Esercizio 2-1

Data una sezione rettangolare 60x100 mm soggetta ad uno sforzo normale N =- 60000 N calcolare la tensione normale sulla sezione

Soluzione

La formula da utilizzare è σ_{zz} = N/S, dove l'area S della sezione risulta essere S = 60 x 100 = 6000 mm^2 . Si ricava quindi:

$$\sigma_{zz} = \frac{N}{S} = \frac{-60000}{6000} = -10\ \mathrm{MPa}$$

N.B. $1\ \mathrm{Nm} = 1000\ \mathrm{Nmm};\quad 1\frac{N}{m^2} = 1\ \mathrm{Pa};\quad 1\frac{N}{mm^2} = 1\ \mathrm{MPa}$

Esercizio 2-2

Calcolare la tensione normale in una sezione circolare di diametro Ø 60 mm soggetta ad uno sforzo normale N = 50000 N.

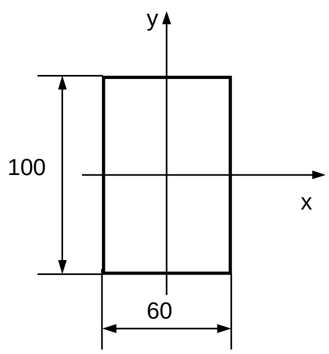
Soluzione

L'area della sezione circolare vale: $$S = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \cdot 60^2}{4} \cong 2827\ \mathrm{mm}^2$$

Da cui risulta una tensione normale: $$\sigma_{zz} = \frac{N}{S} = \frac{50000}{2827} \cong 18\ \mathrm{MPa}$$

Si noti che i valori delle tensioni espressi in MPa vengono usualmente arrotondati all'unità, in quanto non ha senso fisico una precisione maggiore.

Esercizio 2-3



Data la sezione rettangolare in figura soggetta ad un momento flettente M_x= 12000 Nm:
a) Calcolare le tensioni minima e massima.
b) Calcolare la tensione nel punto di coordinate (20,30).
c) Tracciare l'andamento delle sollecitazioni lungo la sezione.
d) Calcolare le deformazioni massime e minime in direzione z.
e) Calcolare la lunghezza finale dei lati della sezione paralleli all'asse x

Si assuma un modulo elastico E = 200000 MPa e un coefficiente di Poisson ν = 0.3

Soluzione

domanda a)

Si utilizzano le formule: $\sigma_{zz\,max} = \frac{M_x}{W_f}$ $\sigma_{zz\,min} = -\frac{M_x}{W_f}$

Il modulo di resistenza a flessione W_f vale:

$$W_f = \frac{bh^2}{6} = \frac{60 \cdot 100^2}{6} = 10^5 \text{ mm}^3$$

da cui

$$\sigma_{zz\,max} = \frac{M_x}{W_f} = \frac{12 \cdot 10^6}{10^5} = 120 \text{ MPa} \qquad \sigma_{zz\,min} = -\frac{M_x}{W_f} = -\frac{12 \cdot 10^6}{10^5} = -120 \text{ MPa}$$

domanda b)

Si utilizza la formula $\sigma_{zz} = \frac{M_x}{J_{xx}} y$. Il momento d'inerzia rispetto all'asse x vale:

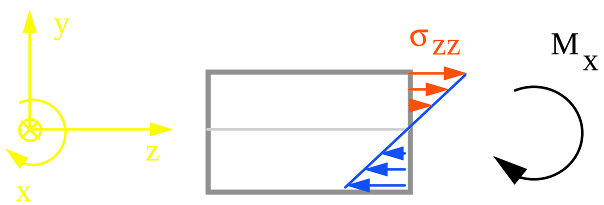
$$J_{xx} = \frac{bh^3}{12} = \frac{60 \cdot 100^3}{12} = 5 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

da cui , per il punto p(20,30) si ottiene:

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{J_{xx}} y = \frac{12 \cdot 10^6}{5 \cdot 10^6} 30 = 72 \text{ MPa}$$

Si noti che in tutti i punti che distano 30 mm dall'asse x vi è una tensione normale che vale 72 MPa.

domanda c)



L'andamento nella sezione è triangolare lungo l'asse y e la tensione e costante per valori di y costanti.

domanda d)

Ricordiamo la legge di Hooke:

$$E\varepsilon_{xx} = \sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \qquad E\varepsilon_{yy} = \sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \qquad E\varepsilon_{zz} = \sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

$$G\gamma_{xy} = \tau_{xy} \qquad G\gamma_{xz} = \tau_{xz} \qquad G\gamma_{yz} = \tau_{yz}$$

nel nostro caso σ_{xx}, σ_{yy} e τ_{ij} sono nulle, quindi:

$$E\varepsilon_{zz} = \sigma_{zz} \Rightarrow \begin{array}{l} \varepsilon_{zz\max} = \dfrac{\sigma_{zz\max}}{E} = \dfrac{120}{2 \cdot 10^5} = 6 \cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_{zz\min} = \dfrac{\sigma_{zz\min}}{E} = \dfrac{-120}{2 \cdot 10^5} = -6 \cdot 10^{-4} \end{array}$$

domanda e)

La lunghezza finale dei lati viene calcolata con la formula $l_f = l_i \cdot (1+\varepsilon_{xx})$. I lati di nostro interesse sono posti a y = 50 mm e y = -50 mm. In entrambi i casi la lunghezza iniziale è di 60 mm.

Calcoliamo le deformazioni ε_{xx} per i valori di y estremi. Dalla legge di Hooke troviamo:

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{\nu\sigma_{zz}}{E} \Rightarrow \begin{array}{l} \varepsilon_{xx}(y=50) = -\nu\dfrac{\sigma_{zz\max}}{E} = -0.3\dfrac{120}{2 \cdot 10^5} = -1.8 \cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_{xx}(y=-50) = \dfrac{\sigma_{zz\min}}{E} = -0.3\dfrac{-120}{2 \cdot 10^5} = 1.8 \cdot 10^{-4} \end{array}$$

Da cui:

$$l_f(y=50) = 60 \cdot \left(1 - 1.8 \cdot 10^{-4}\right) = 59.9892 \text{ mm}$$

$$l_f(y=-50) = 60 \cdot \left(1 + 1.8 \cdot 10^{-4}\right) = 60.0108 \text{ mm}$$

Si vede che le variazioni di dimensione della sezione sono del tutto trascurabili!!!!

Esercizio 2-4

Si ripeta l'esercizio 3 (domande a e b) considerando la sola presenza di un momento flettente My = 12000 Nm

Soluzione

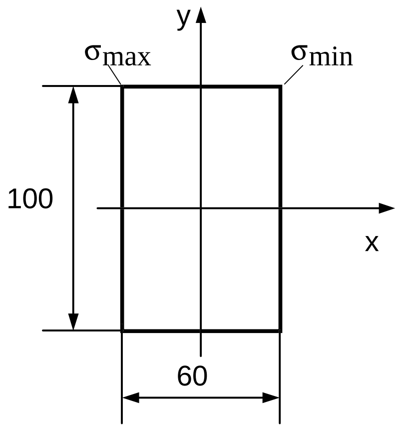
domanda a)

Si utilizzano le formule: $\sigma_{zz\max} = \dfrac{M_y}{W_f}$ $\qquad \sigma_{zz\min} = -\dfrac{My}{W_f}$

Il modulo di resistenza a flessione W_f in questo caso vale:

$$W_f = \frac{bh^2}{6} = \frac{100 \cdot 60^2}{6} = 6 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

dove con h si intende l'altezza della sezione e con b la sua larghezza rispetto al momento applicato.



Le tensioni massima e minima valgono quindi:

$$\sigma_{zz\,max} = \frac{M_x}{W_f} = \frac{12 \cdot 10^6}{6 \cdot 10^4} = 200 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{zz\,min} = -\frac{M_x}{W_f} = -\frac{12 \cdot 10^6}{6 \cdot 10^4} = -200 \text{ MPa}$$

In questo caso la tensione massima è nel lato delle x negative, mentre la tensione minima è nel lato delle x positive (a causa del verso positivo preso per il momento M_y)

domanda b)

Si utilizza la formula $\sigma_{zz} = -\frac{M_y}{J_{yy}} x$. Il momento d'inerzia rispetto all'asse y vale:

$$J_{yy} = \frac{bh^3}{12} = \frac{100 \cdot 60^3}{12} = 1.8 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

dove con h si intende l'altezza della sezione e con b la sua larghezza rispetto al momento applicato.
Per il punto p(20,30) si ottiene:

$$\sigma_{zz} = -\frac{M_y}{J_{yy}} x = -\frac{12 \cdot 10^6}{1.8 \cdot 10^6} 20 = -133 \text{ MPa}$$

In tutti i punti che distano 20 mm dall'asse y vi è una tensione normale che vale -133 MPa.

Esercizio 2-5

Una sezione circolare di diametro Ø 60 mm è soggetta ad un momento flettente M = 10000 Nm. Calcolare le tensioni minima e massima.
Il modulo di resistenza a flessione della sezione vale:

$$W_f = \frac{\pi D^3}{32} = \frac{\pi \cdot 60^3}{32} \cong 21206 \text{ mm}^3$$

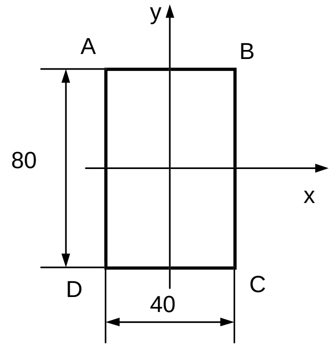
e le tensioni massime e minime:

$$\sigma_{zz\,max} = \frac{M_x}{W_f} = \frac{10^7}{21206} \cong 472 \text{ MPa} \qquad \sigma_{zz\,min} = -\frac{M_x}{W_f} = -\frac{10^7}{21206} \cong -472 \text{ MPa}$$

Queste tensioni si riscontrano agli estremi del diametro ortogonale a quello attorno al quale agisce il momento flettente.

Esercizio 2-6

Data la sezione rettangolare in figura calcolare le tensioni normali nei quattro spigoli dovute alla presenza contemporanea dei momenti flettenti M_x = 10000 Nm, M_y = -4000 Nm e di uno sforzo normale N = 64 kN.



Soluzione

Nei quattro punti di interesse, A (-20,40), B(20,40), C(20,-40), D(-20,-40) si applica la formula

$$\sigma_{zz} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_{xx}} y - \frac{M_y}{J_{yy}} x$$

dove A = 80 x 40 = 3200 mm^2 è l'area della sezione, J_{xx} e J_{yy} sono i momenti d'inerzia della sezione e valgono:

$$J_{xx} = \frac{bh^3}{12} = \frac{40 \cdot 80^3}{12} = 1.706.667 \text{ mm}^4 \qquad J_{yy} = \frac{hb^3}{12} = \frac{80 \cdot 40^3}{12} = 426.667 \text{ mm}^4$$

risulta quindi:

$$\text{A} \quad \sigma = \frac{64000}{3200} + \frac{1 \cdot 10^7}{1706667}(40) - \frac{-4 \cdot 10^6}{426667}(-20) \quad = (20 + 234 - 188) \quad = 67 \text{ MPa}$$

$$\text{B} \quad \sigma = \frac{64000}{3200} + \frac{1 \cdot 10^7}{1706667}(40) - \frac{-4 \cdot 10^6}{426667}(20) \quad = (20 + 234 + 188) \quad = 442 \text{ MPa}$$

$$\text{C} \quad \sigma = \frac{64000}{3200} + \frac{1 \cdot 10^7}{1706667}(-40) - \frac{-4 \cdot 10^6}{426667}(20) \quad = (20 - 234 + 188) \quad = -27 \text{ MPa}$$

$$\text{D} \quad \sigma = \frac{64000}{3200} + \frac{1 \cdot 10^7}{1706667}(-40) - \frac{-4 \cdot 10^6}{426667}(-20) \quad = (20 - 234 - 188) \quad = -402 \text{ MPa}$$

Esercizio 2-7

Data una sezione circolare di diametro ∅ 50 mm soggetta ai momenti flettenti M_x = -5000 Nm e M_y = 3000 Nm. Calcolare la tensione massima e minima nella sezione.

Soluzione

Poiché siamo in presenza di una sezione circolare, per la quale tutti i diametri sono assi principali d'inerzia, conviene calcolare il momento flettente complessivo agente sulla sezione:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{(-5000)^2 + 3000^2} = 5831\,\text{Nm}$$

Per ottenere le tensioni massima e minima il momento complessivo deve essere diviso per il modulo di resistenza a flessione:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_f} = \frac{32 \cdot M}{\pi \cdot D^3} = \frac{32 \cdot 5.831 \cdot 10^6}{\pi D^3} = 475\,\text{MPa}; \quad \sigma_{min} = -\sigma_{max} = -475\,\text{MPa}$$

Esercizio 2-8

Data la sezione in figura 1 calcolare la posizione del baricentro, l'inclinazione del sistema di riferimento principale rispetto ai lati della figura e i valori dei momenti d'inerzia principali.

Soluzione

La prima operazione è quella di definire un sistema di riferimento generico (a,b) e suddividere la sezione in figure elementari individuandone le dimensioni e la posizione del baricentro (figura 2).

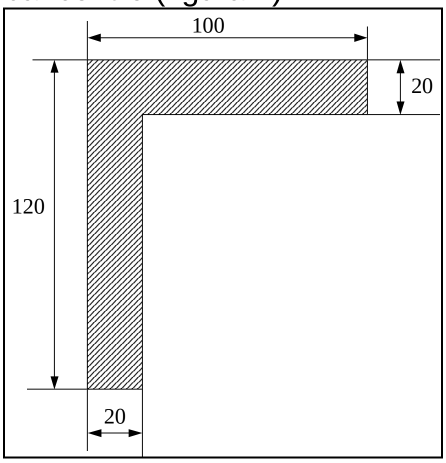


Figura 1

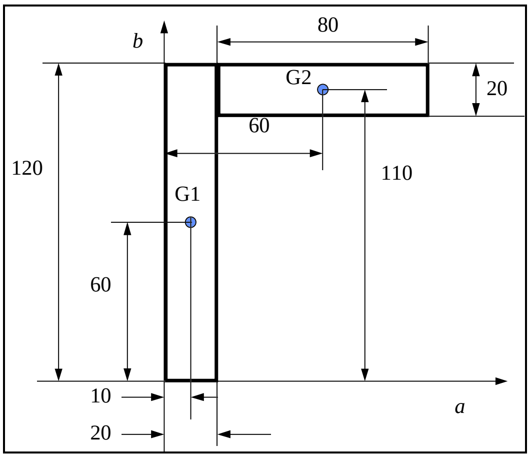


Figura2

I risultati ottenuti con un foglio di calcolo eXell dall'applicazione delle formule prima descritte sono i seguenti:

Dimensioni (mm)								
h1=	120	d1=	60					
b1=	20	f1=	10					
h2=	20	d2=	110					
b2=	80	f2=	60					
Aree (mm^2)			Momenti inerzia baricentrici (mm^4)					
S(1)=	2400		$J_{xx}(1)$=	2880000	$J_{yy}(1)$=	80000	$J_{xy}1$=	0
S(2)=	1600		$J_{xx}(2)$=	53333	$J_{yy}(2)$=	853333	$J_{xy}2$=	0
S=	4000							
Momenti Statici Totali (mm^3)			Posizione baricentro (mm)					
Sa=	320000		a_G=	30				
Sb=	120000		b_G=	80				
Distanze baricentri locali da baricentro tot. (mm)								
$d1_G$=	-20	$f1_G$=	-20					
$d2_G$=	30	$f2_G$=	30					
Momenti rispetto agli assi AB (baricentrici) (mm^4)								
$J_{AA}(1)$=	3840000		$J_{BB}(1)$=	1040000		$J_{AB}(1)$=	960000	
$J_{AA}(2)$=	1493333		$J_{BB}(2)$=	2293333		$J_{AB}(2)$=	1440000	
J_{AA}=	5333333		J_{BB}=	3333333		J_{AB}=	2400000	
Inclinazione assi principali								
tan2α=	2.4		α (rad)=	0.588		α (°)=	33.7	
Momenti d'inerzia principali			(mm^4)					
J_{XX}=	6933333							
J_{YY}=	1733333							

Esercizio 2-9

Data una sezione circolare piena di diametro 70 mm soggetta a un momento torcente M_z = 5000 Nm calcolare:

a) il valore della tensione tangenziale massima;

b) il valore della tensione tangenziale sulla circonferenza di diametro 55 mm;

c) le componenti della tensione tangenziale τ_{zx} e τ_{zy} in un punto di coordinate (-24,18) nel sistema di riferimento baricentrico.

Soluzione

domanda a)

Il modulo di resistenza a torsione per la sezione è:

$$W_t = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{\pi \cdot 70^3}{16} = 67348 \text{ mm}^3$$

La tensione tangenziale massima sarà dunque pari a:

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{W_t} = \frac{5000000}{67348} = 74 \text{ MPa}$$

Questa tensione agisce su tutti i punti esterni della sezione in direzione tangenziale alla circonferenza.

domanda b)

Il momento d'inerzia della sezione vale:

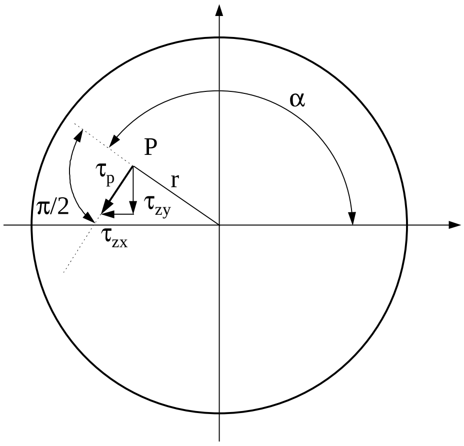
$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi \cdot 70^4}{32} = 2.357.176 \text{ mm}^4$$

La tensione tangenziale sulla circonferenza di diametro 55 mm (r = 22.5 mm) vale:

$$\tau_r = \frac{M_z}{J_p} r = \frac{5.000.000}{2.357.176} 22.5 = 58 \text{ MPa}$$

Anche questa tensione agisce in tutti i punti che distano dal centro 22.5 mm (il raggio della circonferenza considerata) in direzione tangenziale alla circonferenza stessa (cioè ortogonalmente al raggio).

domanda c)



Il punto P (-24,18) si trova ad una distanza dal centro r:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 30 \text{ mm}$$

La tensione τ_P agente in quel punto varrà quindi:

$$\tau_r = \frac{M_z}{J_p} r = \frac{5.000.000}{2.357.176} 30 = 64 \text{ MPa}$$

La tensione tangenziale agisce perpendicolarmente al segmento r che forma con l'asse x un angolo α:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(-\frac{18}{24}\right) = 2.5 \text{ rad} = 143.1°$$

(attenzione, siamo nel secondo quadrante.....)

Le componenti della tensione tangenziale τ_{zx} e τ_{zy} lungo gli assi x e y sono le proiezioni di τ_P sugli assi:

$$\tau_{zx} = \tau_P \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -38 \text{ MPa} \qquad \tau_{zy} = \tau_P \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -51 \text{ MPa}$$

Esercizio 2-10

Data una sezione circolare cava con diametro esterno D = 70 mm e diametro interno d=50 mm soggetta a un momento torcente M_z = 5000 Nm calcolare:

a) il valore della tensione tangenziale massima;
b) il valore della tensione tangenziale sulla circonferenza di diametro 55 mm;
c) le componenti della tensione tangenziale τ_{zx} e τ_{zy} in un punto di coordinate (-24,-18) nel sistema di riferimento baricentrico;

Soluzione

domanda a)

Il modulo di resistenza a torsione per la sezione è:

$$W_t = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{16D} = \frac{\pi\left(70^4 - 50^4\right)}{16 \cdot 70} = 49817\ \text{mm}^3$$

La tensione tangenziale massima sarà dunque pari a:

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{W_t} = \frac{5000000}{49817} \cong 100\ \text{MPa}$$

Questa tensione agisce su tutti i punti esterni della sezione in direzione tangenziale alla circonferenza esterna.

domanda b)

Il momento d'inerzia della sezione vale:

$$J_p = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{32} = \frac{\pi\left(70^4 - 50^4\right)}{32} = 1743584\ \text{mm}^4$$

La tensione tangenziale sulla circonferenza di diametro 55 mm (r = 22.5 mm) vale:

$$\tau_r = \frac{M_z}{J_p} r = \frac{5.000.000}{1.743.585} 22.5 \cong 79\ \text{MPa}$$

Anche questa tensione agisce in tutti i punti che distano dal centro 22.5 mm (il raggio della circonferenza considerata) in direzione tangenziale alla circonferenza stessa (cioè ortogonalmente al raggio).

domanda c)

Il punto P (-24,-18) si trova ad una distanza dal centro r:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 30\ \text{mm}$$

La tensione τ_r agente in quel punto varrà quindi:

$$\tau_r = \frac{M_z}{J_p} r = \frac{5.000.000}{1.743.584} 30 = 86\ \text{MPa}$$

La tensione tangenziale agisce perpendicolarmente al segmento r che forma con l'asse x un angolo α:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{18}{24}\right) = 3.8\ \text{rad} = 216.9°$$

(attenzione, siamo nel terzo quadrante.....)

Le componenti della tensione tangenziale τ_{zx} e τ_{zy} lungo gli assi x e y sono le proiezioni di τ_r sugli assi:

$$\tau_{zx} = \tau_P \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = 52\ \text{MPa} \qquad \tau_{zy} = \tau_P \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -69\ \text{MPa}$$

Esercizio 2-11

Sia data una barra a sezione circolare piena di diametro $D = 40$ mm, realizzata in 39NiCrMo3. Come sistema di riferimento si assumano gli assi x e y giacenti nel piano della sezione retta della barra e l'asse z coincidente con l'asse della barra. La barra è sollecitata da uno sforzo normale $N = 3{\cdot}10^4$ N, da un momento flettente $M_x = 500$ Nm, da un momento flettente $M_y = 450$ Nm e da un momento torcente $M_z = 850$ Nm costanti lungo l'asse.

Tracciare i cerchi di Mohr e determinare le tensioni principali e la tensione ideale in un punto sulla superficie della barra

Tracciare i cerchi di Mohr e determinare le tensioni principali e la tensione ideale in un punto al centro della barra

Calcolare il coefficiente di sicurezza contro lo snervamento e contro la rottura duttile.

Soluzione

Punto sulla superficie esterna

La barra è soggetta a uno sforzo normale N, a due momenti flettenti, che si compongono vettorialmente nel momento flettente totale:

$$M_f = \sqrt{M_x^{\,2} + M_y^{\,2}} = 673\ \text{Nm}$$

e a un momento torcente M_z.

Lo sforzo normale N agisce lungo l'asse z e genera, nella generica sezione trasversale, una tensione normale con distribuzione costante pari a:

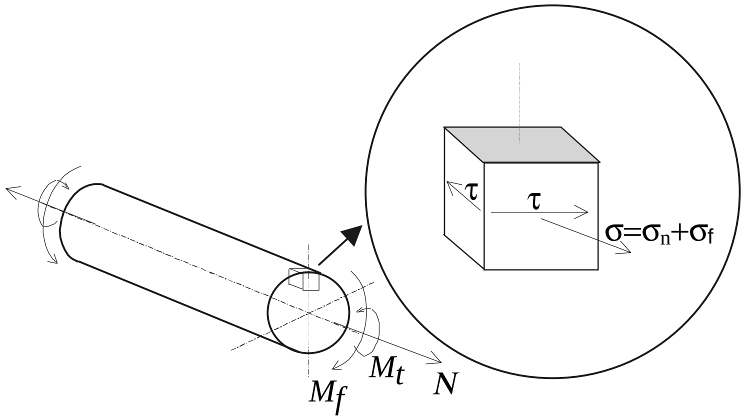
$$\sigma_{zz} = \sigma_n = \frac{N}{A} = 24\ \text{MPa} \qquad \text{con} \qquad A = \frac{\pi D^2}{4}$$

il momento flettente totale M_f agisce intorno ad un asse angolato rispetto agli assi x e y della sezione trasversale e genera, nella generica sezione trasversale, una tensione normale con distribuzione "a farfalla" (cioè simmetrica e variabile linearmente lungo l'asse della sezione), massima sulla periferia della barra e pari a:

$$\sigma_{zz} = \sigma_f = \frac{M_f}{W_f} = 107\ \text{MPa} \qquad \text{con} \qquad W_f = \frac{\pi D^3}{32}$$

il momento torcente M_z agisce intorno all'asse z e genera, nella generica sezione trasversale, una tensione tangenziale con distribuzione "a farfalla" (cioè simmetrica e variabile linearmente lungo l'asse della sezione), massima sulla periferia della barra :

$$\tau_{zx}=\tau_{zy}=\tau=\frac{M_z}{W_t}=68\ \text{MPa} \quad \text{con} \quad W_t=\frac{\pi D^3}{16}\ .$$



Su un cubetto elementare in un punto appartenente alla periferia della barra si tracciano le tensioni applicate.
La tensione normale in direzione z è la somma delle tensioni dovute allo sforzo normale e alla flessione:

$$\sigma=\sigma_n+\sigma_f=24+107=131\ \text{MPa}$$

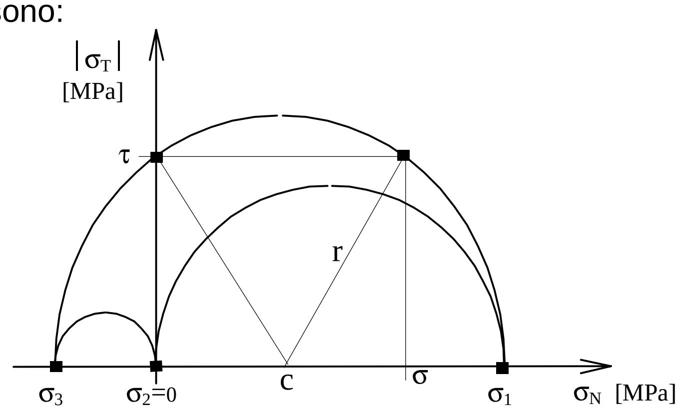
Si noti che nel punto diametralmente opposto la tensione di flessione è negativa (-107 MPa) e quindi la tensione risultante vale

$$\sigma=\sigma_n+\sigma_f=24-107=-83\ \text{MPa}$$

Il punto più sollecitato è quindi quello in trazione.
Sulla faccia colorata in grigio non agisce alcuna tensione tangenziale: la direzione perpendicolare a tale faccia è principale e la tensione normale associata è principale. In particolare questa tensione principale è nulla. Lo stato di tensione è biassiale:

$$\sigma_1=c+r==160\ \text{MPa},\quad \sigma_2=0\ \text{MPa},$$
$$\sigma_3=c-r=-29\ \text{MPa}.$$

I tre cerchi di Mohr sono:



Adottando l’ipotesi di rottura di von Mises (in questo caso può essere adottata nella forma senza le tensioni principali) si ottiene:

$$\sigma_{id} = \sqrt{(\sigma_n + \sigma_f)^2 + 3\tau^2} = 176 \text{ MPa}$$

Utilizzando questa formula per calcolare la tensione ideale non è necessario il calcolo delle tensioni principali, ma si ribadisce che questo è possibile perché nel punto di progetto agiscono una sola σ e una sola τ.

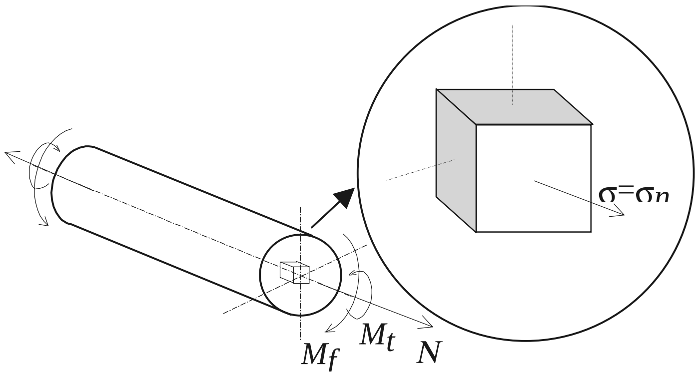
Punto al centro della barra

Su un cubetto elementare in un punto al centro della barra (dove è diversa da zero soltanto la tensione normale) si tracciano le tensioni applicate

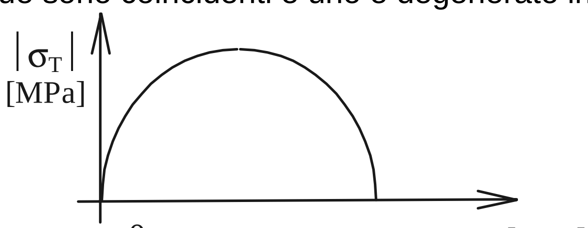
$$\sigma_{zz} = \sigma_n = \frac{N}{A} = 24 \text{ MPa}$$

.Sulle facce colorate in grigio non agiscono tensioni tangenziali: le direzioni perpendicolari a tali facce sono principali e le tensioni normali associate sono principali.
In particolare queste due tensioni principali sono nulle. Lo stato di tensione è monoassiale con l'unica tensione principale diversa da zero che è pari a:

$$\sigma_1 = \sigma_n = 24 \text{ MPa} .$$



Dei tre cerchi di Mohr due sono coincidenti e uno è degenerato in un punto nell'origine:



In questo caso la tensione ideale coincide, qualunque sia l'ipotesi adottata, con quella applicata.

Calcolo dei coefficienti di sicurezza

Il punto più sollecitato della sezione è quello sulla superficie esterna, dove la tensione ideale vale 176 MPa.

Il materiale presenta un carico unitario di rottura di 740 MPa, e un carico unitario di snervamento di 540 MPa.

Il coefficiente di sicurezza contro lo snervamento sarà quindi:

$$CS = \frac{R_{p02}}{\sigma_{id}} = \frac{540}{176} \approx 3.07$$

Il coefficiente di sicurezza contro la rottura sarà:

$$CS = \frac{R_m}{\sigma_{id}} = \frac{740}{176} \approx 4.20$$

Esercizio 2-12

Si abbia una sezione rettangolare 100 x 80 mm soggetta ad un momento torcente di 10.000 Nm. Calcolare il valore della tensione tangenziale massima.

Soluzione

Il fattore di rigidezza della sezione è dato da:

$$J_t = \frac{1}{3}(b - 0.6a)a^3 = \frac{1}{3}(100 - 0.6 \cdot 80) \cdot 80^3 = 8874667 \text{ mm}^4$$

Dove con b si è indicato il lato maggiore della sezione rettangolare.
La tensione tangenziale massima si ha in corrispondenza del punto medio del lato più lungo ad una distanza dal baricentro x=a/2 e viene calcolata con la formula:

$$|\tau_{zy}| = \frac{2M_z}{J_t} x = \frac{10000000}{8874667} 80 = 90 \text{ MPa}$$

Esercizio 2-13

Si abbia un tubo formato da una lamiera di spessore t=3 mm di sezione ellittica con semiassi, misurati all'esterno A=100 mm e B= 80 mm soggetto ad un momento torcente M_z di 2500 Nm
Calcolare il valore della tensione tangenziale media nello spessore.

Soluzione

Si può considerare la figura come cava a parete sottile. L'area racchiusa dalla linea media è quella di una elisse con semiassi a=(A-t) = 97 mm e b=(B-t) = 77 mm:

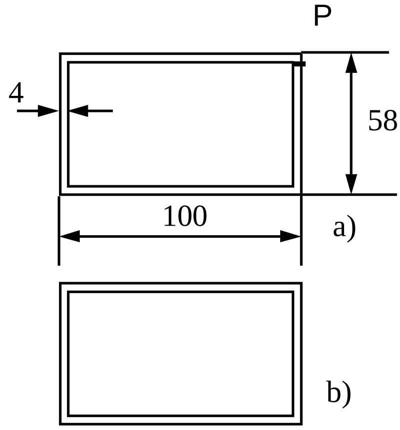
$$\Omega = \frac{\pi}{4} ab = \frac{\pi}{4} \cdot 97 \cdot 77 = 5866 \text{ mm}^2$$

La tensione tangenziale media nello spessore sarà dunque:

$$\tau = \frac{M_z}{2\Omega t} = \frac{2500000}{2 \cdot 5866 \cdot 3} = 71 \text{ MPa}$$

Esercizio 2-14

Le due sezioni illustrate in figura hanno dimensioni identiche ma nella prima (a) i lembi convergenti in P sono solo accostati, nella seconda (b) sono collegati per mezzo di una saldatura. Calcolare la massima tensione tangenziale in ciascuna delle due sezioni causata dall'applicazione di un momento torcente di $2 \cdot 10^5$ Nmm.



Soluzione a)

Si utilizzano le formule valide per le sezioni in parete sottile aperte. Il fattore di rigidezza a torsione totale J_t vale:

$$J_t = \sum J_{ti} = \sum \frac{1}{3} b_i a_i^3 = \frac{4^3}{3}(98 + 54 + 96 + 52) = 6400 \text{ mm}^4$$

dove con b_i sono indicate le lunghezze delle linee medie e con a gli spessori. la tensione risulta quindi di :

$$\left|\tau_{max}\right|_i = \frac{M_z}{J_t} a_i = \frac{200000}{6400} 4 = 125 \text{ MPa}$$

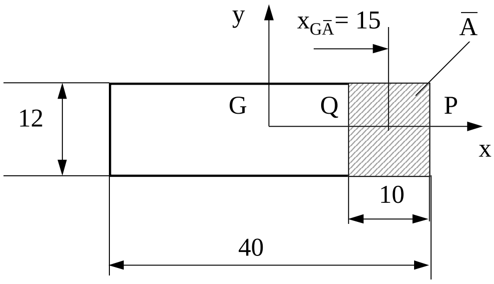
Soluzione b)

Si utilizza la formula valida per le sezioni in parete sottile chiuse:

$$\tau = \frac{M_z}{2\Omega t} = \frac{200000}{2 \cdot (96 \cdot 54) \cdot 4} \cong 5 \text{ MPa}$$

Esercizio 2-15

Si consideri una sezione rettangolare 12x40 mm in cui l'asse x è parallelo alla dimensione maggiore. La sezione è soggetta ad un momento flettente $M_y = -4.5 \cdot 10^5$ Nmm ed a un taglio $T_x = 1.3 \cdot 10^4$ N.
Calcolare le tensioni normali e tangenizli nei punti G(0,0), Q(10,0) e P(20,0)



Soluzione

punto G)

Nel punto G, che giace sull'asse baricentrico y, la tensione dovuta la momento flettente è nulla, mentre la tensione dovuta al taglio puo essere calcolata con la formula:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{T_x}{A} = \frac{3 \cdot 1.3 \cdot 10^4}{2 \cdot 12 \cdot 40} = 41\ \text{MPa}$$

punto Q)

Per questo punto è necessario utilizzare le formule generali:

$$\overline{\tau_{zx}} = \frac{T_x S_y}{J_{yy} c} \qquad\qquad \sigma_{zz} = -\frac{M_y}{J_{yy}} x$$

dove:

$$J_{yy} = \frac{bh^3}{12} = \frac{12 \cdot 40^3}{12} = 64000\ \text{mm}^4 \quad S_y = \bar{A} \cdot x_{G\bar{A}} = 12 \cdot 10 \cdot 15 = 1800\ \text{mm}^3 \quad c = 12\ \text{mm} \quad x = 10\ \text{mm}$$

si ottengono quindi i seguenti valori:

$$\overline{\tau_{zx}} = \frac{T_x S_y}{J_{yy} c} = \frac{1.3 \cdot 10^4 \cdot 1800}{64 \cdot 10^3 \cdot 12} \cong 30\ \text{MPa} \qquad \sigma_{zz} = -\frac{M_y}{J_{yy}} x = \frac{4.5 \cdot 10^5}{64 \cdot 10^3} 10 \cong 70\ \text{MPa}$$

punto P)

In tale punto la tensione tangenziale dovuta al taglio è nulla, mentre la tensione normale vale:

$$\sigma_{zz} = -\frac{M_y}{W_f} = -\frac{6 \cdot M_y}{b \cdot h^2} = -\frac{6 \cdot \left(-4.5 \cdot 10^5\right)}{12 \cdot 40^2} = 141\ \text{MPa}$$

(il segno meno dipende dal sistema di riferimento scelto, si veda la scheda relativa alle tensioni dovute al momento flettente).

Esercizio 2-16

Si abbia una sezione circolare di diametro ∅ = 46 mm soggetta ad un taglio T_y = 3000 N ed un taglio T_x = 4000 N. Calcolare la massima tensione tangenziale dovuta al taglio.

Soluzione

Grazie alla simmetria della sezione, analogamente a quanto visto per il momento flettente, conviene riferirsi al taglio complessivo:

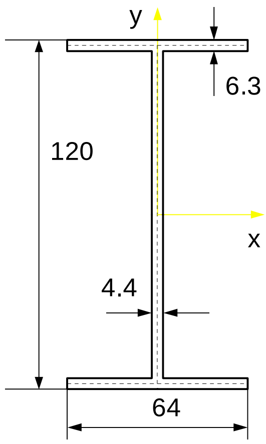
$$T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} = \sqrt{3000^2 + 4000^2} = 5000\ \mathrm{N}$$

La tensione tangenziale massima risulta:

$$\tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{T}{A} = \frac{4}{3}\cdot\frac{4\cdot 5000}{\pi\cdot 50^2} \cong 4\ \mathrm{MPa}$$

Esercizio 2-17

La figura mostra lo schema di una sezione di un profilato IPE 120 UNI 5398 realizzato in Fe 360 (tensione ammissibile σ_{am}= 160 MPa, tensione tangenziale ammissibile τ_{am}= 80 MPa). Supponendo che ogni caratteristica di sollecitazione agisca separatamente determinare i massimi valori sopportabili per i momenti flettenti M_x e M_y, e per i tagli T_x e T_y.



Soluzione

Da un qualunque manuale, o utilizzando la geometria delle aree, è possibile ricavare i dati geometrici della sezione:

$$A = 1.32\cdot 10^3\ \mathrm{mm}^2 \qquad J_{xx} = 3.18\cdot 10^6\ \mathrm{mm}^4 \qquad J_{yy} = 2.77\cdot 10^5\ \mathrm{mm}^4$$

I massimi valori dei momenti flettenti si ricavano utilizzando le formule gà viste; supponendo che agisca il solo momento M_x:

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{J_{xx}} y_{max} \le \sigma_{am} \Rightarrow M_{x\,max} = \frac{\sigma_{am} J_{xx}}{y_{max}} = \frac{160\cdot 3.18\cdot 10^6}{60} = 8.48\cdot 10^6\ \mathrm{Nmm}$$

Analogamente, supponendo che agisca il solo momento M_y:

$$\sigma_{max} = -\frac{M_y}{J_{yy}} x_{max} \le \sigma_{am} \Rightarrow \left|M_{x\,max}\right| = \frac{\sigma_{am} J_{yy}}{x_{max}} = \frac{160\cdot 2.77\cdot 10^6}{32} = 1.385\cdot 10^6\ \mathrm{Nmm}$$

Per quanto riguarda i tagli si fa riferimento alle figure viste in precedenza; per il taglio T_y, per il quale la massima tensione tangenziale si ha in corrispondenza del baricentro:

$$\tau_{max} = \frac{T_y}{s_2 J_{xx}}\left(\frac{bs_1 h}{2} + \frac{s_2 h^2}{8}\right) \le \tau_{am} \Rightarrow T_{y\,max} = \frac{\tau_{am} s_2 J_{xx}}{\left(\frac{bs_1 h}{2} + \frac{s_2 h^2}{8}\right)} = \frac{80 \cdot 4.4 \cdot 3.18 \cdot 10^6}{\left(\frac{64 \cdot 6.3 \cdot 113.7}{2} + \frac{4.4 \cdot 113.7^2}{8}\right)} \cong 3.73 \cdot 10^4 \text{ N}$$

mentre per il taglio T_x, per il quale la massima tensione tangenziale si ha all'incrocio fra le ali e l'anima:

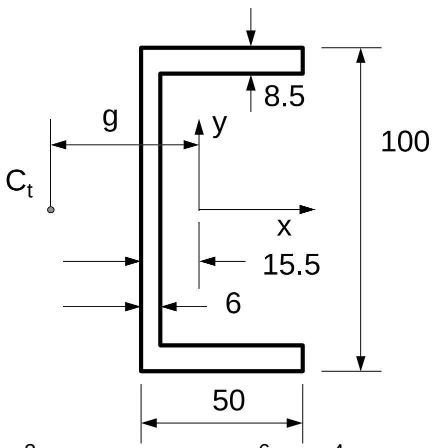
$$\tau_{max} = \frac{T_x b^2}{8 J_{yy}} \le \tau_{am} \Rightarrow T_{x\,max} = \frac{8 J_{yy} \tau_{max}}{b^2} = \frac{8 \cdot 2.77 \cdot 10^5 \cdot 80}{64^2} \cong 4.33 \cdot 10^4 \text{ N}$$

Esercizio 2-18

La sezione di un profilato a **U** 100 UNI 5680 schematizzata in figura viene sollecitata da un taglio T_y = 10 kN. Valutare :

a) la posizione del centro di taglio;
b) le massime tensioni tangenziali causate dal taglio nell'anima e nelle piattabande;
c) le tensioni aggiuntive che si producono nell'anima e nelle piattabande se il taglio è applicato nel baricentro della sezione.

Caratteristiche della sezione:



$A = 1.35 \cdot 10^3 \text{ mm}^2 \quad J_{xx} = 2.05 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad J_{yy} = 2.91 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$

Soluzione

La posizione del centro di taglio 'g' è facilmente determinabile con la formula:

$$g = e + \frac{b^2 h^2 s_1}{4 J_{xx}} = 12.5 + \frac{47^2 \cdot 91.5^2 \cdot 8.5}{4 \cdot 2.05 \cdot 10^6} = 31.7 \text{ mm}$$

La massima tensione tangenziale dovuta al taglio nell'anima vale:

$$\tau_{max} = \frac{T_y}{s_2 J_{xx}}\left(\frac{bs_1 h}{2} + \frac{s_2 h^2}{8}\right) = \frac{10000}{6 \cdot 2.05 \cdot 10^6}\left(\frac{47 \cdot 8.5 \cdot 91.5}{2} + \frac{6 \cdot 91.5^2}{8}\right) \cong 20 \text{ MPa}$$

La massima tensione tangenziale dovuta al taglio nelle piattabande vale:

$$\tau_{max} = \frac{T_y bh}{2J_{xx}} = \frac{10000 \cdot 47 \cdot 91.5}{2 \cdot 2.05 \cdot 10^6} \cong 10 \text{ MPa}$$

Per calcolare le tensioni di torsione che si hanno nel caso in cui il taglio sia applicato al baricentro della sezione si utilizzano i metodi visti per le sezioni aperte in parete sottile, in cui il momento applicato, in modulo, è dato da:

$$M_z = T_y g = 10000 \cdot 31.7 = 317000 \text{ Nmm}$$

Per il calcolo delle tensioni si deve prima valutare il fattore di rigidezza a torsione, considerando che gli spessori non sono trascurabili:

$$J_t = \sum J_{ti} = \sum \frac{1}{3}(b_i - 0.3 a_i \cdot m_i) a_i^3 = \frac{2}{3}(47 - 0.3 \cdot 8.5) \cdot 8.5^3 + \frac{1}{3} 91.5 \cdot 6 \cong 24800 \text{ mm}^4$$

da cui le tensioni aggiuntive dovute al momento torcente rispettivamente nell'anima e nella piattabanda valgono:

$$\left|\tau_{max}\right|_{anima} = \frac{M_z}{J_t} a_{anima} = \frac{317000}{24800} 6 \cong 77 \text{ MPa}$$

$$\left|\tau_{max}\right|_{piat.} = \frac{M_z}{J_t} a_{piat.} = \frac{317000}{24800} 8.5 \cong 109 \text{ MPa}$$

Torna ad inizio documento

Torna al modulo