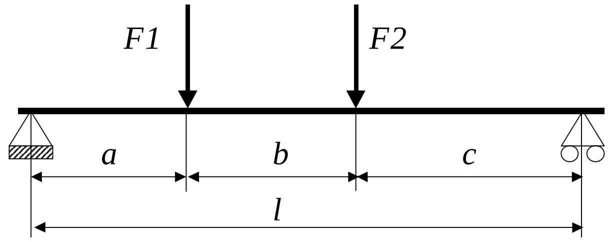
Indice

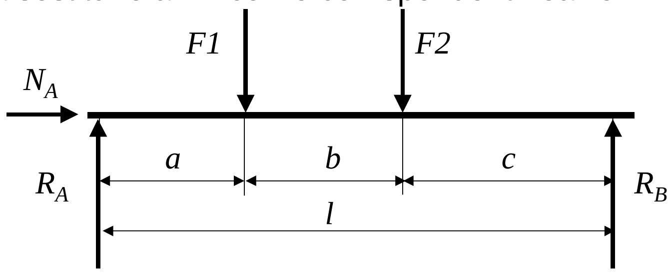
Esercizio 3-1a[1]

Data la struttura schematizzata in figura calcolare le reazioni vincolari.
Dimensioni: a= 70 mm, b= 80 mm, c= 100 mm; Forze F1= 1000 N, F2 = 1500 N
Risolvere prima in modo letterale.



Soluzione

Prima di tutto bisogna sostituire ai vincoli le corrispondenti reazioni vincolari:



Scriviamo le tre equazioni di equilibrio (NB: $l=(a+b+c)= 250$ mm)

$$\rightarrow N_A = 0$$

$$\uparrow F1 + F2 + R_A + R_B = 0$$

$$A \subset R_B l - F1 \cdot a - F2 \cdot (a+b) = 0$$

oppure

$$\rightarrow N_A = 0$$

$$B \supset \; R_A l - F1 \cdot (b+c) - F2 \cdot c = 0$$

$$A \subset R_B l - F1 \cdot a - F2 \cdot (a+b) = 0$$

In entrambi i casi il risultato finale (compresi i valori numerici) è il seguente:

$$N_A = 0$$

$$R_A = \frac{F1 \cdot (b+c) + F2 \cdot c}{l} = 1320 \text{ N}$$

$$R_B = \frac{F1 \cdot a + F2 \cdot (a+b)}{l} = 1180 \text{ N}$$

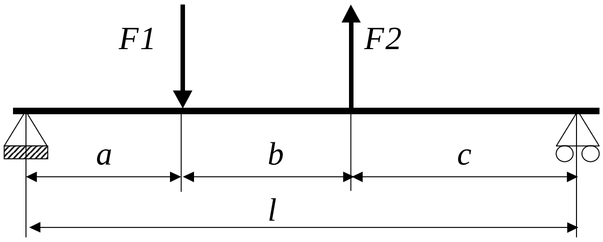
Conviene sempre verificare che la somma vettoriale delle forze applicate sia uguale alla somma delle reazioni vincolari

$$F1 + F2 = 2500 \text{ N} = R_A + R_B$$

[1] I disegni degli esercizi 3-1 e 3-2 non sono in scala!

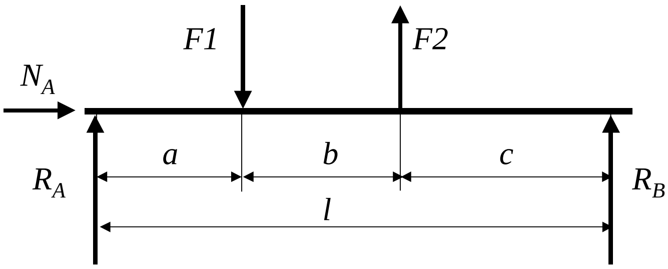
Esercizio 3-1b

Data la struttura schematizzata in figura calcolare le reazioni vincolari.
Dimensioni: a= 70 mm, b= 80 mm, c= 100 mm; Forze F1= 1000 N, F2 = 1500 N
Risolvere prima in modo letterale.



Soluzione

Sostituzione vincoli con reazioni vincolari



Scrittura equazioni di equilibrio

$$\rightarrow N_A = 0$$

$$B \supset \; R_A l - F1 \cdot (b + c) + F2 \cdot c = 0$$

$$A \subset R_B l - F1 \cdot a + F2 \cdot (a + b) = 0$$

Soluzione:

$$N_A = 0$$

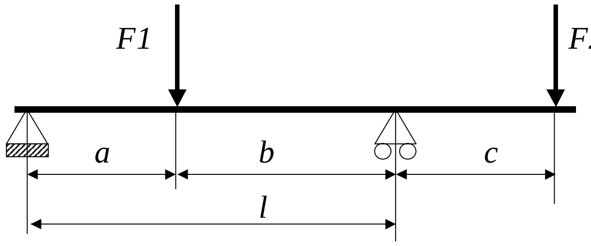
$$R_A = \frac{F1 \cdot (b + c) + F2 \cdot c}{l} = 120 \text{ N}$$

$$R_B = \frac{F1 \cdot a + F2 \cdot (a + b)}{l} = -620 \text{ N}$$

anche in questo la verifica della somma delle reazioni vincolari è positiva.
Si noti che gli esercizi 3-1a e 3-1b sono in realtà uguali. L'esercizio b) infatti può essere risolto con lo schema a) semplicemente dando un valore uguale ed opposto alla forza F2.

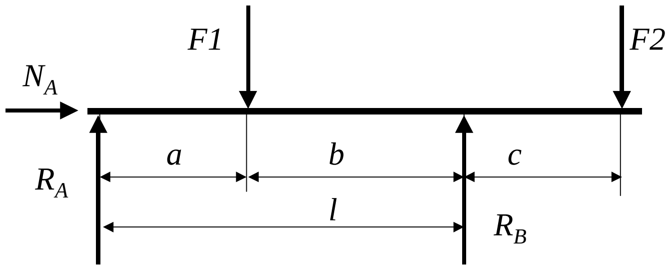
Esercizio 3-1c

Data la struttura schematizzata in figura calcolare le reazioni vincolari.
Dimensioni: a= 90 mm, b= 135 mm, c= 75 mm; Forze F1= 1000 N, F2 = 1500 N
Risolvere prima in modo letterale.



Soluzione

Sostituzione vincoli con reazioni vincolari



Scrittura equazioni di equilibrio:

$$\rightarrow N_A = 0$$

$$B \subset \; R_A(a+b) - F1 \cdot b + F2 \cdot c = 0$$

$$A \supset R_B(a+b) - F1 \cdot a - F2 \cdot (a+b+c) = 0$$

Soluzione:

$$N_A = 0$$

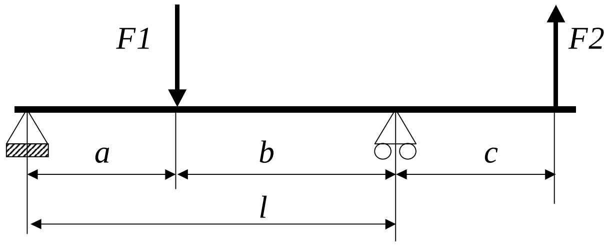
$$R_A = \frac{F1 \cdot b - F2 \cdot c}{(a+b)} = 100 \text{ N}$$

$$R_B = \frac{F1 \cdot a + F2 \cdot (a+b+c)}{(a+b)} = 2400 \text{ N}$$

Anche in questo caso la somma delle reazioni vincolari è uguale alla somma vettoriale delle forze applicate

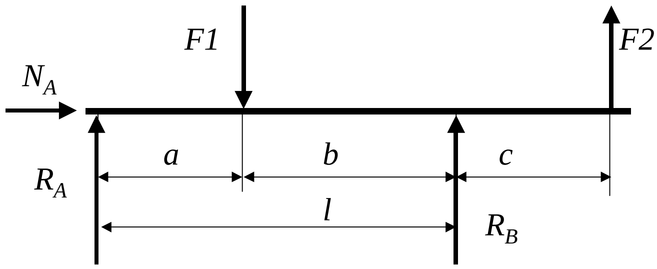
Esercizio 3-1d

Data la struttura schematizzata in figura calcolare le reazioni vincolari.
Dimensioni: a= 90 mm, b= 135 mm, c= 75 mm; Forze F1= 1000 N, F2 = 1500 N N
Risolvere prima in modo letterale.



Soluzione

Sostituzione vincoli con reazioni vincolari



Scrittura equazioni di equilibrio:

$$\rightarrow N_A = 0$$

$$B \subset \; R_A(a+b) - F1 \cdot b - F2 \cdot c = 0$$

$$A \supset R_B(a+b) - F1 \cdot a + F2 \cdot (a+b+c) = 0$$

Soluzione:

$$N_A = 0$$

$$R_A = \frac{F1 \cdot b + F2 \cdot c}{(a+b)} = 1100 \text{ N}$$

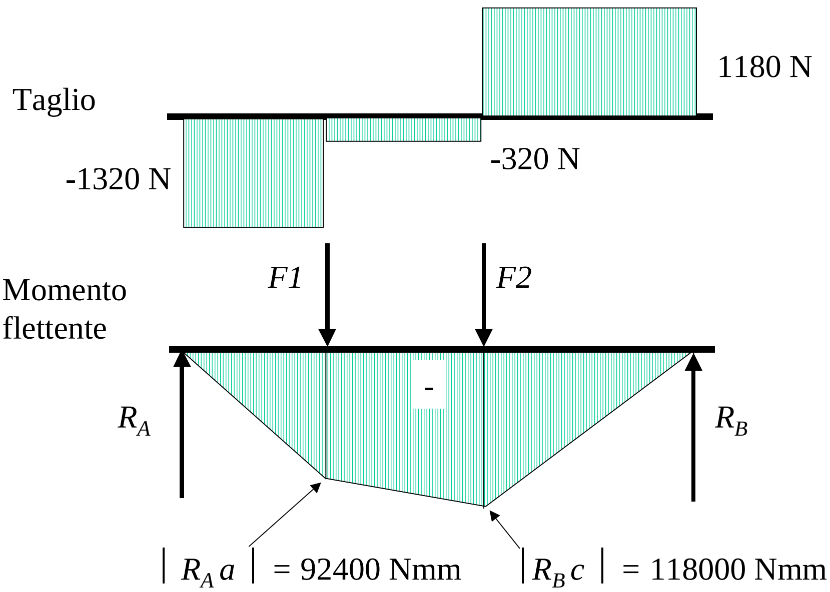
$$R_B = \frac{F1 \cdot a - F2 \cdot (a+b+c)}{(a+b)} = -1600 \text{ N}$$

Anche in questo caso la somma delle reazioni vincolari è uguale alla somma vettoriale delle forze applicate
Si noti che gli esercizi 3-1c e 3-1d sono in realtà uguali. L'esercizio d) infatti può essere risolto con lo schema d) semplicemente dando un valore uguale ed opposto alla forza F2.

Esercizio 3-2a

Con riferimento all'esercizio 3-1a tracciare i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione

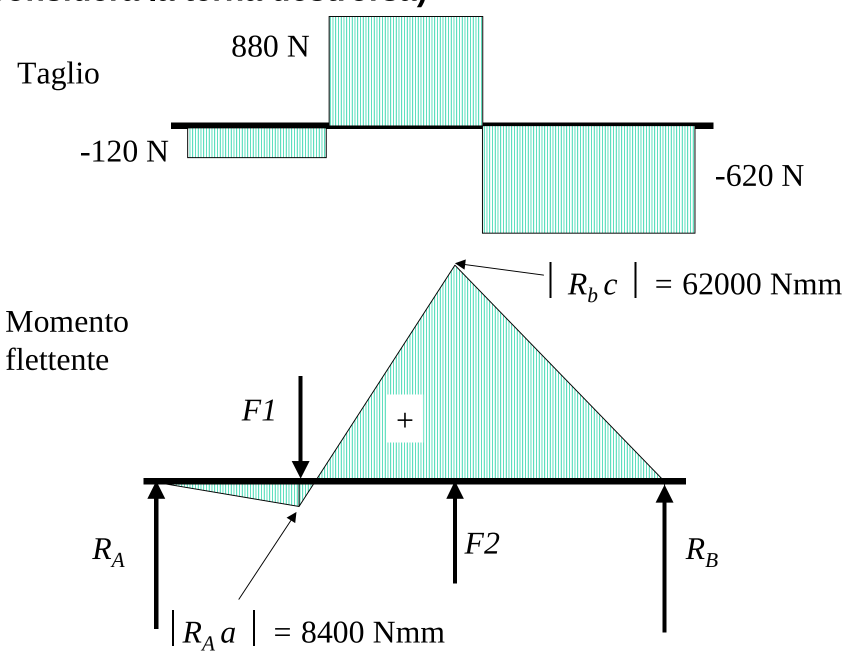
Soluzione (si considera la terna destrorsa)



Esercizio 3-2b

Con riferimento all'esercizio 3-1b tracciare i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione.

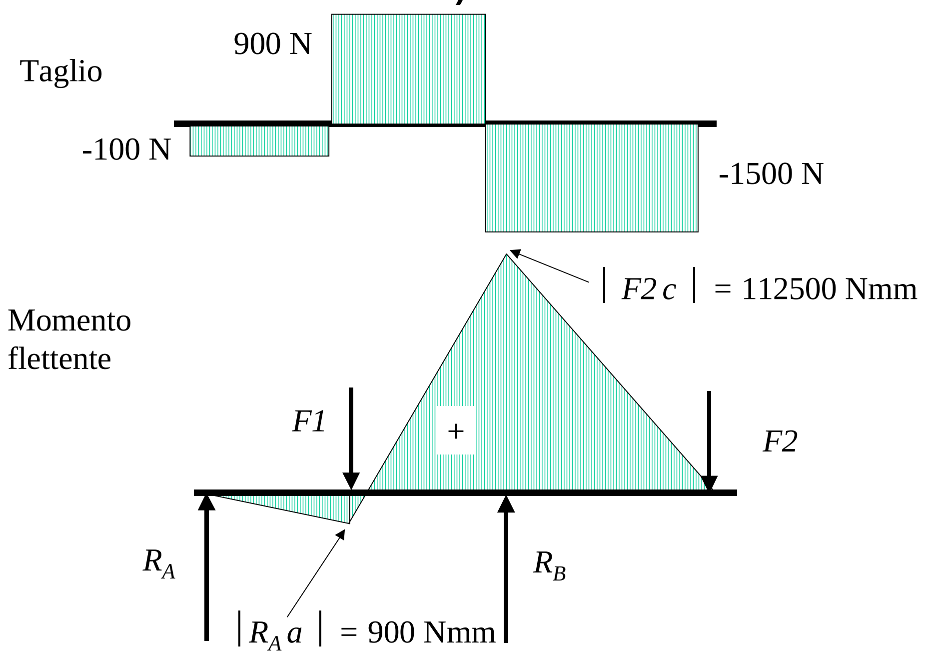
Soluzione (si considera la terna destrorsa)



Esercizio 3-2c

Con riferimento all'esercizio 3-1c tracciare i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione

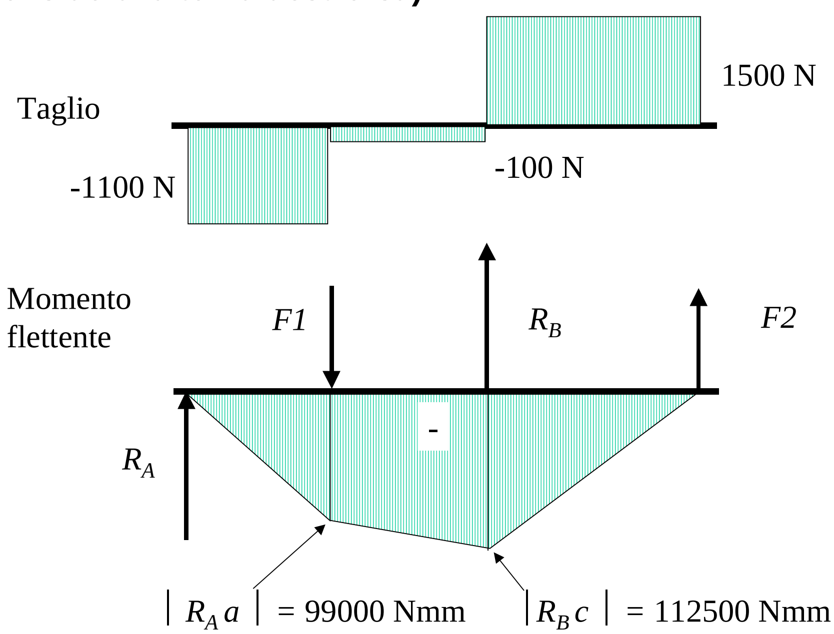
Soluzione (si considera la terna destrorsa)



Esercizio 3-2d

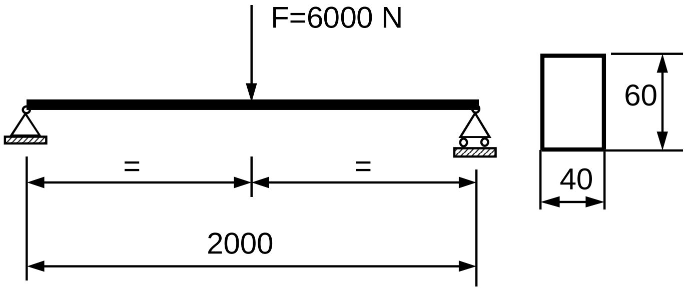
Con riferimento all'esercizio 3-1d tracciare i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione

Soluzione (si considera la terna destrorsa)



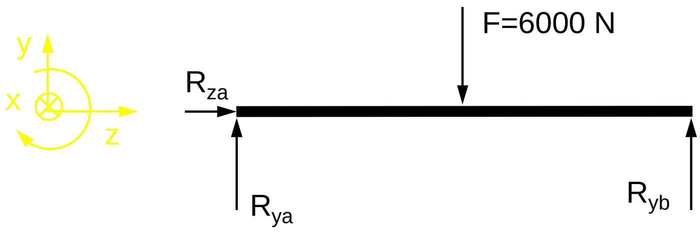
Esercizio 3-3

Una trave di sezione rettangolare 60x40 mm lunga 2 m, appoggiata alle estremità, è soggetta ad un carico verticale di 6000 N che agisce nella mezzeria.
Calcolare le massime tensioni normali e tangenziali.



Soluzione

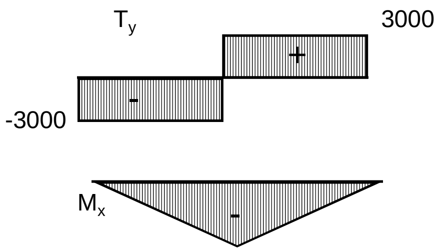
- Calcolo delle reazioni vincolari



$$\begin{aligned} R_{za} &= 0 \\ R_{ya} + R_{yb} - F &= 0 \\ R_{ya} \cdot 2000 - F \cdot 1000 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} R_{ya} &= F\frac{1000}{2000} = 6000\frac{1}{2} = 3000 \text{ N} \\ R_{yb} &= F - R_{ya} = 6000 - 3000 = 3000 \text{ N} \end{aligned}$$

Il risultato ottenuto poteva venire facilmente intuito per la simmetria rispetto alla mezzeria della geometria e dei carichi.

- Diagrammi di taglio e di momento flettente (lo sforzo normale è nullo su tutta la trave)



M_{xMAX}=-3000 1000 = -3 10^6 Nmm

- Calcolo delle tensioni

La sezione più sollecitata (<u>sezione di progetto</u>) è quella di mezzeria, dove il momento flettente ha il valore massimo (in modulo). Il calcolo delle tensioni verrà effettuato solo in tale sezione.

Si utilizzano le formule: $\sigma_{zz\,max} = \frac{M_x}{W_f}$ $\qquad$ $\sigma_{zz\,min} = -\frac{M_x}{W_f}$

Il modulo di resistenza a flessione W_f vale:

$$W_f = \frac{bh^2}{6} = \frac{40 \cdot 60^2}{6} = 24 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

da cui, nei punti di progetto della sezione, cioè quelli in cui la tensione è massima(minima) si ha

$$\sigma_{zz\,max} = \frac{M_x}{W_f} = \frac{3 \cdot 10^6}{24 \cdot 10^3} = 125 \text{ MPa} \qquad \sigma_{zz\,min} = -\frac{M_x}{W_f} = -\frac{3 \cdot 10^6}{24 \cdot 10^3} = -125 \text{ MPa}$$

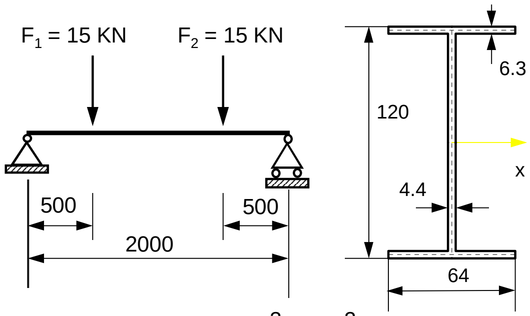
Si noti che, poichè il momento M_x è negativo nel nostro sistema di riferimento, la tensione massima di trazione si trova nella parte inferiore della sezione, mentre nella parte superiore le tensioni sono di compressione.
A rigore in questa sezione non si potrebbero utilizzare le formule viste perchè siamo in una zona di applicazione delle forze. E' comunque consuetudine in questi casi non considerare gli effetti locali.
Nella sezione considerata il taglio risulta nullo, o meglio presenta una discontinuità. Se ci si sposta di un ε piccolo a piacere dalla sezione di progetto, dove le tensioni di flessione possono considerarsi uguali a quelle della sezione di progetto, si trova un taglio non nullo. Calcoliamo le tensioni dovute al taglio in tale sezione.

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{T_y}{A} = \frac{3 \cdot 3000}{2 \cdot 60 \cdot 40} \cong 2 \text{ MPa}$$

La tensione tangenziale massima agisce in corrispondenza dell'asse neutro, cioè in un punto diverso da dove agiscono le tensioni normali massime.
Si noti inoltre che le tensioni tangenziali sono molto piccole, il che capita quando si hanno travi snelle. In questi casi il calcolo delle tensioni dovute al taglio è del tutto superfluo. Questo calcolo può invece essere importante con i profilati a parete sottile, in cui le tensioni tangenziali possono essere elevate.

Esercizio 3-4

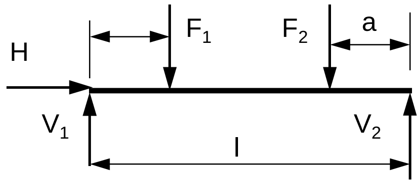
Una trave IPE 120 UNI 5398 lunga 2 m è soggetta ai carichi indicati in figura. Determinare le tensioni agenti sulla trave.



Caratteristiche della sezione: $A = 1.32 \cdot 10^3$ mm^2 $J_{xx} = 3.18 \cdot 10^6$ mm^4 $J_{yy} = 2.77 \cdot 10^5$ mm^4)

Soluzione

- Calcolo delle reazioni vincolari



$$\rightarrow H = 0 \qquad V_2 = \frac{F_2(l-a)+F_1 a}{l} = 15\ \text{kN}$$

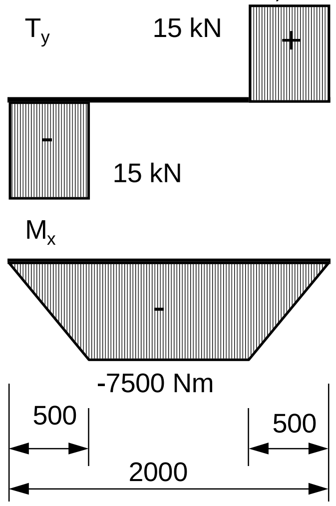
$$1 \supset V_2 l - F_2(l-a) - F_1 a = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2 \supset V_1 l - F_1(l-a) - F_2 a = 0 \qquad V_1 = \frac{F_1(l-a)+F_2 a}{l} = 15\ \text{kN}$$

Il risultato ottenuto poteva venire facilmente intuito per la simmetria rispetto alla mezzeria della geometria e dei carichi.

- Diagrammi di Taglio e di Momento flettente

Si noti che il momento è costante nella zona compresa fra le due forze e che di conseguenza il taglio, che è la derivata del momento, è nullo in questa zona.



- Calcolo delle tensioni

Tensioni dovute al momento flettente. Le sezioni dove le tensioni dovute al momento flettente sono massime sono quelle comprese fra le diue forze. Le tensioni massime si hanno nelle piattabande (cioè all'estremita della sezione e sono di trazione in basso e di compressione in alto.

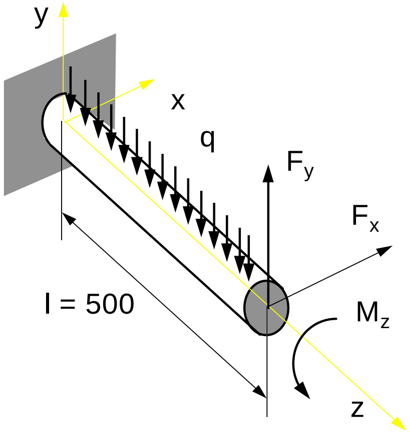
$$|\sigma_{max}| = \frac{M_x}{J_{xx}} y_{max} = \frac{7500000}{3.18 \cdot 10^6} 60 \cong 142\ \text{MPa}$$

Tensioni dovute al taglio. Trattandosi di un profilato a parete sottile conviene valutare le tensioni dovute al taglio, anche se la trave risulta snella. Vi sono tensioni dovute al taglio solo nelle due estremità della trave all'esterno delle due forze applicate. La tensione massima si ha nell'anima in corrispondenza della linea d'asse e vale:

$$\tau_{max} = \frac{T_y}{s_2 J_{xx}}\left(\frac{b s_1 h}{2} + \frac{s_2 h^2}{8}\right) = \frac{15000}{4.4 \cdot 3.18 \cdot 10^6} \cdot \left(\frac{64 \cdot 6.3 \cdot 113.7}{2} + \frac{4.4 \cdot 113.7^2}{8}\right) \cong 32 \text{ MPa}$$

Esercizio 3-5

Una trave incastrata lunga 500 mm, di sezione circolare ∅ 35 mm, è soggetta ad un momento torcente M_z = 360 Nm, ad un carico distribuito in direzione verticale (q) di 700 N/m diretto verso il basso, ad un carico F_y = 1000 N verso l'alto ed un carico in direzione orizzontale F_x = 1200 N, applicati all'estremità libera della sezione.
Calcolare la tensione ideale nel punto più sollecitato della trave.

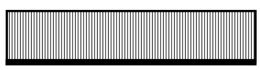


Soluzione

Si tratta di un problema tridimensionale, che conviene separare tre problemi: uno relativo al comportamento torsionale, uno nel piano yz e uno nel piano xz.

- Comportamento torsionale

La reazione vincolare al momento torcente sarà un momento torcente uguale e contrario a quello applicato. Il diagramma di momento torcente sarà quindi:



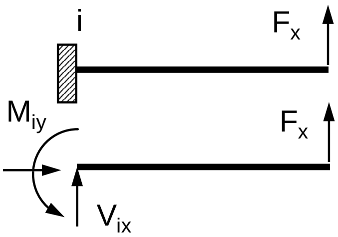
M_t = 360 Nm

Tutte le sezioni sono ugualmente sollecitate a torsione. La tensione tangenziale massima vale:

$$\tau_{max} = \frac{16 M_t}{\pi D^3} = \frac{16 \cdot 360000}{\pi \cdot 35^3} = 43 \text{ MPa}$$

- Piano xz

- Reazioni vincolari



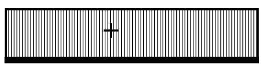
$H_i = 0$

$V_{ix}+F_x=0 \Rightarrow V_{ix} = -F_x= -1200$ N

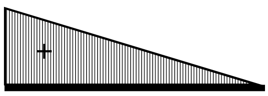
$M_{iy}+F_x\cdot l=0 \Rightarrow M_{iy}=-F_x\cdot l = -600$ Nm

- Diagrammi di taglio e di momento flettente

$T_x = 1200$ N

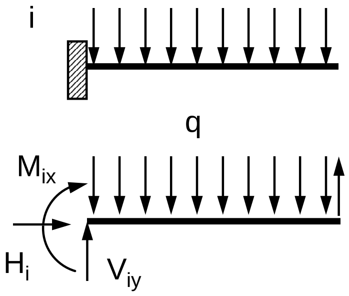


$M_{ymax}= 600$ Nm



- Piano yz

- Reazioni vincolari



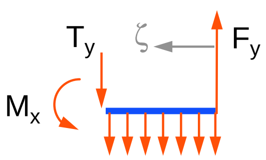
$H_i = 0$

$V_{iy}+F_y-ql = 0 \Rightarrow V_{iy} = -F_x +ql = -650$ N

$M_{ix}-F_x\cdot l+ql^2/2 \;=0 \Rightarrow M_{iy}=F_y\cdot l-ql^2/2 = 412.5$ Nm

- Diagrammi di taglio e di momento flettente.

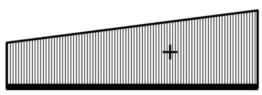
Per tracciare i diagrammi di taglio e momento conviene utilizzare una coordinata locale ζ con origine all'estremità libera della mensola. I diagrammi di taglio di taglio e di momento flettenete risultano:



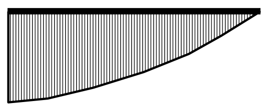
$T_y=F_y-q\zeta^*$

$M_x= q\cdot\zeta^2/2- F_y\zeta$

$T_{ymax} = 1000$ N
$T_{ymin} = 650$ N

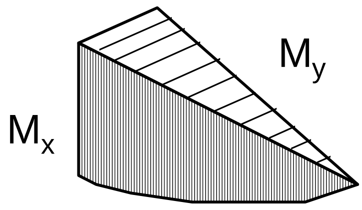


$M_{xmax}= - 412.5$ Nm



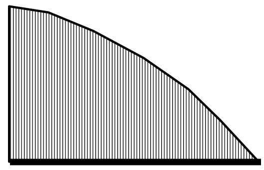
- Momento flettente complessivo e calcolo delle tensioni

La situzione dei momenti è quella indicata in figura. Poiché la sezione è circolare conviene calcolare punto per punto il momento complessivo con la formula:



$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

Il valore massimo del momento complessivo si trova all'incastro, dove sono massimi entrambi i momenti M_x e M_y.



M_{max}=728.12 Nm

La tensione normale è calcolata sulla base del momento complessivo massimo:

$$\sigma_{max} = \frac{32 M_{max}}{\pi D^3} = \frac{32 \cdot 728120}{\pi \cdot 35^3} = 173 \text{ MPa}$$

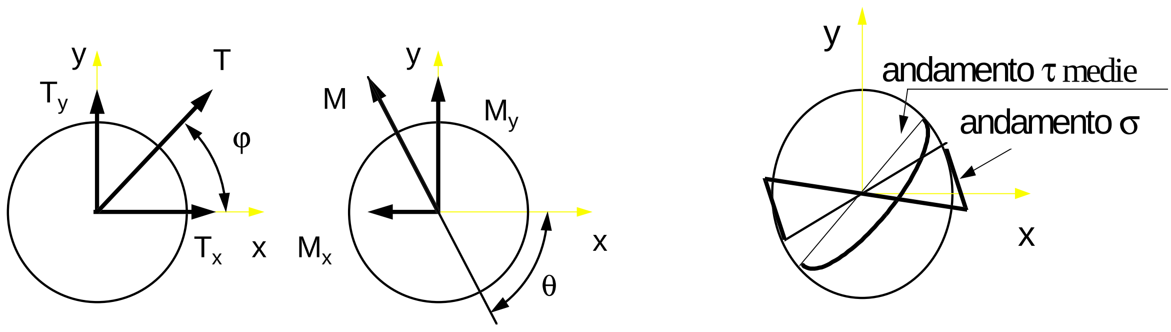
Ii diagramma disegnato non giace su un unico piano. Infatti il rapporto fra i momenti nei due piani non si mantiene costante. Questo è vero in generale quando i diagrammi sui due piani seguono leggi diverse.

La direzione in cui agisce il taglio complessivo:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{T_y}{T_x}\right) \cong 0.496 \text{ rad} \cong 28.4°$$

a differenza di quanto avviene nel caso piano, non è ortogonale alla direzione in cui agisce il momento complessivo:

$$\vartheta = \operatorname{arctg}\left(\frac{M_y}{M_x}\right) \cong -0.969 \text{ rad} \cong -55.5°$$



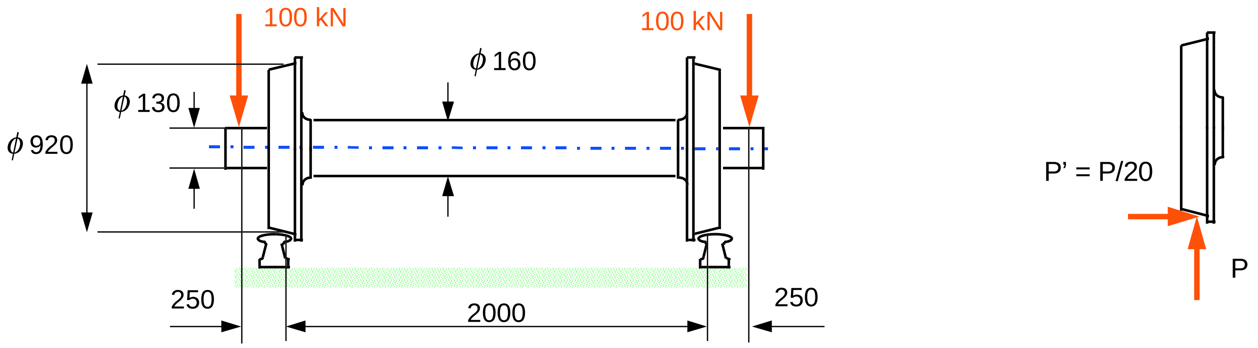
Questo fatto comporta che dove la tensione di flessione è massima (minima) la tensione dovuta al taglio non è nulla. Poiché le tensioni dovute al taglio nelle travi snelle sono comunque piccole rispetto alle tensioni di flessione, esse vengono di norma trascurate . Si noti inoltre che il valore fornito dalle formule di Jourawski forniscono solo il valore medio

della tensione lungo una corda, e non il valore alle estremità, dove comunque le tensioni τ devono essere tangenti al profilo della sezione.
La tensione ideale, secondo l'ipotesi di Tresca, vale:

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_{max}^2 + 4 \cdot \tau_{max}^2} \approx 193\,\text{MPa}$$

Esercizio 3-6

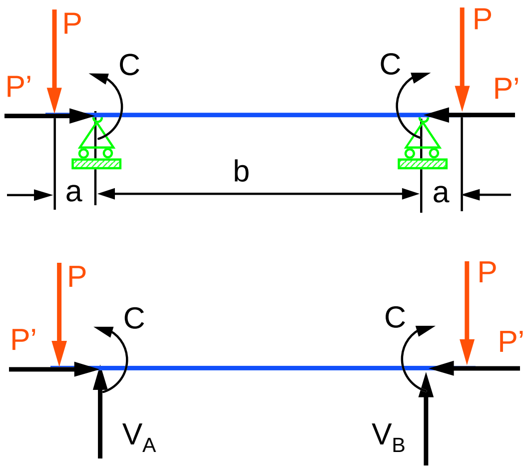
La figura illustra schematicamente un assale ferroviario con i carichi ad esso applicati. Si noti che, a causa della geometria del contatto fra ruota e rotaia, se la rotaia applica un carico P in direzione verticale, sarà presente anche un carico orizzontale P' pari ad un ventesimo di P.(nel nostro caso 5000 N). Calcolare le tensioni agenti nel tratto fra le due ruote.



Soluzione

-Schematizzazione e calcolo delle reazioni vincolari.

Il problema può essere schematizzato nel modo indicato in figura. Si noti che in corrispondenza degli appoggi agiscono due carichi normali che si equilibrano e due coppie C pari al carico assiale per il raggio di contatto della ruota: C = P'·R = 5000·0.460= 2300 Nm.



$$V_B \cdot b - P\cdot(a+b) + P\cdot a + C - C = V_B \cdot b - P\cdot b = 0$$
$$V_A \cdot b - P\cdot(a+b) + P\cdot a + C - C = V_A \cdot b - P\cdot b = 0$$

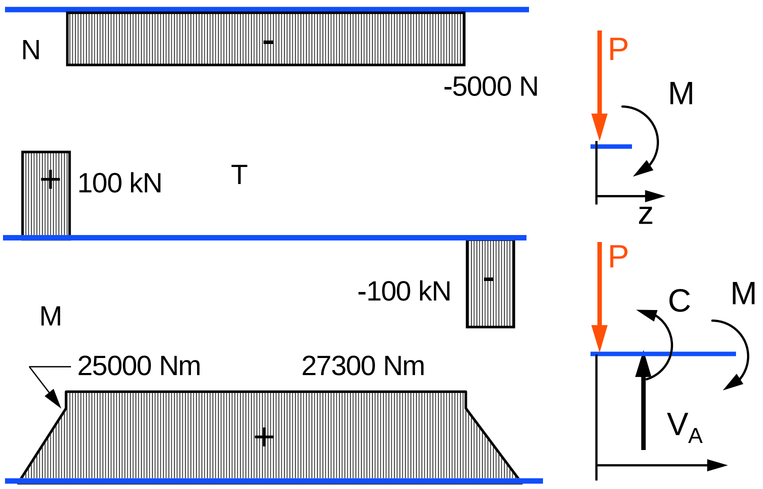
Da cui

$$V_B = \frac{P\cdot b}{b} = 100\ \text{kN}$$
$$V_A = \frac{P\cdot b}{b} = 100\ \text{kN}$$

come ovvio per ragioni di simmetria.

- Diagrammi di sforzo normale, taglio e momento flettente.

Equazioni per il diagramma di momento



Per z < a:

M = P · z

Per z > a:

$M = P\cdot z - V_A(z-a) + C =$
$= P\cdot a + C$

- Tensioni nel tratto fra le due ruote dovute allo sforzo normale.

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{4\cdot N}{\pi\cdot D^2} = \frac{4\cdot(-5000)}{\pi\cdot 160^2} = -0.25\ \text{MPa}$$

Come si vede le tensioni dovute allo sforzo normale in questo caso sono insignificanti.

- Tensioni nel tratto fra le due ruote dovute al momento flettente.

$$\sigma_{M\,max} = \frac{32 M_{max}}{\pi D^3} = \frac{32\cdot 27300000}{\pi\cdot 160^3} \cong 68\ \text{MPa} \qquad \sigma_{M\,min} = -\frac{32 M_{max}}{\pi D^3} = -\frac{32\cdot 27300000}{\pi\cdot 160^3} \cong -68\ \text{MPa}$$

- Tensioni complessive

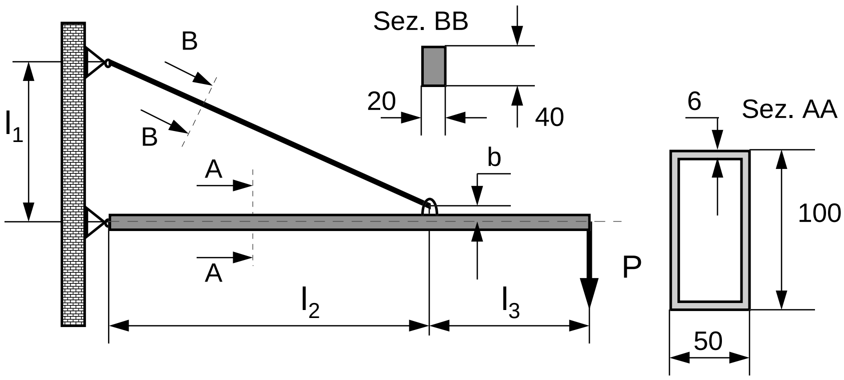
In questo specifico caso le tensioni dovute allo sforzo normale sono trascurabili, ma in generale si deve ricordare che le tensioni dovute allo sforzo normale e quelle dovute al momento flettente si sommano algebricamente. A rigore quindi il punto più sollecitato nel nostro caso è quello in compressione, mentre il punto della sezione in trazione risulta leggermente scaricato. Le tensioni nei due punti estremi saranno quindi:

$$\sigma_{max} = \sigma_{M\,max} + \sigma_N \cong 68 - 0.25 \cong 67.75\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{min} = \sigma_{M\,min} + \sigma_N \cong -68 - 0.25 \cong -68.25\ \text{MPa}$$

Esercizio 3-7

Nella figura è schematizzato il braccio di un paranco formato da una trave orizzontale di sezione rettangolare cava incernierata in un muro e da un'asta[2] che funge da tirante. Calcolare le tensioni agenti.

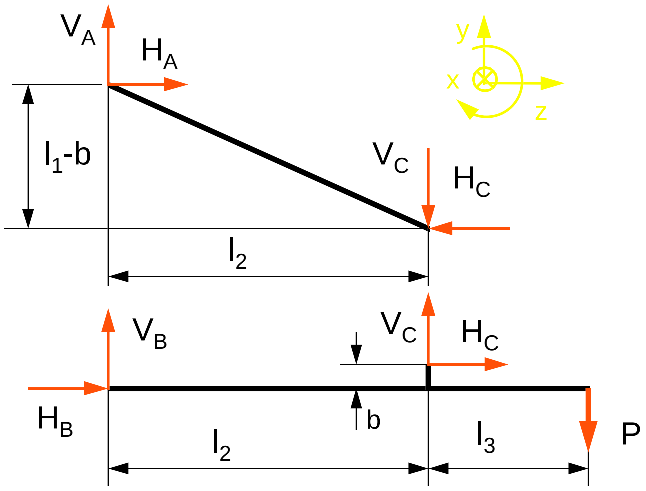


Dati: l_1 = 1 m ; l_2 = 1.5 m; l_3 = 0.9 m b= 100 mm; P = 5 kN

Soluzione

- Calcolo delle reazioni vincolari.

La struttura è formata da due corpi collegati con una cerniera che non interrompe la continuità della trave principale. Si possono quindi scrivere le equazioni di equilibrio dei due corpi presi separatamente



[2] *Asta = elemento che sopporta solo carichi normali, agenti lungo l'asse del corpo. Sono aste tutti i corpi incernierati alle estremità in cui i carichi sono applicati solo in corrispondenza delle cerniere. La risultante delle forze applicate è diretta lungo l'asse dell'asta.*
Tirante = Asta posta in trazione. Puntone = Asta posta in compressione.

$$\begin{array}{ll}
\uparrow & V_A - V_C = 0 \\
\rightarrow & H_A - H_C = 0 \\
A \supset & H_C(l_1 - b) + V_C \cdot l_2 = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\uparrow & V_B + V_C - P = 0 \\
\rightarrow & H_B + H_C = 0 \\
B \supset & H_C \cdot b - V_C \cdot l_2 + P(l_2 + l_3) = 0
\end{array}$$

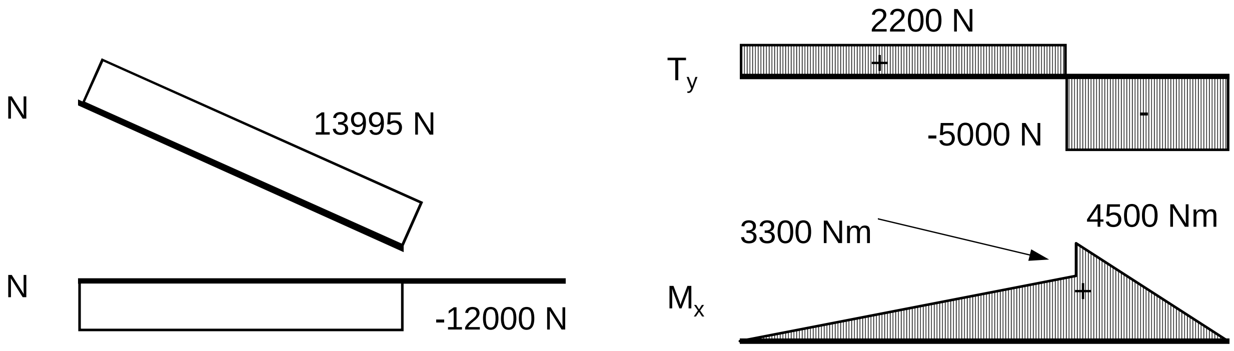
Risolvendo queste equazioni si ottiene:

$$H_C = H_A = -P\frac{l_2 + l_3}{l_1} = -12000 \text{ N}$$
$$H_B = 12000 \text{ N}$$
$$V_C = V_A = P\frac{(l_2 + l_3)}{l_1}\frac{(l_1 - b)}{l_2} = 7200 \text{ N}$$
$$V_B = P - V_C = -2200 \text{ N}$$

Si noti che la risultante delle reazioni vincolari alle estremità dell'asta è diretta lungo l'asse dell'asta stessa:

$$\tan\alpha = -\frac{(l_1 - b)}{l_2} = -0.6 \qquad \tan\beta = \frac{V_A}{H_A} = \frac{V_C}{H_C} - 0.6$$

- Diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione



Si noti che:
- sull'asta agisce solo uno sforzo normale di trazione;
- nella parte di trave vicina al muro agiscono sia un momento flettente sia uno sforzo normale di compressione;
- il diagramma di momento flettente della trave presenta un salto pari alla coppia applicata da Hc, cioè pari a Hc·b= -1200 Nm.

- Calcolo delle tensioni

- Asta.

L'unica caratteristica di sollecitazione è lo sforzo normale. La tensione vale:

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{13995}{40 \cdot 80} \cong 18 \text{ MPa}$$

- Trave.

Il modulo di resistenza a flessione W_f vale:

$$W_f = \frac{bh^2}{6} - \frac{(b-2s)(h-2s)^2}{6} = \frac{40\cdot 100^2}{6} - \frac{38\cdot 88^2}{6} = 34288 \text{ mm}^3$$

Le tensioni massime e minime nella sezione in cui si ha il momento massimo valgono:

$$\sigma_{M\,max} = \frac{M_x}{W_f} = \frac{4.5\cdot 10^6}{34288} \cong 132 \text{ MPa} \qquad \sigma_{M\,min} = -\frac{M_x}{W_f} = -\frac{4.5\cdot 10^6}{34288} = -132 \text{ MPa}$$

Nel tratto fra le due cerniere si ha un momento flettente ed uno sforzo normale.

Le tensioni dovute allo sforzo normale valgono:

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{-12000}{50\cdot 100 - 38\cdot 88} \cong -7 \text{ MPa}$$

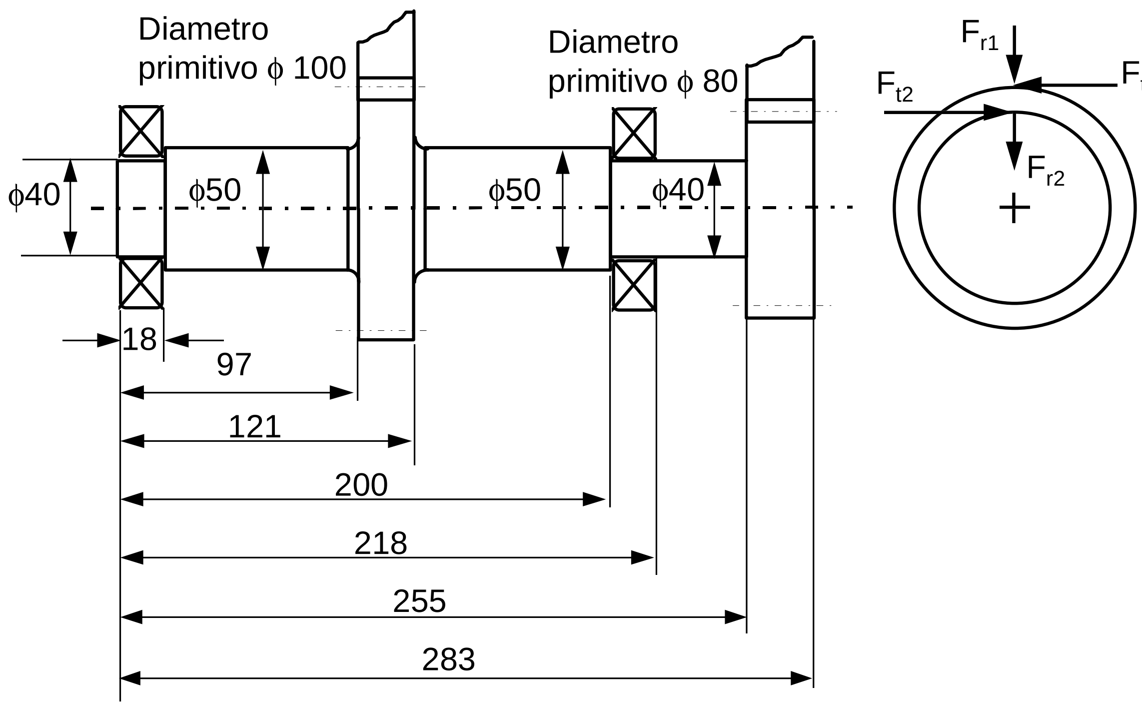
Mentre in questo tratto le tensioni minima e massima nella sezione appena precedente la cerniera valgono:

$$\sigma_{M\,max} = \frac{M_x}{W_f} = \frac{3.3\cdot 10^6}{34288} \cong 97 \text{ MPa} \qquad \sigma_{M\,min} = -\frac{M_x}{W_f} = -\frac{3.3\cdot 10^6}{34288} = -97 \text{ MPa}$$

In questa sezione il punto più sollecitato è quello in compressione dove si ha una tensione complessiva pari a -104 MPa.

Esercizio 3-8

La figura illustra schematicamente l'albero di rinvio fra due ruote dentate a denti diritti con angolo di pressione di 20°. Il cuscinetto di sinistra è bloccato sia sull'anello esterno sia sull'anello interno e sopporta eventuali carichi assiali; il cuscinetto di destra è libero di muoversi assialmente. Sapendo che il momento torcente trasmesso è di 200 Nm, calcolare le tensioni agenti sull'albero.



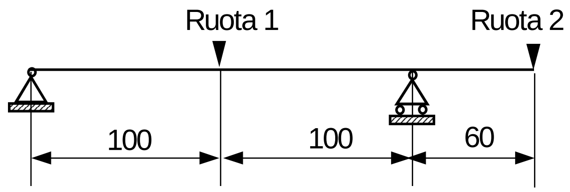
Soluzione

In primo luogo occorre calcolare le forze agenti sull'albero. E' noto che la forza tangenziale agente sulla ruota è pari al momento torcente diviso il raggio primitivo e che la forza radiale si ottiene moltiplicando la forza tangenziale per la tangente dell'angolo di pressione. Si avrà quindi:

$$F_{t1} = \frac{2 \cdot M}{D_{p1}} = \frac{2 \cdot 200000}{100} = 4000\,\text{N} \qquad F_{t2} = \frac{2 \cdot M}{D_{p2}} = \frac{2 \cdot 200000}{80} = 5000\,\text{N}$$

$$F_{r1} = F_{t1} \cdot \tan 20° = 1456\ \text{N} \qquad F_{r2} = F_{t2} \cdot \tan 20° = 1820\ \text{N}$$

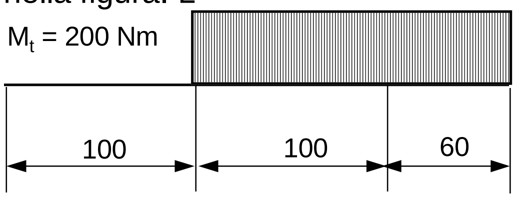
I cuscinetti possono essere schematizzati con degli appoggi. Tenendo conto delle dimensioni in figura la schematizzazione dell'albero è quella riportata a sotto



Le forze risultanti non stanno su un unico piano, quindi conviene scomporre il problema flessionale nei due piani tangenziale e radiale.

- Comportamento torsionale

Il momento torcente agisce nel tratto fra le due ruote; il diagramma di momento torcente sarà quindi quello riportato nella figura. L

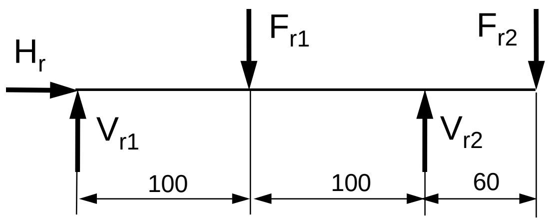


e tensioni nominali massime dovute al momento torcente si saranno diverse nei due tratti con diametro 40 e 50 mm:

$$\tau_{max(\phi 40)} = \frac{16M_t}{\pi D^3} = \frac{16 \cdot 200000}{\pi \cdot 40^3} \cong 16\ \text{MPa} \qquad \tau_{max(\phi 50)} = \frac{16M_t}{\pi D^3} = \frac{16 \cdot 200000}{\pi \cdot 50^3} \cong 8\ \text{MPa}$$

- Comportamento flessionale nel piano radiale.

Le forze radiali sono concordi; si ha quindi la seguente situazione:



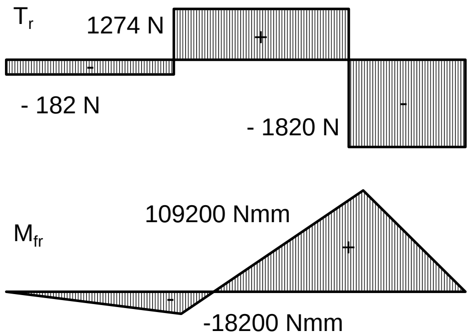
- reazioni vincolari

$$\rightarrow \quad H_r = 0$$

$$1 \supset \ V_{r2} \cdot 200 = F_{r1} \cdot 100 + F_{r2} \cdot 260 \Rightarrow V_{r2} = \frac{F_{r1} \cdot 100 + F_{r2} \cdot 260}{200} = 3094 \text{ N}$$

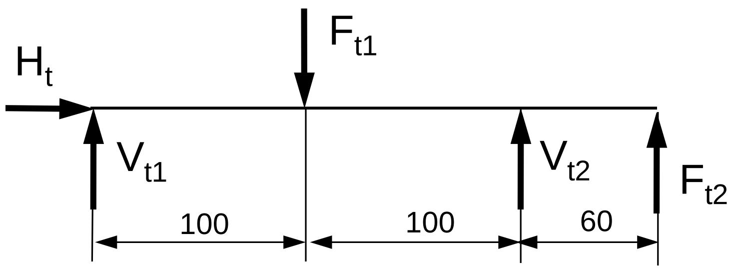
$$2 \supset \ V_{r1} \cdot 200 = F_{r1} \cdot 100 - F_{r2} \cdot 60 \Rightarrow V_{r1} = \frac{F_{r1} \cdot 100 - F_{r2} \cdot 60}{200} = 182 \text{ N}$$

- diagrammi di taglio e momento flettente



- Comportamento flessionale nel piano tangenziale.

Le forze tangenziali sono discordi; si ha quindi la seguente situazione:



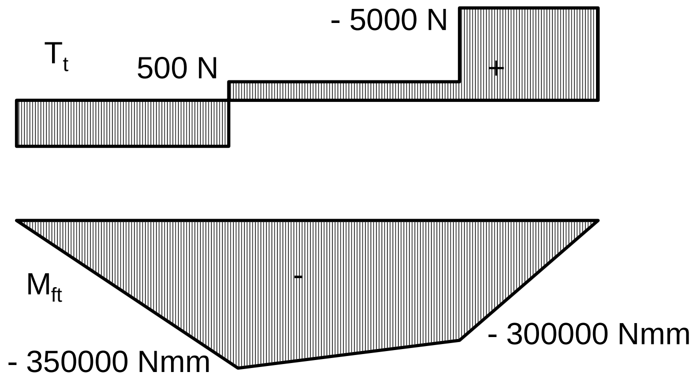
- reazioni vincolari

$$\rightarrow \quad H_t = 0$$

$$1 \supset \ V_{t2} \cdot 200 = F_{t1} \cdot 100 - F_{t2} \cdot 260 \Rightarrow V_{t2} = \frac{F_{t1} \cdot 100 - F_{t2} \cdot 260}{200} = -4500 \text{ N}$$

$$2 \supset \ V_{t1} \cdot 200 = F_{t1} \cdot 100 + F_{r2} \cdot 60 \Rightarrow V_{r1} = \frac{F_{t1} \cdot 100 + F_{t2} \cdot 60}{200} = 3500 \text{ N}$$

-diagrammi di taglio e momento flettente



Si noti che, per comodità, abbiamo utilizzato in entrambi i casi le convenzioni di segno del piano yz.

-Momento flettente complessivo e calcolo delle tensioni di flessione.

Poiché l'albero è a sezione variabile conviene riportare in diagrammi distinti l'andamento del momento flettente complessivo, del modulo di resistenza e il diagramma delle tensioni dovute al momento flettente calcolando i valori nei punti significativi. In corrispondenza delle ruote non vengono svolti i calcoli delle tensioni, che sarebbero poco significativi. Nella tabella seguente sono riportati i calcoli nei vari punti (coordinata dall'estremo sinistro).

Coord.	$M_{rad.}$ (Nmm)	$M_{tang.}$ (Nmm)	M_{tot} (Nmm)	D mm	W_f mm^3	σ (Mpa)
0	0	0	0	40	6283	0
18sx	-1638	-31500	31543	40	6283	6
18dx	-1638	-31500	31543	50	12272	3
97sx	-16016	-308000	308417	50	12272	26
97dx	-16016	-308000	308417	100		
109	-18200	-350000	350473	100		
121sx	-2912	-344000	344013	100		
121dx	-2912	-344000	344013	50	12272	29
200sx	97734	-304500	319801	50	12272	27
200dx	97734	-304500	319801	40	6283	51
209	109200	-300000	319257	40	6283	51
255sx	25480	-70000	74494	40	6283	12
255dx	25480	-70000	74494	80	6283	
269	0	0	0	80		

Risultano quindi i seguenti diagrammi, ottenuti con un foglio elettronico, ma che sono facilmente ottenibili anche manualmente.

Torna ad inizio documento

Torna al modulo