





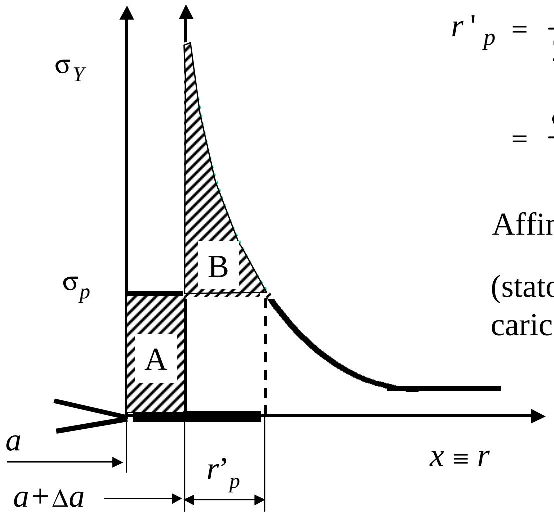
$$r_p = 2r'_p$$

$$r_p = \frac{1}{\pi}\left(\frac{K_I}{\sigma_p}\right)^2$$

Cenni di meccanica della frattura lineare elastica 11

Dimostrazione (ragionamento di Irwin) - 1:

In presenza di zona plastica la cricca si comporta come se la sua lunghezza fosse $a + \Delta a$



$$r'_p = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sigma\sqrt{\pi(a+\Delta a)}}{\sigma_p}\right)^2 = $$

$$= \frac{\sigma^2(a+\Delta a)}{2\sigma_p^2}$$

Affinchè $\int \sigma dA = P$

(stato di tensione equilibrato rispetto al carico esterno)

Deve essere A=B

Cenni di meccanica della frattura lineare elastica 12

Dimostrazione (ragionamento di Irwin) - 2

$$\sigma_P \Delta a = \int_0^{r'_P} \frac{\sigma\sqrt{\pi(a+\Delta a)}}{\sqrt{2\pi r}}dx - \sigma_P r'_P \Rightarrow \frac{2\sigma\sqrt{a+\Delta a}}{\sqrt{2}}\sqrt{r'_P} = \sigma_P(\Delta a + r'_P)$$

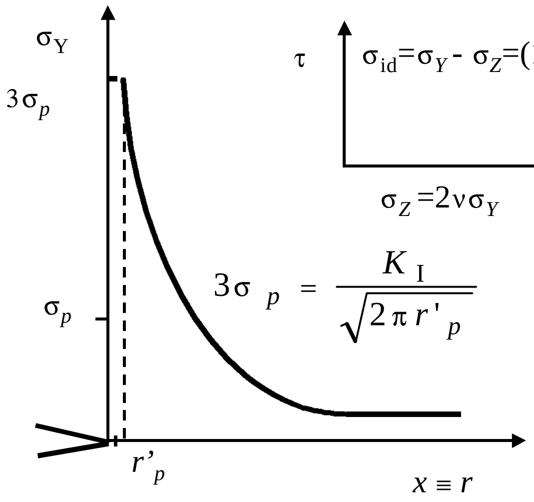
Essendo

$$r'_p = \frac{\sigma^2 (a + \Delta a)}{2\sigma_p^2} \Rightarrow \frac{\sigma\sqrt{(a+\Delta a)}}{\sqrt{2}} = \sigma_p\sqrt{r'_p}$$

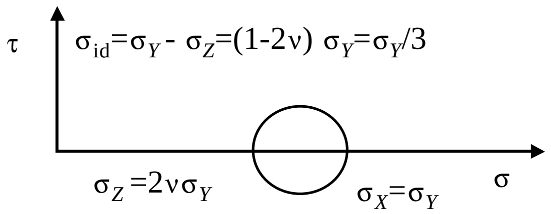
$$\boxed{2\sigma_p r_p' = \sigma_p (r_p' + \Delta a) \Rightarrow \Delta a = r_p' \Rightarrow r_p = 2 \cdot r_p'}$$

Valutazione estensione zona plastica SDP - 1

stato di def. piano $\Rightarrow \sigma_Z = \nu(\sigma_X + \sigma_Y) = 2\nu\sigma_Y$



$$3\sigma_p = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r'_p}}$$

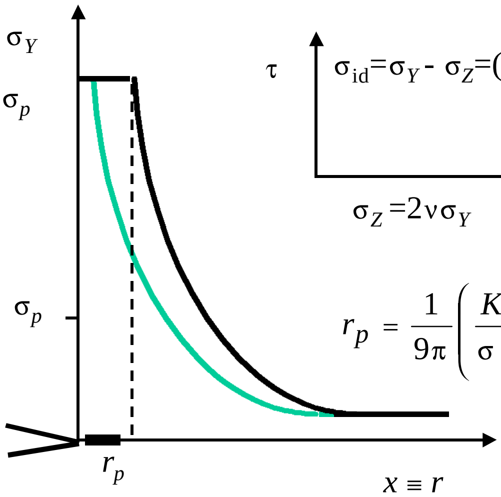


$$r'_p = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_I}{3\sigma_p}\right)^2$$

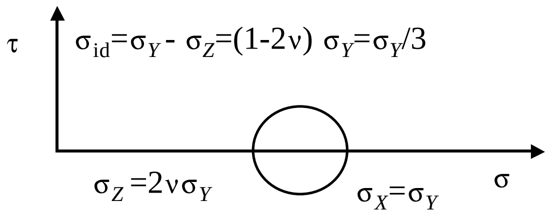
$$r'_p = \frac{1}{18\pi}\left(\frac{K_I}{\sigma_p}\right)^2$$

Valutazione estensione zona plastica SDP - 2

stato di def. piano $\Rightarrow \sigma_Z = \nu(\sigma_X + \sigma_Y) = 2\nu\sigma_Y$



$\sigma_{id}=\sigma_Y - \sigma_Z=(1-2\nu)\ \sigma_Y=\sigma_Y/3$



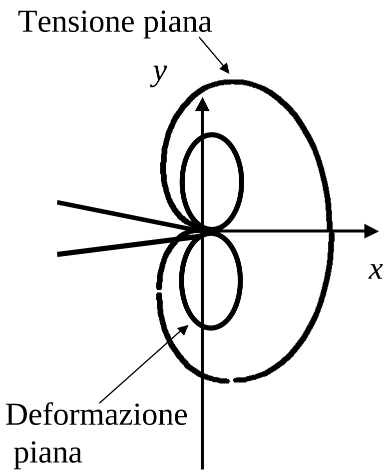
$$r_p = \frac{1}{9\pi}\left(\frac{K_I}{\sigma_p}\right)^2$$

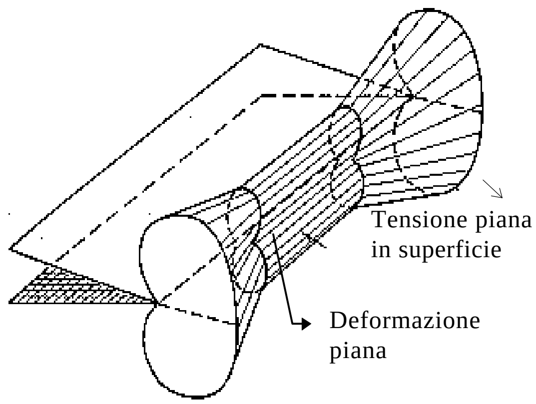
Correzione….

$$r_p = \frac{1}{3\pi}\left(\frac{K_I}{\sigma_p}\right)^2$$

Cenni di meccanica della frattura lineare elastica 15

Forma "vera" della zona plastica



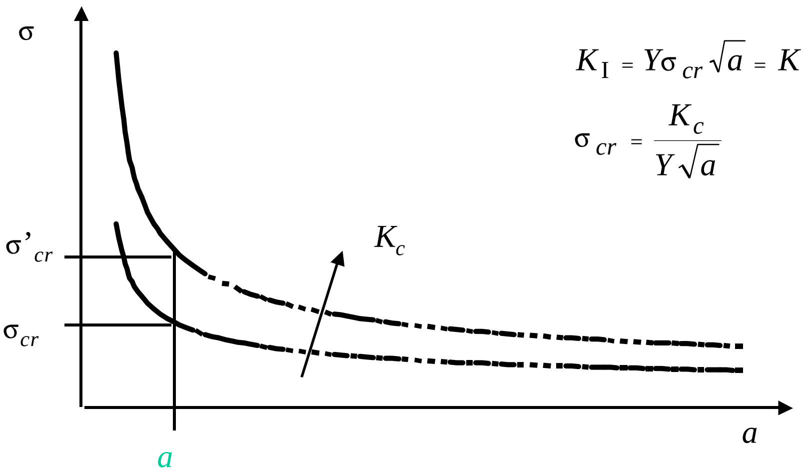


La meccanica della frattura lineare elastica
è applicabile se
r_p piccolo rispetto ad "a"

Cenni di meccanica della frattura lineare elastica 16

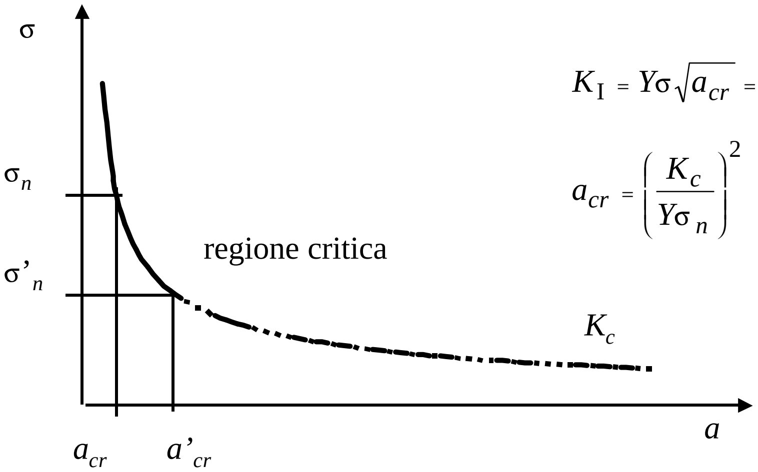
Quando avviene la frattura fragile ?

$$K_{\mathrm{I}} = Y\sigma\sqrt{a} = K_c$$



$$K_{\mathrm{I}} = Y\sigma_{cr}\sqrt{a} = K_c$$

$$\sigma_{cr} = \frac{K_c}{Y\sqrt{a}}$$



$$K_{\mathrm{I}} = Y\sigma\sqrt{a_{cr}} = K_c$$

$$a_{cr} = \left(\frac{K_c}{Y\sigma_n}\right)^2$$

$$K_{\mathrm{I}} = Y\sigma\sqrt{a} = K_c$$

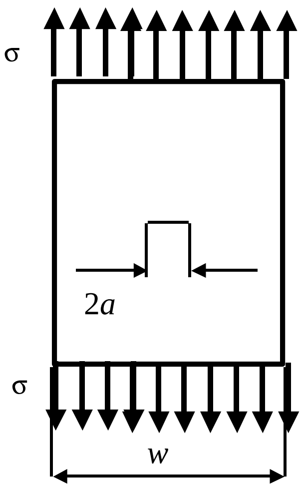
Problemi:

a) determinare K_{I}

b) determinare K_c

Determinazione K_I

Tramite apposite tavole
Con calcoli FEM (elementi specifici)



piastra con difetto passante

se $w >> a$

$$Y = \sqrt{\pi} \qquad K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$$

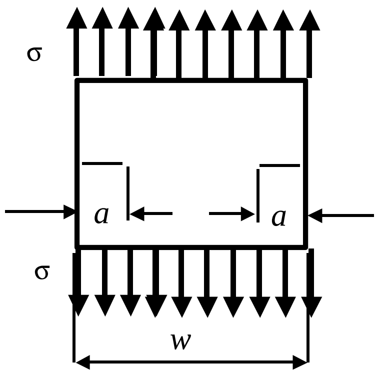
se w finita

$$Y = \sqrt{\pi}\sqrt{\sec\left(\frac{\pi a}{w}\right)}$$

$$K_I = Y\sigma\sqrt{a}$$

Cenni di meccanica della frattura lineare elastica 19

piastra con difetti laterali



se $w >> a$

$$Y = 1.12\sqrt{\pi}$$

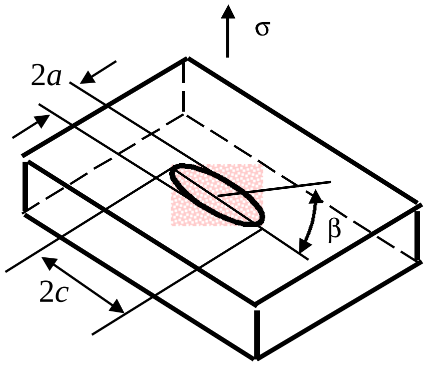
$$K_I = 1.12\sigma\sqrt{\pi a}$$

se w finita

$$K_I = Y\sigma\sqrt{a}$$

$$Y = 1.12\sqrt{\pi} + 0.76\left(\frac{a}{w}\right) - 8.48\left(\frac{a}{w}\right)^2 + 27.36\left(\frac{a}{w}\right)^3 + \ldots$$

Cenni di meccanica della frattura lineare elastica 20



difetto ellittico interno

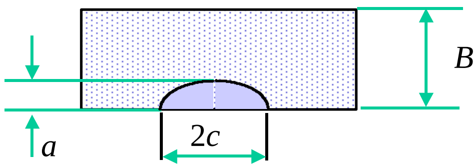
$$K_I = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\Phi}\cdot\sqrt[4]{sin^2\beta + \left(\frac{a}{c}\right)^2\cos^2\beta}$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow K_I = K_{\mathrm{Im}ax} = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\Phi}$$

$$\Phi \approx \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8}\left(\frac{a}{c}\right)^2$$

Cenni di meccanica della frattura lineare elastica 21

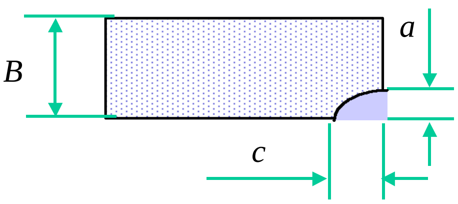
difetto ellittico superficiale



$$K_{\mathrm{Im}ax} = 1.12\cdot M_k\cdot\sigma\cdot\sqrt{\frac{\pi a}{Q}}$$

$$Q = \Phi^2 - 0.212\left(\frac{\sigma}{\sigma_p}\right)^2$$

difetto ellittico d'angolo



$$K_{\mathrm{Im}ax} = 1.12^2\cdot M_k\cdot\sigma\cdot\sqrt{\frac{\pi a}{Q}}$$

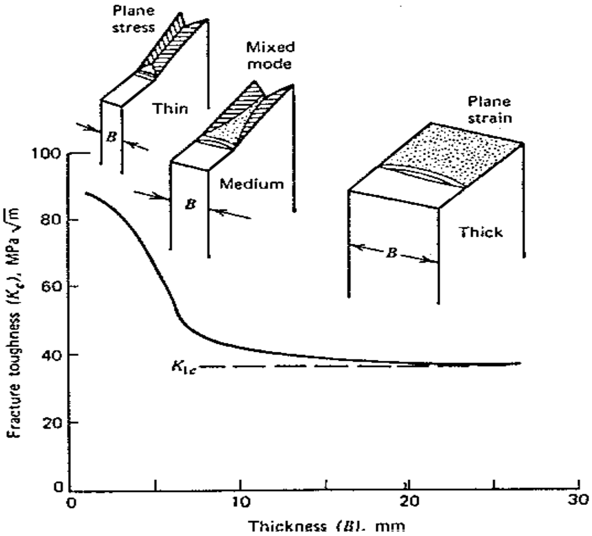
Cenni di meccanica della frattura lineare elastica 22

Valore critico K_c - Tenacità alla frattura K_{Ic}

K_c dipende da:

- spessore del componente
- temperatura
- velocità di applicazione del carico

Tenacità alla frattura K_{Ic}: Valore critico asintotico

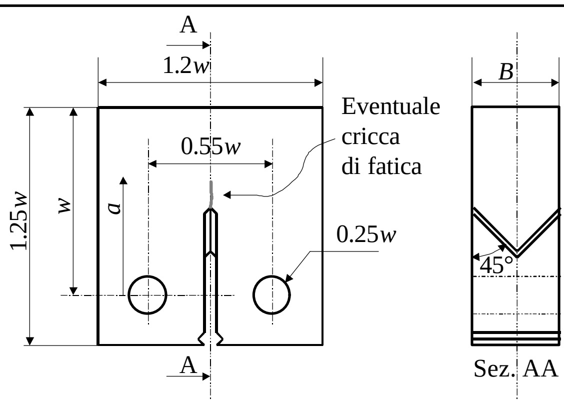


Effetto dello spessore

Cenni di meccanica della frattura lineare elastica 23

Provino CT
(utilizzato per prove di meccanica della frattura)

Norme:
ASTM E399-83
BS 5447
UNI 7969



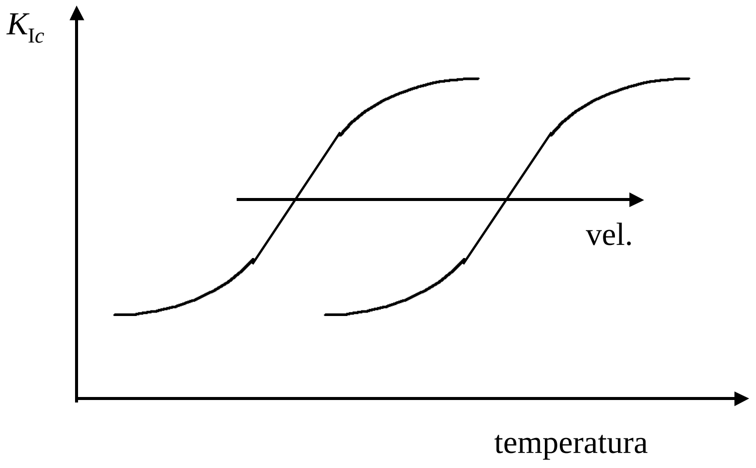
$$K_I = \frac{P}{Bw^{1/2}}\left[2.9\left(\frac{a}{w}\right)^{1/2} - 185.5\left(\frac{a}{w}\right)^{3/2} + 655.7\left(\frac{a}{w}\right)^{5/2} - 1017\left(\frac{a}{w}\right)^{7/2} + 639\left(\frac{a}{w}\right)^{9/2}\right]$$

valida per $a = 0.45 \div 0.55w$

se $a \geq 2.5\left(\frac{K_c}{\sigma_p}\right)^2$ $B \geq 2.5\left(\frac{K_c}{\sigma_p}\right)^2$ $w \geq 5.0\left(\frac{K_c}{\sigma_p}\right)^2$ ...allora $K_c = K_{Ic}$

Cenni di meccanica della frattura lineare elastica 24

Effetto temperatura e velocità di applicazione del carico

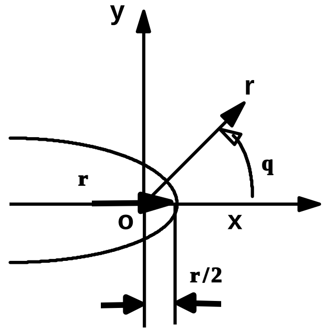


Materiale	σ_p(MPa)	K_{Ic}(MPa $m^{1/2}$)
Acciai al C	240	>210
4320 (lastra)	1495 - 1640	50 - 63
Ac. maraging 250	1700	74 - 97
Al 7075-T6	560	32
Al 2014-T4	450	29
Ti 6Al-4V (lastra)	815 -835	85 -107

In genere più è alto il limite di snervamento minore è la tenacità a frattura

Orientamento della superficie di frattura

L’orientamento della superficie di frattura dipende dallo stato di tensione all’apice della cricca. Nel momento della frattura $\rho \neq 0$. Le formule di Westergaard non sono più valide.



Cragor e Paris utilizzarono stesse tecniche di Westergaard ma presero in considerazione difetti con $\rho \neq 0$, ponendo l’origine del sistema di riferimento a una distanza $\rho/2$ dall’apice dell’intaglio.

Ricavando:

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\vartheta}{2}\left(1 - \sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{3\vartheta}{2}\right) - \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\left(\frac{\rho}{2r}\right)\cos\frac{3\vartheta}{2}$$

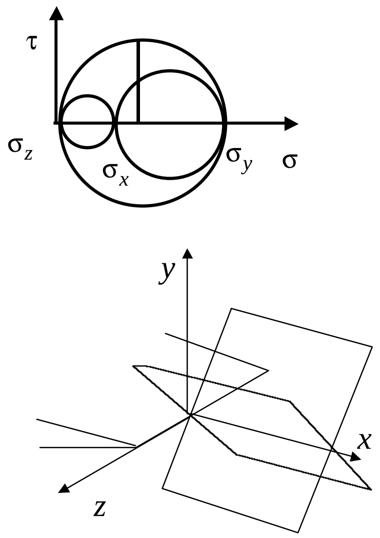
$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\vartheta}{2}\left(1 + \sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{3\vartheta}{2}\right) + \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\left(\frac{\rho}{2r}\right)\cos\frac{3\vartheta}{2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{3\vartheta}{2} - \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\left(\frac{\rho}{2r}\right)\sin\frac{3\vartheta}{2}$$

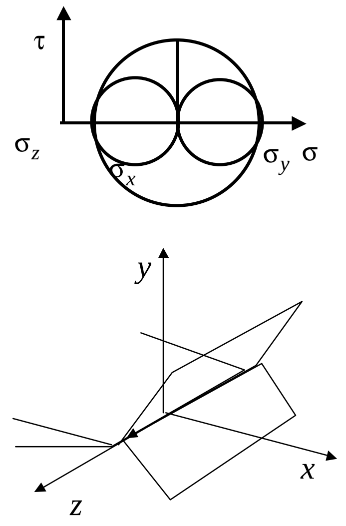
$$\vartheta = 0 \Rightarrow \qquad \sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\left(1 - \frac{\rho}{2r}\right) \qquad \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\left(1 + \frac{\rho}{2r}\right)$$

$$r = \rho/2 \Rightarrow \qquad \sigma_x = 0 \quad \sigma_y = \frac{2K_I}{\sqrt{\pi\rho}} \qquad \sigma_y > \sigma_y \quad \forall r$$

Stato di tensione piana

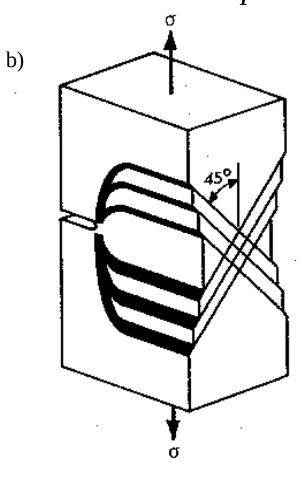


Stato di deformazione piana

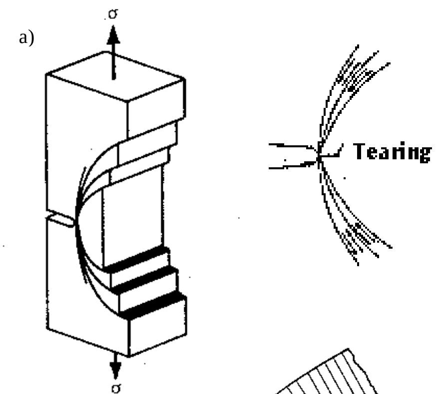


Cenni di meccanica della frattura lineare elastica 29

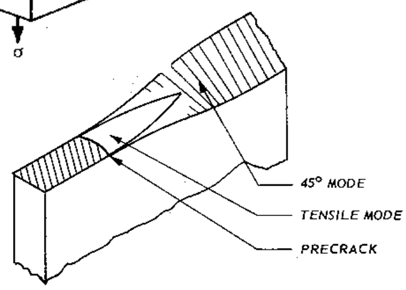
Stato di tensione piana



Stato di deformazione piana

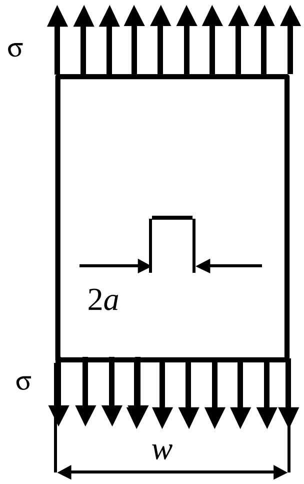


Condizione mista



Cenni di meccanica della frattura lineare elastica 30

Collasso plastico o frattura fragile ?



comportamento duttile

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{Bw}$$

$$P_{cr} = \sigma_p B(w - 2a)$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\sigma_p B(w - 2a)}{Bw}$$

$$\sigma_{cr} = \sigma_p\left(1 - \frac{2a}{w}\right)$$

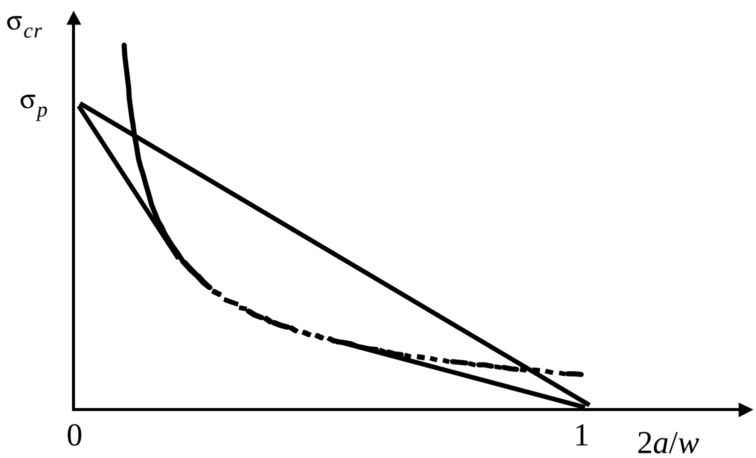
comportamento fragile

$$K_I = Y\sigma\sqrt{a} = K_{Ic}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{K_I}{Y\sqrt{a}}$$

Cenni di meccanica della frattura lineare elastica 31

Diagramma di Feddersen



Cenni di meccanica della frattura lineare elastica 32