柯江. 基于新模型求解平面应变问题. 低温建筑技术, 2014, 36(8): 92-94.
Jiang Ke. Solution of plane strain problems based on a new model. Low Temperature Architecture Technology, 2014, 36(8): 92-94.
DOI: 10.13905/j.cnki.dwjz.2014.08.045

基于新模型求解平面应变问题

柯　江

（陕西理工学院土建学院，陕西 汉中 723001）

摘　要：现有的正交各向异性的平面应变问题的各种计算方法都是很复杂的，本文根据一种新单元模型来求解带裂纹的正交各向异性的平面应变问题，再与有限元法进行比较，可以发现两种方法得到的位移与应力吻合良好。

关键词：弹性力学，正交各向异性，平面应变，裂纹，单元模型

中图分类号： O343.8　　　**文献标识码：**B

Solution of plane strain problems based on a new model

KE Jiang

(*School of Civil Engineering and Architecture, Shaanxi University of Technology, Hanzhong 723001, China*)

Abstract: For orthotropic plane strain problems, the various existing calculation methods are very complex. The orthotropic plane strain problem with cracks have solved by using a new element model, and compared with the finite element method, it can be found that the displacements and the stresses of the two methods are in good agreement.

Key words: Elasticity, orthotropic, plane strain, crack, element model

弹性力学的研究对象主要包括各向同性体，横观各向同性体与正交各向异性体。任何一个实际的弹性力学问题都是空间问题，但是，当所考察的弹性体具有特殊的形状及承受特殊的外力时，就可以把空间问题简化为平面问题，弹性力学平面问题可分为平面应力问题和平面应变问题。弹性力学传统的求解方法包括解析法、有限元法、边界元法、差分法、无网格法等，但这些方法都很复杂，需要掌握很多晦涩难懂的数学知识[1-2]。笔者基于广义虎克定律和叠加原理，提出了一个新单元模型，在文献[3]的新单元模型适用于任意的正交各向异性线弹性材料，在文献[4]和文献[5]的新单元模型分别适用于特殊的正交各向异性线弹性材料和特殊的各向同性线弹性材料，都属于文献[3]的特例。新单元模型是一个简单桁架，对应于空间问题就是一个长方体形状的空间桁架，对应于平面应力问题和平面应变问题就是一个矩形的平面桁架，把固体看成由许多桁架单元组成，这样固体就变成了一个桁架结构，然后采用任何一个可以计算桁架结构的程序来计算这个桁架结构，通过极简单的方法就可以得到固体内任意一点的应力、应变、位移，其应力应变的确定方法见文献[6]。文献[7]验证了新模型在正交各向异性平面应力问题的应用，本文将通过一个带裂纹的正交各向异性的平面应变问题来验证新单元模型。

1　一个带裂纹的正交各向异性的平面应变问题

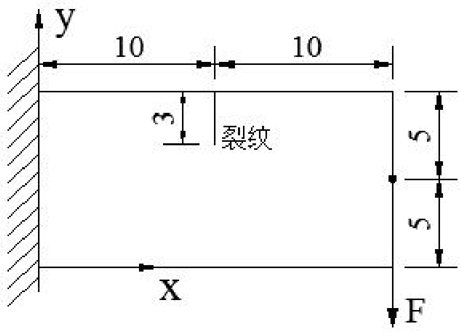


图 1　带裂纹的正交各向异性的平面应变问题

一个带裂纹的正交各向异性的平面应变问题(图 1)，长度 L=20mm，高度 H=10mm，厚度 t=1mm，左端固定，在顶边的中点向下有一个长度为 3 mm 的竖直裂纹，在自由端的中点承受一竖直向下的集中力 F=2000N，弹性模量 E_1=20000 N/mm^2，E_2=18000 N/mm^2，E_3=15000 N/mm^2，泊松比 v_{12}=0.15，v_{13}=0.2，v_{23}=0.25，剪切模量 G_{12}=5080.6N/mm^2。

采用 Abaqus 软件，通过有限元法与新单元法分别计算该平面应变问题。有限元计算模型采用平面应变单元 CPE4，单元在 x，y 方向的尺寸均为 1mm，由 200 个平面应变单元组成；新单元模型如图 2 所示，在 x，y 方向的尺寸与平面应变单元相同，由 6 根杆件组成，杆件采用桁架单元 T2D2，所有杆件的弹性模量均为 E=20000 N/mm^2，三种杆件的截面面积分别为：A_1= A_{12}= A_{43}=0.4325 mm^2 ，A_2= A_{14}=

$A_{23}=0.3883\ mm^2$，$A_3= A_{13}= A_{24}=0.3593\ mm^2$，由新单元组成的桁架结构计算模型一共包含200个新单元，即包含 200×6=1200 个桁架单元（若将相邻新单元的相邻杆件合并，即相邻杆件的截面面积相加，则只有 833 个桁架单元，其计算结果与未合并时完全一致）。

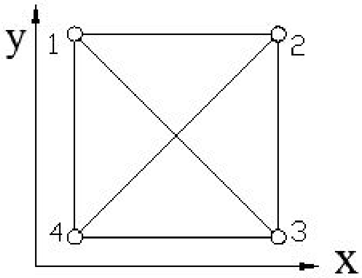
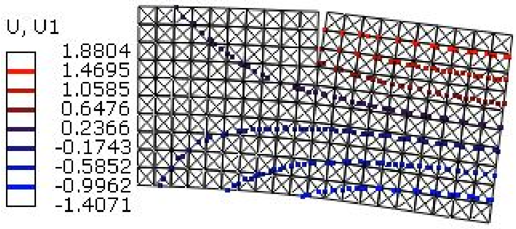


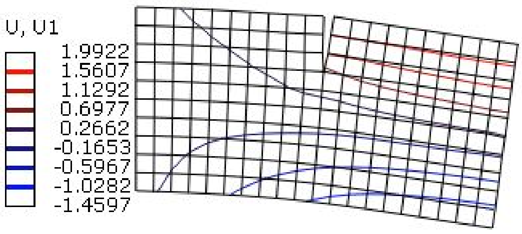
图 2　新单元模型

2　新单元法与有限元法的计算对比

Abaqus软件具有强大而又方便的后处理功能，分别采用新单元模型与平面应变单元模型计算该带裂纹的正交各向异性的平面应变问题，得到的位移等值线如图3、4所示，以及两种方法的计算结果见表1-5。笔者也采用Ansys软件，分别采用新单元模型与平面应变单元模型计算该平面应变问题，其计算结果与Abaqus软件完全一致，但Ansys软件无法绘制图3与图4中的新单元法的位移等值线。Abaqus计算模型也可以通过Ansys计算模型导入，方法为：Ansys建好模型后，通过preprocessor/archive model/write，保存为cdb文件，然后在Abaqus通过import model导入。

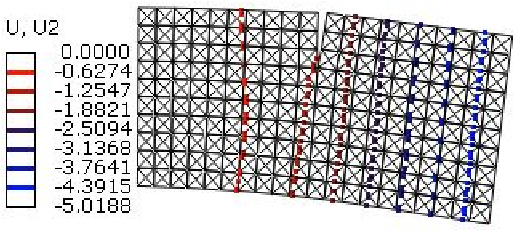


(a) 新单元法

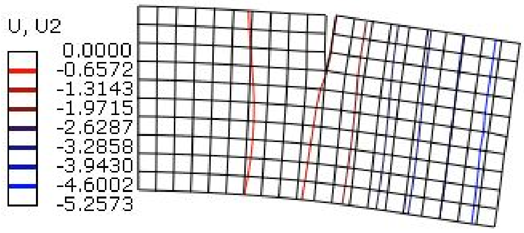


(b) 有限元法

图 3　平面应变问题的 X 方向位移等值线(mm)



(a) 新单元法



(b) 有限元法

图 4　平面应变问题的 Y 方向位移等值线(mm)

表 1 两种方法的 X 方向位移对比

考察点的坐标(x,y)/mm	UX/mm 新单元法	有限元法	偏差
(3,7)	0.1174	0.1186	-1.01%
(10,2)	-0.5327	-0.5471	-2.63%
(10,5)	0.1088	0.1239	-12.19%
(10,7)	0.5325	0.5685	-6.33%
(10,10)左侧点	0.5991	0.5895	1.63%
(10,10)右侧点	1.8427	1.9705	-6.49%
(17,7)	0.8397	0.9052	-7.24%
(20,0)	-1.4071	-1.4591	-3.56%

表 2 两种方法的 Y 方向位移对比

考察点的坐标(x,y)/mm	UY/mm 新单元法	有限元法	偏差
(3,7)	-0.2232	-0.2279	-2.06%
(10,2)	-1.4250	-1.4575	-2.23%
(10,5)	-1.3669	-1.3985	-2.26%
(10,7)	-1.2871	-1.2956	-0.66%
(10,10)左侧点	-1.2207	-1.2292	-0.69%
(10,10)右侧点	-1.2885	-1.3105	-1.68%
(17,7)	-3.8103	-3.9533	-3.62%
(20,0)	-4.8585	-5.0493	-3.78%

表 3 两种方法的正应力 σ_x 对比

考察点的坐标(x,y)/mm	σ_x/ N/mm² 新单元法	有限元法	偏差
(3,7)	855.24	868.26	-1.50%
(10,2)	-910.92	-945.04	-3.61%
(10,5)	303.71	332.58	-8.68%
(10,7)	2601.69	1894.89	37.30%
(17,7)	264.55	276.17	-4.21%

表 4 两种方法的正应力 σ_y 对比

考察点的坐标(x,y)/mm	σ_y/ N/mm² 新单元法	有限元法	偏差
(3,7)	-44.15	-50.90	-13.26%
(10,2)	109.49	110.44	-0.86%
(10,5)	554.66	570.82	-2.83%
(10,7)	1461.66	478.98	205.16%
(17,7)	-72.73	-90.41	-19.56%

表 5 两种方法的剪应力 τ_{xy} 对比

考察点的坐标(x,y)/mm	τ_{xy}/ N/mm² 新单元法	有限元法	偏差

(3,7)	-303.41	-309.24	-1.89%
(10,2)	-200.92	-199.25	0.84%
(10,5)	-311.09	-314.82	-1.18%
(10,6)	-304.33	-308.22	-1.26%
(17,7)	-180.39	-178.12	1.27%

由图 3、4 可知，新单元法与有限元法得到的该带裂纹平面应变问题的位移等值线非常吻合。由表 1-5 可知，两种方法的位移、应力计算结果吻合良好，其中，在裂纹尖端(10,7)点两种方法的正应力相差很大，显然新单元法解的精度更高，因为该点的正应力理论值应为无穷大；本文未给出应变计算结果，但两种方法的应变计算结果，显然也会吻合良好，因为应变可根据广义虎克定律由应力计算得出。

如果采用新单元法与有限元法计算时，减小单元尺寸会使两种方法得到的解更接近，因为新单元法与有限元法一样，单元尺寸趋于 0 时则趋于精确解。对于新单元法，当新单元尺寸趋于 0 时，弹性体的位移、应变及应力则趋于精确解，这是因为根据受力变形等效建立新单元模型时，对应的正六面体单元表面的应力是均匀的，而从弹性体任意取出的正六面体单元一般只有当其尺寸无穷小时其表面的应力才是均匀的；也就是说，当新单元尺寸取为一有限值时，从弹性体取出的同样尺寸的对应正六面体单元表面的应力一般是不均匀的，故这两种单元就不是完全等效而是近似等效，当新单元尺寸趋于 0 时，这两种单元就趋于完全等效，这样新单元法就趋于精确解。

3 结语

弹性力学的各种求解方法都有优缺点，新单元法也不例外，新单元模型是规则的矩形的平面桁架或者是长方体形状的空间桁架，这样对于求解不规则的边界问题，虽然可以通过减小单元尺寸来近似模拟，但价值就不大了，当然，工程中也存在大量的具有规则边界的弹性力学问题，比如一般房屋建筑的梁、柱、板等。对于既带裂纹又是正交各向异性的弹性力学问题，现有的各种计算方法都异常复杂，而根据正交各向异性的固体新单元模型来求解却非常简单。

参考文献

[1] 王敏中，王炜，武际可. 弹性力学教程[M]. 北京：北京大学出版社，2002.
[2] 沈观林，胡更开. 复合材料力学[M]. 北京：清华大学出版社，2006.
[3] KE Jiang. A New Model of Orthotropic Bodies [C]. Applied Mechanics and Materials, August, 2012, Vols.204-208: 4418-4421.
[4] 柯江. 弹性固体的新单元模型[J]. 山西建筑，2012,38(19):58-59.
[5] 柯江. 实体结构求解的新方法[J]. 山西建筑，2008，34(9):112-113.
[6] 柯 江. 基于固体新单元模型分析理想弹塑性问题[J]. 山西建筑，2012,38(36):42-43.
[7] 柯江. 正交各向异性新模型在平面应力问题中的应用[J]. 山西建筑,2013,39(19):18-20.