



FATICA MULTIASSIALE

Stati di sollecitazione

- multiassiali proporzionali (semplici):

- Direzioni principali fisse

- Direzioni principali mobili

- multiassiali non proporzionali (complessi):

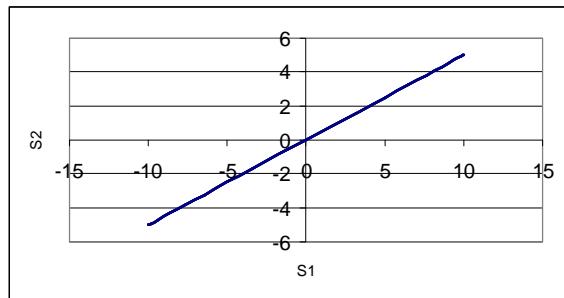
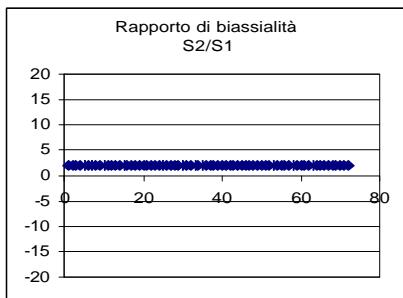
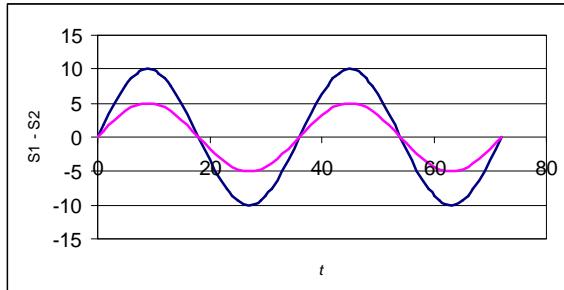
- Sincrone (uguale frequenza) con sfasamento

- Asincrone periodiche (rapporto fra le frequenze razionale)

- Asincrone non periodiche (rapporto fra le frequenze irrazionale)

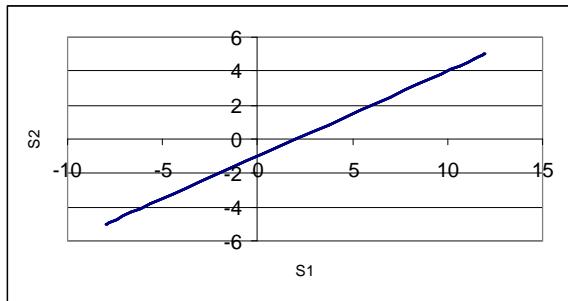
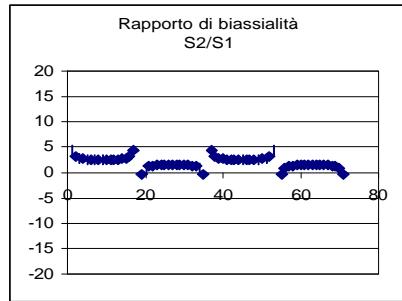
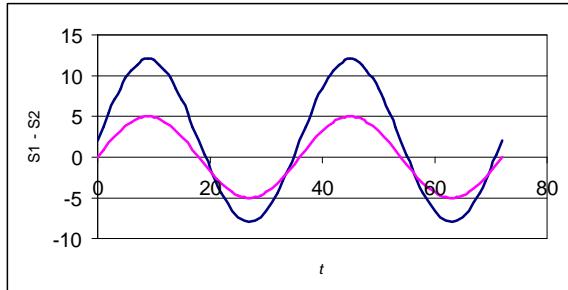


Sollecitazioni proporzionali
direzioni principali fisse
(uguale R)





*Sollecitazioni proporzionali
direzioni principali mobili
(R diversi)*

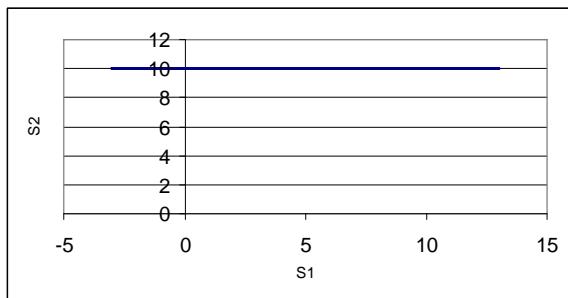
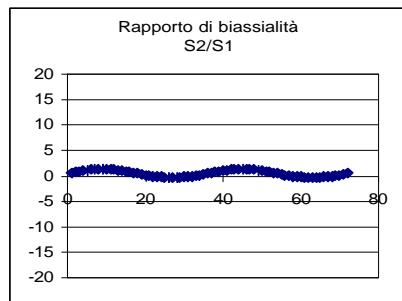
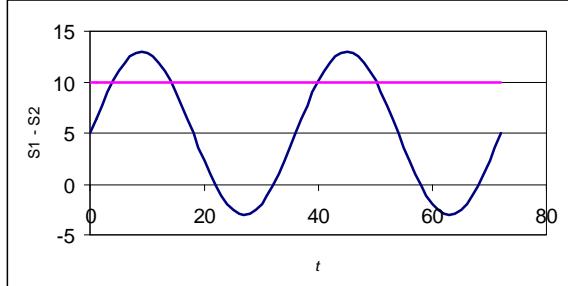


Fatica multiassiale



3

*Sollecitazioni proporzionali
direzioni principali mobili
(dovute a componente media)*



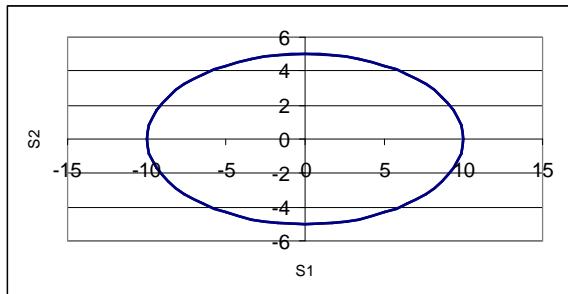
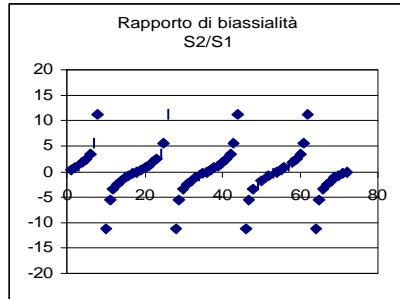
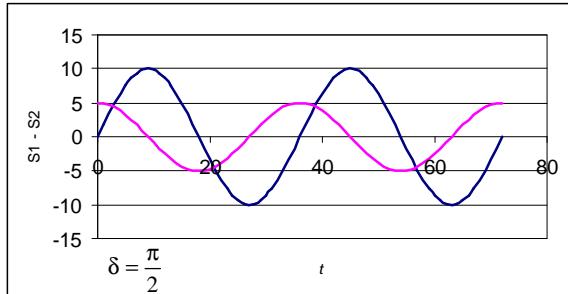
Fatica multiassiale



4



*Sollecitazioni non proporzionali
sincrone con sfasamento
(out of phase)*

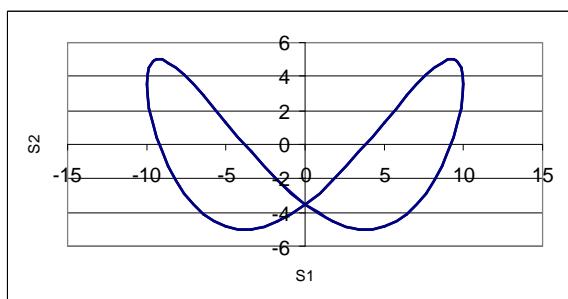
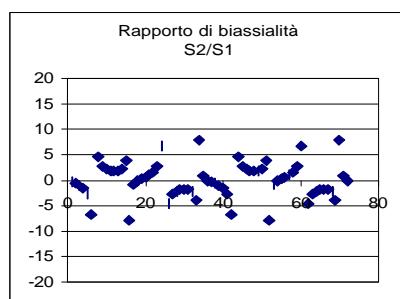
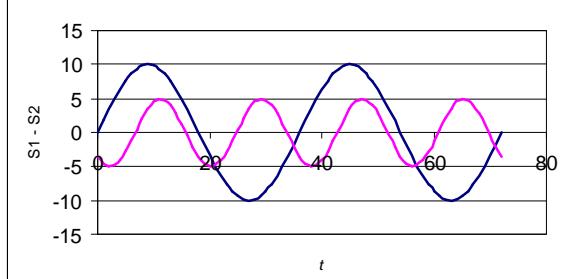


Fatica multiassiale



5

*Sollecitazioni non proporzionali
asincrone periodiche*



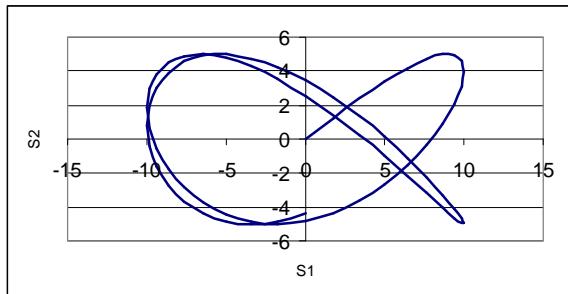
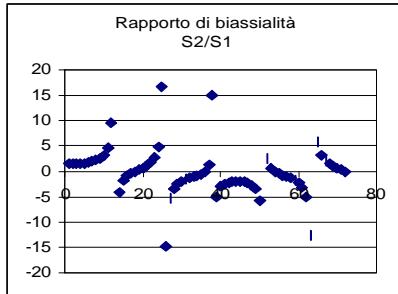
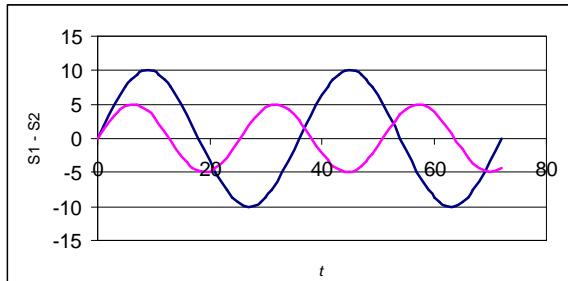
Fatica multiassiale



6



*Sollecitazioni non proporzionali
asincrone non periodiche*



Fatica multiassiale



7

Criteri per la fatica multiassiale

Empirici:

- Gough e Pollard* ('30-'50)
Son Book Lee* (1985)

Energetici

- Froustey

Invarianti delle tensioni:

- Sines* (1955)
Crossland* (1956)

Approccio microscopico

- Dang Van* (73-88)
Papadopoulos*

Piano critico:

- Brown e Miller (1973)
Matake* (1977)
McDiarmid* (1989)
Socie (1987)
Socie e Fatemi (1988)

* per vita infinita

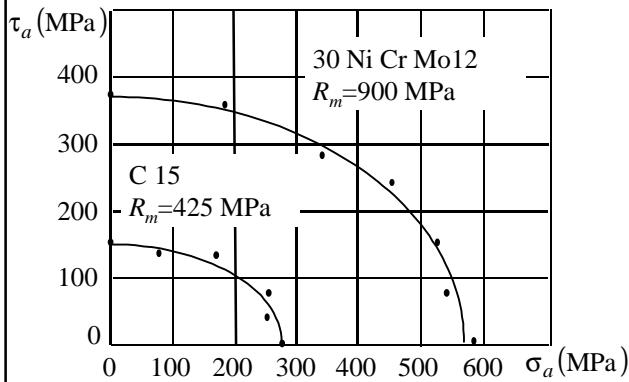
Fatica multiassiale

8



Gough e Pollard

σ e τ alternate in fase \Rightarrow Sollecitazioni proporzionali



materiali duttili

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{D-1}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{\tau_{D-1}} \right)^2 \leq 1$$

$$\sigma_a^2 + \left(\frac{\sigma_{D-1}}{\tau_{D-1}} \right)^2 \tau_a^2 \leq \sigma_{D-1}^2$$

$$\tau_{D-1} \approx 0.6\sigma_{D-1} \approx \frac{\sigma_{D-1}}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2} \leq \sigma_{D-1}$$

materiali fragili: $\left(\frac{\tau_a}{\tau_{D-1}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{\sigma_a} - 1 \right) \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{D-1}} \right)^2 + \left(2 - \frac{\sigma_{D-1}}{\tau_{D-1}} \right) \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{D-1}} \right) = 1$

Fatica multiassiale

9

Son Book Lee

Sollecitazioni non proporzionali sincrone
con sfasamento δ

Ampliamento del criterio di Gough e Pollard

$$\left[\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{D-1}} \right)^\alpha + \left(\frac{\tau_a}{\tau_{D-1}} \right)^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}} \leq 1$$

$$\alpha = 2(1 + \beta \sin \delta)$$

β costante del materiale:

$\beta \approx 0.3$ materiali duttili

$\beta \approx 0.15$ materiali fragili



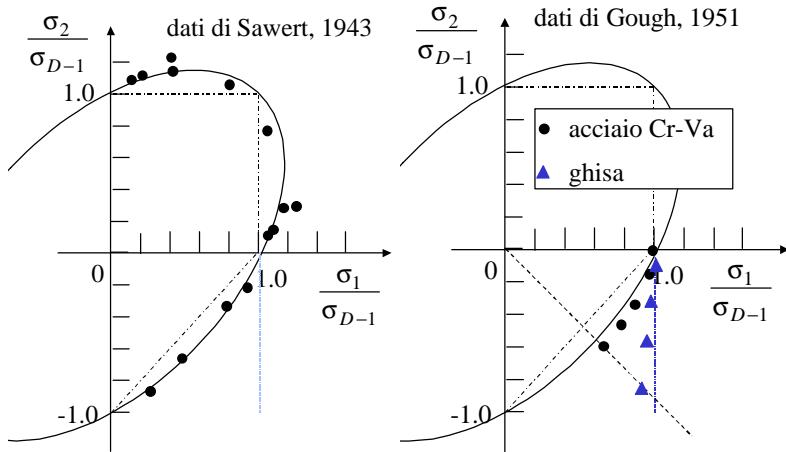
Fatica multiassiale

10

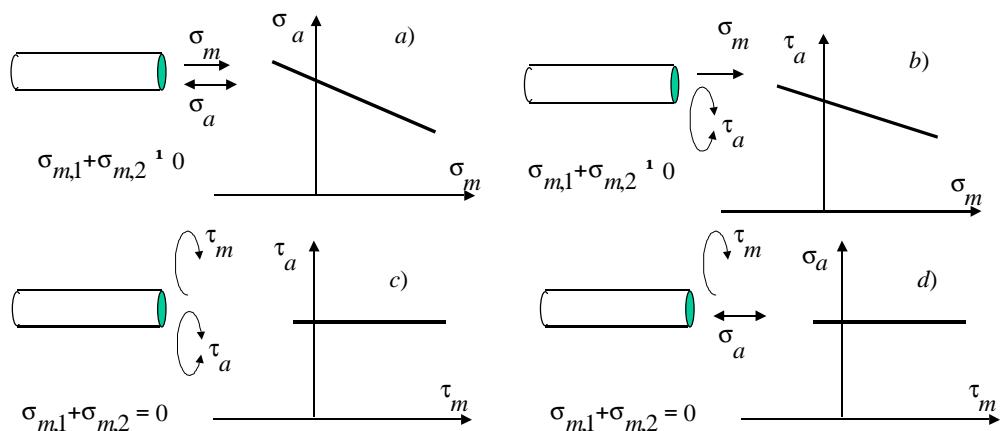


Sines

Sollecitazioni proporzionali



Analisi di Sines: influenza dei valori medi (stati di tensione biassiale)



Tenendo conto dei risultati ottenuti senza tensione media e generalizzando :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{a,1} - \sigma_{a,2})^2 + (\sigma_{a,1} - \sigma_{a,3})^2 + (\sigma_{a,2} - \sigma_{a,3})^2} + m(\sigma_{m,1} + \sigma_{m,2} + \sigma_{m,3}) \leq \sigma_{D-1}$$



$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{a,1} - \sigma_{a,2})^2 + (\sigma_{a,1} - \sigma_{a,3})^2 + (\sigma_{a,2} - \sigma_{a,3})^2} + m(\sigma_{m,1} + \sigma_{m,2} + \sigma_{m,3}) \leq \sigma_{D-1}$$

↑
 \propto al II invariante del tensore deviatorico
delle tensioni alternate

↑
I invariante del tensore
delle tensioni medie

Nel caso uniaxiale: $\sigma_{a,1} + m \cdot \sigma_{m,1} = \sigma_{D-1}$

cioè l'equazione di Goodman se $m = \frac{\sigma_{D-1}}{R_m}$

Biassiale:

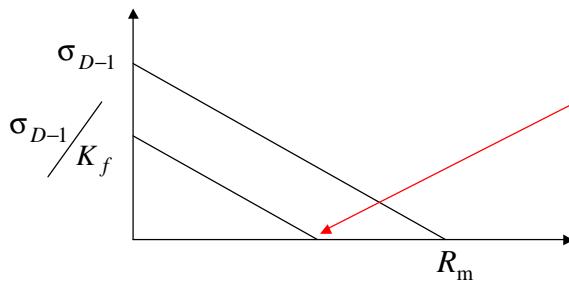
$$\sqrt{\sigma_{a,1}^2 + \sigma_{a,2}^2 - \sigma_{a,1}\sigma_{a,2}} + m(\sigma_{m,1} + \sigma_{m,2}) \leq \sigma_{D-1}$$

Nel caso di alberi:

$$\sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2} + m \cdot \sigma_m \leq \sigma_{D-1}$$

In caso di intagli...

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{a,1} - \sigma_{a,2})^2 + (\sigma_{a,1} - \sigma_{a,3})^2 + (\sigma_{a,2} - \sigma_{a,3})^2} + m(\sigma_{m,1} + \sigma_{m,2} + \sigma_{m,3}) \leq \frac{\sigma_{D-1}}{K_f}$$

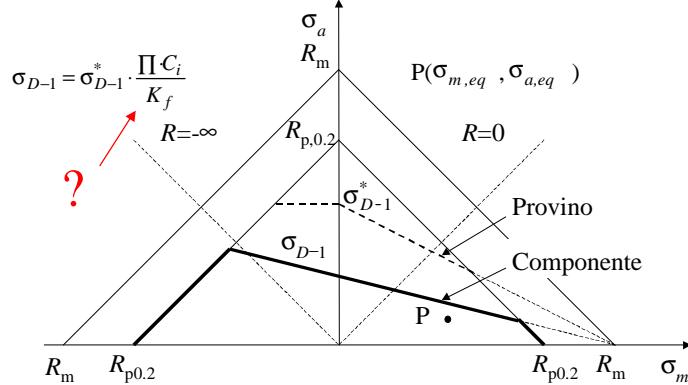




Interpretazione come tensioni equivalenti:

$$\sigma_{a,eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{a,1} - \sigma_{a,2})^2 + (\sigma_{a,1} - \sigma_{a,3})^2 + (\sigma_{a,2} - \sigma_{a,3})^2}$$

$$\sigma_{m,eq} = (\sigma_{m,1} + \sigma_{m,2} + \sigma_{m,3})$$



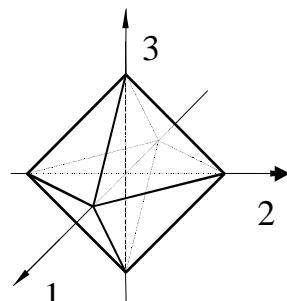
Interpretazione di Sines con le tensioni ottaedriche

Tensioni ottaedriche

$$\tau_{ott} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}$$

$$\sigma_{ott} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} I_1 = \sigma_H$$

$$\text{Von Mises: } \sigma_{id} = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{ott}$$



P Formula alternativa:

$$\frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_{a,1} - \sigma_{a,2})^2 + (\sigma_{a,1} - \sigma_{a,3})^2 + (\sigma_{a,2} - \sigma_{a,3})^2} + a \cdot \sigma_{H,m} \leq b$$

$$a = \sqrt{2} m = \frac{\sqrt{2} \sigma_{D-1}}{R_m} \quad b = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_{D-1}$$



Sines + FEM

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{a,1}^{\text{fem}} - \sigma_{a,2}^{\text{fem}})^2 + (\sigma_{a,1}^{\text{fem}} - \sigma_{a,3}^{\text{fem}})^2 + (\sigma_{a,2}^{\text{fem}} - \sigma_{a,3}^{\text{fem}})^2} + \\ + m(\sigma_{m,1}^{\text{fem}} + \sigma_{m,2}^{\text{fem}} + \sigma_{m,3}^{\text{fem}}) \leq \sigma_{D-1}^{\text{ni}}$$

$$\sigma_{D-1}^{\text{ni}} = \sigma_{D-1}^* \cdot \prod C_i$$

Nel caso biassiale:

$$\sqrt{(\sigma_{a,1}^{\text{fem}})^2 + (\sigma_{a,2}^{\text{fem}})^2 - \sigma_{a,1}^{\text{fem}} \sigma_{a,2}^{\text{fem}}} + m(\sigma_{m,1}^{\text{fem}} + \sigma_{m,2}^{\text{fem}}) \leq \sigma_{D-1}^{\text{ni}}$$

Corrisponde a non considerare la sensibilità all'intaglio: $K_f = K_t$



Crossland Sollecitazioni proporzionali o non proporzionali periodiche

Per sollecitazioni non proporzionali non è possibile definire un “istante medio”. Se le sollecitazioni sono periodiche è possibile valutare la $\sigma_{H,\max}$

$$\frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_{a,1} - \sigma_{a,2})^2 + (\sigma_{a,1} - \sigma_{a,3})^2 + (\sigma_{a,2} - \sigma_{a,3})^2} + a_C \cdot \sigma_{H,\max} \leq b_C$$

$$\tau_{a,ott} + a_C \cdot \sigma_{H,\max} \leq b_C$$

a_c e b_c valutabili con due limiti di fatica indipendenti:

- Torsione – flessione
- Trazione $R = -1$, Trazione con $R = 0$

$$b_C = \frac{\sqrt{6}}{3} \tau_{D-1} \quad a_C = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\tau_{D-1}}{\sigma_{D-1}} - \frac{1}{3} \right)$$

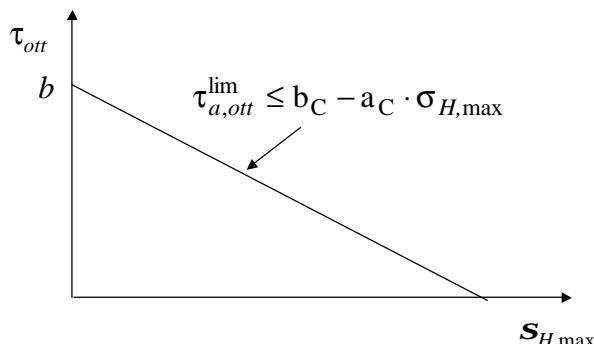


Più restrittivo di Sines per le sollecitazioni proporzionali

Nel caso di sollecitazioni non proporzionali si considera la $\tau_{a,ott}$ massima nel periodo

Anche il metodo di Crossland può essere utilizzato con il FEM, con le stesse considerazioni svolte per Sines

Piano di Crossland



Fatica multiassiale

19

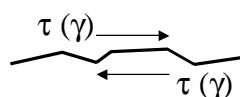


Piano critico

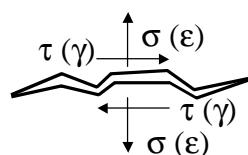
La fatica dipende dalle sollecitazioni agenti su un particolare piano (critico)

Il piano critico è quello di nucleazione delle cricche

La nucleazione dipende principalmente dalle $\tau(\gamma)$ sul piano critico



le $\sigma(\varepsilon)$ agenti normalmente al piano critico influenzano la nucleazione

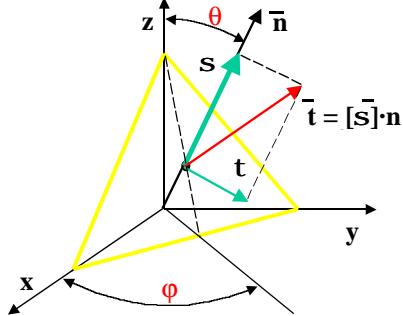


Fatica multiassiale

20



Individuazione piano critico:

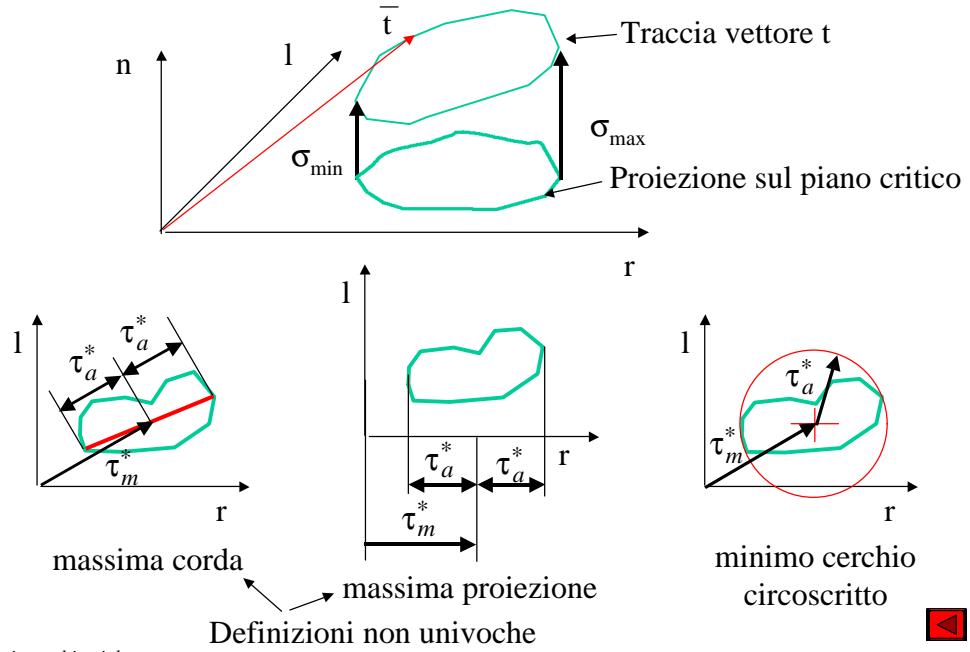


$$(\theta, \phi) : \max[(a_1\sigma_a + a_2\sigma_m + a_3\tau_a + a_4\tau_m) + (b_1\varepsilon_a + b_2\varepsilon_m + b_3\gamma_a + b_4\gamma_m)]$$

Verifica (valori sul piano critico):*

$$(A_1\sigma_a^* + A_2\sigma_m^* + A_3\tau_a^* + A_4\tau_m^*) + (B_1\varepsilon_a^* + B_2\varepsilon_m^* + B_3\gamma_a^* + B_4\gamma_m^*) \leq Lim$$

Individuazione componenti alterne e medie (multiassiali periodiche)





Brown e Miller

Lavoro che ha introdotto il concetto di piano critico

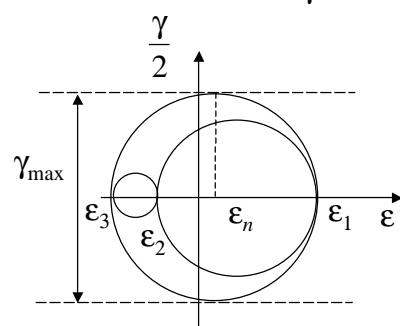
Analizzando dati di fatica uniassiali e proporzionali

Linea di ugual vita

$$\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} = f\left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2}\right)$$

Massima $\gamma/2$

ε_n nel piano della massima γ



Formula alternativa:

$$\Delta\gamma^* + s \cdot \varepsilon_n^* = C(N)$$

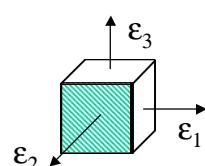
s dipendente dal materiale

NB: stress 2D \Rightarrow strain 3D

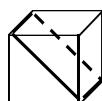
Piano critico (stato di tensione biassiale)

■ Superficie libera

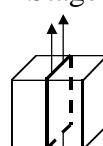
$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$$



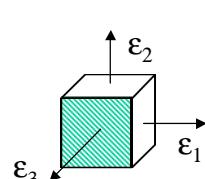
Stage I



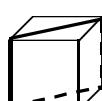
Stage II



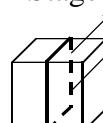
Caso A



Stage I



Stage II



Caso B



Casi particolari

Uniassiali:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu \varepsilon_1$$

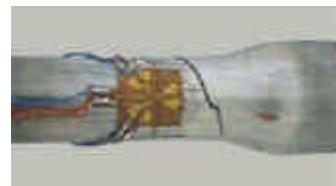
Cricche circolari



Torsione

$$\varepsilon_3 = -\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 = 0$$

Caso A



Plane strain+tensione biassiale
Caso B

Fatica multiassiale

25

Matake

$$(\theta, \varphi) : \max[\tau_a(\theta, \varphi)]$$

$$\tau_a^* + k \cdot \sigma_{\max}^* \leq \lambda$$

Calibrazione con 2 prove indipendenti

$$\tau_a^* + \left(\frac{2 \cdot \tau_{D-1}}{\sigma_{D-1}} - 1 \right) \cdot \sigma_{\max}^* \leq \tau_{D-1}$$

McDiarmid

Calibrazione empirica

Cricche di tipo A

$$\tau_a^* + \frac{\tau_{D-1}^A}{2 \cdot R_m \sigma_{D-1}} \sigma_{\max}^* \leq \tau_{D-1}^A$$

Cricche di tipo B

$$\tau_a^* + \frac{\tau_{D-1}^B}{2 \cdot R_m \sigma_{D-1}} \sigma_{\max}^* \leq \tau_{D-1}^B$$

Fatica multiassiale

26



Socie

Valida solo certi materiali (propagazione cricca in modo II)

$$(\theta, \varphi) : \max \left[\gamma_a + \varepsilon_a + \frac{\sigma_m^*}{E} \right]$$

$$\gamma_a^* + \varepsilon_a^* + \frac{\sigma_m^*}{E} = \frac{\tau_f'}{G} (2N)^b + \gamma_f' (2N)^c$$

Socie e Fatemi

$$\gamma_a^* \left[1 + k \frac{\sigma_{\max}^*}{R_{p,02}} \right] = \frac{\tau_f'}{G} (2N)^b + \gamma_f' (2N)^c$$

da determinare con prove di fatica a flessione e torsione



Curva di Manson Coffin g 2N

$$\frac{\Delta \gamma}{2} = \frac{\tau_f'}{G} (2N)^{b1} + \gamma_f' (2N)^{c1}$$

$$\text{Stima 1} \quad \tau_f' = \frac{\sigma_f'}{\sqrt{3}} \quad \gamma_f' = \sqrt{3} \cdot \varepsilon_f' \quad b1 = b \quad c1 = c$$

Stima 2

$$\gamma = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = \varepsilon_1 - (-\nu) \varepsilon_1 \quad \frac{\Delta \varepsilon}{2} = \frac{\sigma_f'}{E} (2N)^b + \varepsilon_f' (2N)^c$$

$$\gamma = (1 + \nu) \varepsilon_1$$

↓

$$\nu_e \approx 0.3 \quad \nu_p \approx 0.5$$

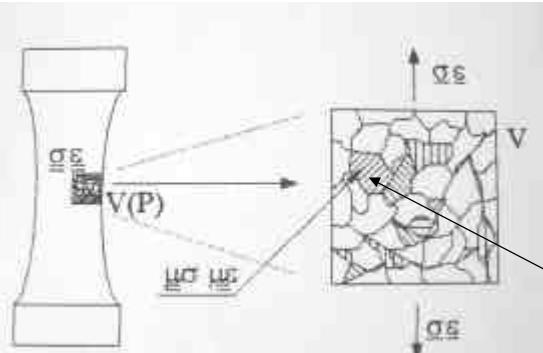
$$\frac{\Delta \gamma}{2} = 1.3 \frac{\sigma_f'}{E} (2N)^b + 1.5 \varepsilon_f' (2N)^c$$





Dang Van

Approccio microscopico (mesoscopico)



Il materiale è omogeneo su scala macroscopico,
anisotropo su scala microscopica

lato $V \approx 1 \text{ mm}$ (FEM)

Le tensioni/deformazioni macroscopiche sono la media delle tensioni/deformazioni microscopiche

In ogni grano esistono piani di scorrimento facilitato (piani principali)

**Le sollecitazioni macroscopiche sono in campo elastico
Le sollecitazioni microscopiche possono essere in campo plastico**

Il rottura a fatica avviene quando si innesca una cricca nel grano orientato più sfavorevolmente (fenomeno plastico)

La deformazione plastica nel grano (dovuta essenzialmente alle azioni tangenziali) si accumula.

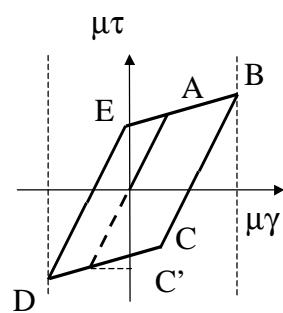
La relazione fra le grandezze macroscopiche e quelle microscopiche risulta:

$$\mu\tau = \frac{\mu\sigma_1(t) - \mu\sigma_3(t)}{2}$$
$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \underline{\underline{\sigma}}(t) + \underline{\underline{\rho}}(t)$$

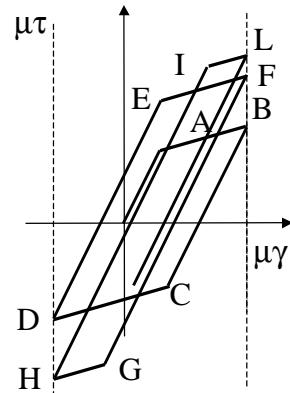
Ipotesi di Mandel *Tensore tensioni residue (1° nei grani plasticizzati)*



Si deve tener conto dell'incrudimento sul piano principale che è una combinazione di due tipi: cinematico e isotropo



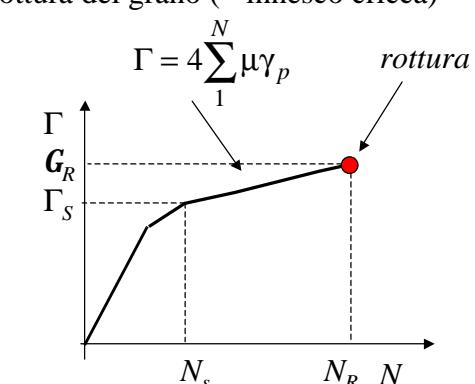
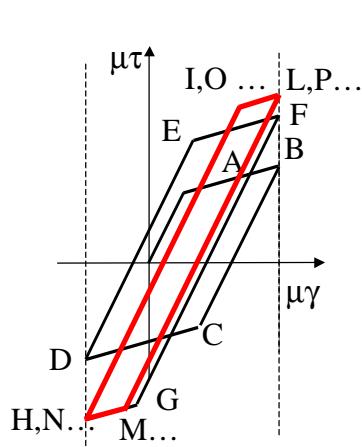
Incrudimento cinematico
(effetto Bauschinger):
spostamento del centro del ciclo



Incrudimento isotropo:
Innalzamento limite elastico

Due casi:

- A) Ad un certo punto la capacità di incrudimento isotropo si esaurisce e rimane un ciclo di isteresi che comporta un accumulo di deformazione plastica fino alla rottura del grano (= innesco cricca)



Si innesca la cricca \Rightarrow rottura a fatica



B) Il ciclo di isteresi si riduce ad una linea: non vi è ulteriore accumulo di deformazione plastica e non vi è quindi innesco della cricca

Stato adattato (o shake down elastico) $\hat{\sigma}$ limite di fatica del grano

Ciclo macroscopico
elastico asimmetrico

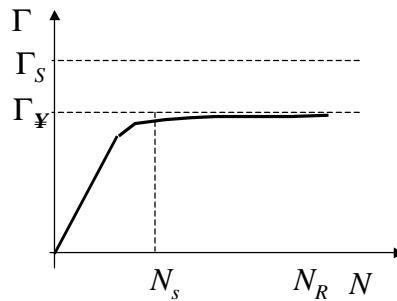
Tensione
residua ρ

ρ costante
in stato
adattato

$\tau_m = \rho$

...Q, S ...

Ciclo microscopico
elastico simmetrico



\Rightarrow Il criterio di fatica è:
 $\Gamma_Y < \Gamma_S$

Fatica multiassiale

33

Per Dang Van:

$$\Gamma_Y < \Gamma_S \iff \mu\tau(t) + a \cdot \mu\sigma_H(t) \leq b$$

$\mu\sigma_H$ (tensione idrostatica microscopica) tiene conto dell'effetto delle tensioni normali alla superficie di scorrimento; si può dimostrare che:

$$\mu\sigma_H(t) = \frac{\mu\sigma_1(t) + \mu\sigma_2(t) + \mu\sigma_3(t)}{3} = \frac{\sigma_1(t) + \sigma_2(t) + \sigma_3(t)}{3} = \sigma_H(t)$$

$$\boxed{\mu\tau(t) + a \cdot \sigma_H(t) \leq b}$$

(a e b ricavate da due prove monoassiali..)

Fatica multiassiale

34



Per poterla applicare si deve considerare che:

- il materiale è macroscopicamente omogeneo \Rightarrow i piani principali (di scorrimento) sono disposti casualmente.
- ci sarà sempre un piano principale orientato (nell'istante t) nella direzione della $\mu\tau^{\max}(t)$ (massima nello spazio).
- la tensione idrostatica $\sigma_H(t)$ è indipendente dal piano (per definizione)

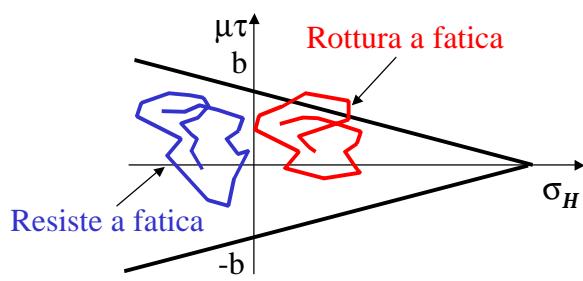
$$\mu\tau^{\max}(t) = \frac{\mu\sigma_1(t) - \mu\sigma_3(t)}{2} = \mu\tau(t)$$

$$\underline{\underline{\mu\sigma}}(t) = \underline{\underline{\sigma}}(t) + \underline{\underline{\rho}}$$

Costante nel tempo perché in stato adattato, calcolabile con procedimento grafico (automatizzabile) in alcuni casi

Se siamo in grado di calcolare le $\mu\tau(t)$ (cioè ρ e il tensore $[\sigma(\tau)]$) possiamo valutare se un componente resiste a fatica oppure no:

$$\mu\tau(t) + a \cdot \sigma_H(t) \leq b$$

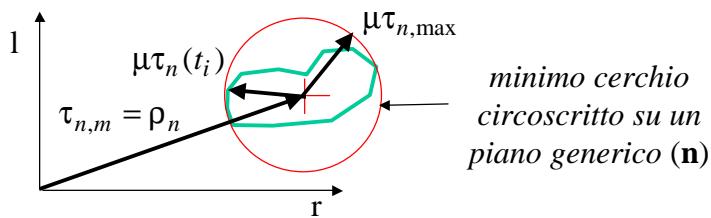


Il criterio è, in teoria, applicabile a qualunque storia di carico, anche non periodica, pur di essere in grado di valutare ρ .
In pratica il calcolo si semplifica in casi particolari



Storie di carico periodiche:

- Si definisce $\tau_{n,m}$ come la distanza fra l'origine e il centro del minimo cerchio circoscritto alla storia di carico delle $\tau_n(\tau)$ su un piano (definito dal versore \mathbf{n}); $\tau_{n,m} = \rho_n$ (sul piano).
- La distanza fra il centro e la curva (in ogni istante) è il valore $\mu\tau_n(t_i)$
- Il **raggio del cerchio minimo** è il valore massimo nel piano durante il ciclo della $\mu\tau_n(t)$ (= $\mu\tau_{n,max}$).



La cricca può nascere quando, al variare di \mathbf{n} , la $\mu\tau_{n,max}$ supera il valore critico del grano orientato più sfavorevolmente.

Storie di carico periodiche sincrone (in fase e fuori fase):

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\rho}} &= -\underline{\underline{\sigma}_m} \Rightarrow \underline{\underline{\mu\sigma}}(t) = \underline{\underline{\sigma}}(t) - \underline{\underline{\sigma}_m} \\ \mu\tau(t) &= \frac{\mu\sigma_1(t) - \mu\sigma_3(t)}{2} = \frac{(\sigma_1(t) - \sigma_{1,m}) - (\sigma_3(t) - \sigma_{3,m})}{2}\end{aligned}$$

Storie di carico periodiche con $R = -1$:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\rho}} &= -\underline{\underline{\sigma}_m} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\mu\sigma}}(t) = \underline{\underline{\sigma}}(t) \\ \mu\tau(t) &= \frac{\mu\sigma_1(t) - \mu\sigma_3(t)}{2} = \frac{\sigma_1(t) - \sigma_3(t)}{2} = \tau^{\max}(t)\end{aligned}$$

Storie di carico proporzionali con $R = -1$:

$$\mu\tau(t) = \tau^{\max}(t) \Rightarrow \max_{t \in T} [\mu\tau(t)] = \max_{t \in T} (\tau_a)$$

Storie di carico proporzionali con $R = -1$ e ampiezza costante:

$$\max_{t \in T} [\mu\tau(t)] = \tau_a$$



Algoritmo (logico):

- campionamento del ciclo (K istanti)
- campionamento degli ∞^2 piani ($L \cdot M$)
- per ogni piano individuato da \mathbf{n} si calcola il centro e il raggio del minimo cerchio circoscritto ($\rho_n; \mu\tau_{n,\max}$)
- si individua il piano \mathbf{n}^* con il massimo cerchio circoscritto:
 $\mu\tau_{n^*,\max} = \max(\mu\tau_{n,\max}) \Rightarrow \rho$
- sul piano \mathbf{n}^* , per ogni istante si calcolano:

$$\mu\tau_{n^*}(t_i) = \mu\tau(t_i) \quad \sigma_H(t)$$

- si esegue la verifica con il criterio di Dang Van: $\boxed{\mu\tau(t) + a \cdot \sigma_H(t) \leq b}$

Il tutto equivale a: $\max_{\mathbf{n}} \left\{ \max_t [\mu\tau(t) + a \cdot \sigma_H(t)] \right\} \leq b$

Esistono algoritmi per la valutazione delle grandezze in esame

Determinazione costanti a e b

$$\boxed{\mu\tau(t) + a \cdot \sigma_H(t) \leq b}$$

Prova di torsione alternata ($R=-1$, ampiezza costante)

$$\sigma_{1,\max} = \tau_a \quad \sigma_{2,\max} = 0 \quad \sigma_{3,\max} = -\tau_a$$

$$\max_{t \in T} [\mu\tau(t)] = \tau_a = \tau_{D-1} \quad \sigma_H = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = \tau_{D-1}}$$

Prova di flessione rotante ($R=-1$, ampiezza costante)

$$\sigma_{1,\max} = \sigma_a \quad \sigma_{2,\max} = \sigma_{3,\max} = 0$$

$$\max_{t \in T} [\mu\tau(t)] = \frac{\sigma_a}{2} = \frac{\sigma_{D-1}}{2} \quad \sigma_H = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_a}{3} = \frac{\sigma_{D-1}}{3}$$

$$\frac{\sigma_{D-1}}{2} + a \cdot \frac{\sigma_{D-1}}{3} = \sigma_{D-1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{3 \cdot \tau_{D-1}}{\sigma_{D-1}} - \frac{3}{2}}$$



A volte la $\mu\tau(t)$ viene indicata come $\tau_a(t)$

