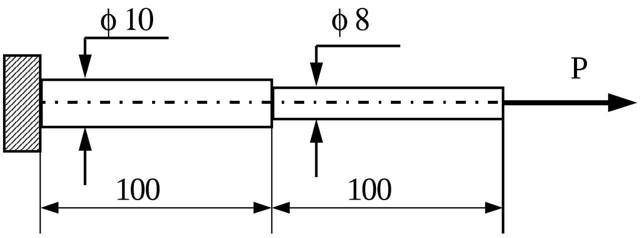
Esercizio 5-1

Calcolare lo spostamento dell'estremo e le sollecitazioni presenti nella struttura in figura, composta da due aste in serie con sezione circolare di diametro D_1 = 10 mm e D_2 = 8 mm, lunghe entrambe 100 mm e soggette ad un carico P di 10 kN.
Il materiale è un acciaio da costruzione con modulo elastico E = 200000 MPa



Soluzione

Lo spostamento può essere calcolato in due modi: sommando gli allungamenti delle singole aste e sommandoli, oppure calcolando la rigidezza complessiva e, nota la forza, calcolare lo spostamento.

I modo:

$$\Delta L_1 = \frac{P}{EA_1} L_1 = \frac{P \cdot 4}{E\pi D_1^2} L_1 = \frac{10000 \cdot 4 \cdot 100}{200000 \cdot \pi \cdot 10^2} = 0.064 \text{ mm}$$

$$\Delta L_2 = \frac{P}{EA_2} L_2 = \frac{P \cdot 4}{E\pi D_2^2} L_2 = \frac{10000 \cdot 4 \cdot 100}{200000 \cdot \pi \cdot 8^2} = 0.099 \text{ mm}$$

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 = 0.163 \text{ mm}$$

II modo:

$$K_1 = \frac{EA_1}{L_1} \qquad K_2 = \frac{EA_2}{L_2} \qquad K_t = \frac{K_1 \cdot K_2}{K_1 + K_2}$$

$$K_1 = \frac{200000 \cdot \pi \cdot 10^2}{100 \cdot 4} = 157080 \frac{N}{mm} \qquad K_2 = \frac{200000 \cdot \pi \cdot 8^2}{100 \cdot 4} = 100531 \frac{N}{mm} \qquad K_t = 61299 \frac{N}{mm}$$

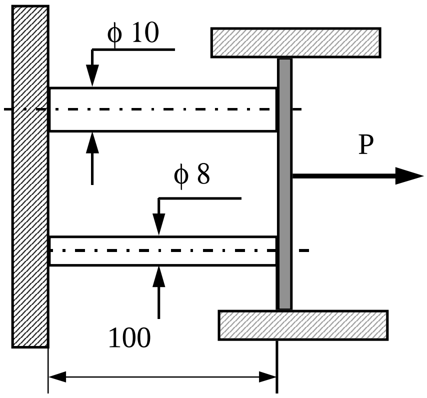
$$\Delta L = \frac{P}{K_t} = 0.163 \text{mm}$$

Il calcolo delle tensioni risulta banale:

$$\sigma_1 = \frac{P}{A_1} = \frac{4 \cdot 10^4}{\pi \cdot 10^2} \approx 128 \text{ MPa} \qquad \sigma_2 = \frac{P}{A_2} = \frac{4 \cdot 10^4}{\pi \cdot 8^2} \approx 199 \text{ MPa}$$

Esercizio 5-2

Si considerino le due aste dell'esercizio precedente disposte in parallelo, come indicato in figura, e si calcoli lo spostamento dell'elemento rigido di collegamento, la forza agente su ognuna delle aste e la tensione nelle aste.



Soluzione

In questo caso il problema può essere risolto considerando che le due aste sono costrette a subire lo stesso spostamento. nel caso di aste in parallelo. In questo caso la rigidezza totale non è altro che la somma delle rigidezze; infatti, considerando che il carico totale, per ragioni di equilibrio, è la somma dei carichi agenti sulle due aste ($P=P_1+P_2$), si ha:

$$K_t = \frac{P}{\Delta L} = \frac{P_1}{\Delta L} + \frac{P_2}{\Delta L} = K_1 + K_2 = 157080 + 100531 = 257611 \ \frac{N}{mm}$$

Calcolata la rigidezza e noto il carico è facile calcolare lo spostamento.

$$\Delta L = \frac{P}{K_t} = \frac{10000}{257611} = 0.039 \text{ mm}$$

Ricordando la definizione di rigidezza è possibile calcolare le forze agenti sulle aste:

$$P_1 = K_1 \cdot \Delta L = 157080 \cdot 0.039 = 6098 \text{ N} \qquad P_2 = K_2 \cdot \Delta L = 100531 \cdot 0.039 = 3902 \text{ N}$$

A questo punto è possibile calcolare le tensioni con le solite formule:

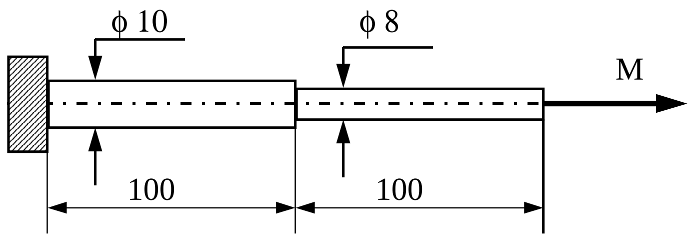
$$\sigma_1 = \frac{P_1}{A_1} = \frac{4 \cdot 6098}{\pi \cdot 10^2} = 78 \text{ MPa} \qquad \sigma_2 = \frac{P_2}{A_2} = \frac{4 \cdot 3902}{\pi \cdot 8^2} = 78 \text{ MPa}$$

Non deve stupire il fatto che le due tensioni risultino uguali; infatti i due elementi sono soggetti agli stessi spostamenti, ed essendo di ugual lunghezza subiscono la stessa deformazione; avendo la stessa deformazione ed essendo costruiti con lo stesso materiale, per via della legge di Hooke, sono soggetti alla stessa tensione. La tensione può quindi essere calcolata semplicemente come:

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\Delta L}{L} = 200000 \frac{0.039}{100} = 78 \text{ MPa}$$

Esercizio 5-3

Si considerino ancora le due aste dell'esercizio 1, soggette però ad un momento torcente M=10 Nm.
Si calcolino lo spostamento angolare totale e le tensioni tangenziali presenti nelle due aste.



Soluzione

Lo schema di soluzione è formalmente identico a quello dell'esercizio 1, salvo il calcolo delle rigidezze che sono di tipo torsionale; sarà considerato solo il II metodo di soluzione.
Per il calcolo della rigidezza è necessario valutare il modulo elastico tangenziale del materiale; supponendo un coefficiente di Poisson pari a 0.3 si ottiene:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 76923\,\mathrm{MPa}$$

si ha quindi:

$$K_1 = \frac{GJ_1}{L_1} \qquad K_2 = \frac{GJ_2}{L_2} \qquad K_t = \frac{K_1 \cdot K_2}{K_1 + K_2}$$

$$K_1 = \frac{76923 \cdot \pi \cdot 10^4}{100 \cdot 32} = 755191\,\frac{N}{mm} \qquad K_2 = \frac{76923 \cdot \pi \cdot 8^2}{100 \cdot 32} = 309326\,\frac{N}{mm} \qquad K_t = 219442\,\frac{N}{mm}$$

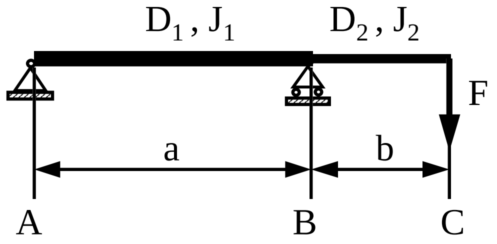
$$\Delta\theta = \frac{M}{K_t} = \frac{10000}{219442} = 0.046\ \mathrm{rad}$$

Il calcolo delle tensioni risulta banale:

$$\tau_1 = \frac{M}{W_1} = \frac{16 \cdot 10000}{\pi \cdot 10^3} = 51\ \mathrm{MPa} \qquad \tau_2 = \frac{M}{J_2} = \frac{16 \cdot 10000}{\pi \cdot 8^3} = 99\ \mathrm{MPa}$$

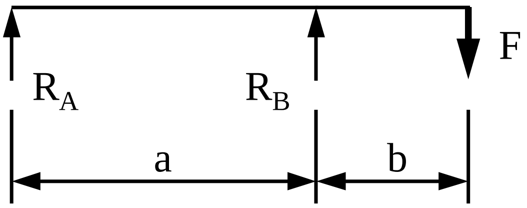
Esercizio 5-4

La figura mostra la schematizzazione di un albero costituito da due tratti: il tratto AB ha una lunghezza a = 400 mm con sezione di diametro D_1=60 mm, il tratto BC ha una lunghezza b = 200 mm con sezione di diametro D_2=50 mm. Il materiale è acciaio (E = 200000 MPa), e la forza applicata è F = 5000 N. Calcolare gli spostamenti nel punto C



Soluzione

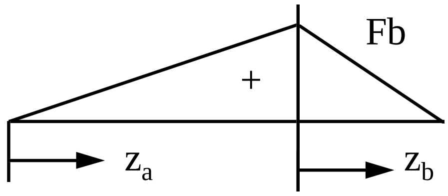
Il calcolo procederà in modo letterale fino al risultato finale.
In primo luogo occorre valutare le reazioni vincolari:



$$A \supset \quad R_B a - F(a+b) = 0 \Rightarrow R_B = F\frac{(a+b)}{a} = F\left(1+\frac{b}{a}\right)$$

$$B \supset \quad R_A a + Fb = 0 \Rightarrow R_A = -F\frac{b}{a}$$

Quindi si possono scrivere le equazioni del momento e tracciare il relativo diagramma; per semplificare i calcoli conviene utilizzare una coordinata locale per ognuno dei due tratti.



$$\text{Tratto AB}: M = -R_A \cdot z_a = F\frac{b}{a} z_a$$

$$\text{Tratto BC}: M = F \cdot (b - z_b)$$

Scriviamo adesso l’equazione della linea elastica.

Tratto AB:

$$\frac{d^2v}{dz_a^2} = -\frac{d\alpha}{dz_a} = -\frac{M}{EJ_1} = -\frac{Fb}{aEJ_1} z_a$$

$$\alpha = \int \frac{M}{EJ_1} dz_a = \frac{Fb}{aEJ_1}\frac{z_a^2}{2} + C_1$$

$$v = -\int \alpha dz_a = -\frac{Fb}{aEJ_1}\frac{z_a^3}{6} - C_1 z_a + C_2$$

Tratto BC:

$$\frac{d^2v}{dz_b^2} = -\frac{d\alpha}{dz_b} = -\frac{M}{EJ_2} = -\frac{F}{EJ_2}(b - z_b)$$

$$\alpha = \int \frac{M}{EJ_2} dz_b = -\frac{F}{EJ_2}\frac{z_b^2}{2} + \frac{F}{EJ_2} b z_b + C_3$$

$$v = -\int \alpha dz_b = +\frac{F}{EJ_2}\frac{z_b^3}{6} - \frac{Fb}{EJ_2}\frac{z_b^2}{2} - C_3 z_b + C_4$$

Le quattro costanti di integrazione possono essere calcolate facilmente considerando le condizioni al contorno, che per l'elemento BC risultano equazioni di continuità (delle frecce e delle rotazioni) con l'elemento AB, ovviamente in B:

Tratto AB: $v(z_a=0)=0 \Rightarrow C_2=0$

$v(z_a=a)=0 \Rightarrow C_1 = -\frac{Fba}{6EJ_1}$

Tratto BC: $v(z_b=0)= v(z_a=a)=0 \Rightarrow C_4=0$

$\alpha(z_b=0)= \alpha(z_a=a) \Rightarrow C_3 = \frac{Fba}{3EJ_1}$

Sostituendo questi valori si ottengono le equazioni cercate:

Tratto AB

$$\alpha = \frac{Fb}{aEJ_1}\frac{z_a^2}{2} - \frac{Fba}{6EJ_1} = \frac{Fba}{2EJ_1}\left(\frac{z_a^2}{a^2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$v = -\frac{Fb}{aEJ_1}\frac{z_a^3}{6} + \frac{Fba}{6EJ_1} z_a = \frac{Fba}{6EJ_1}\left(z_a - \frac{z_a^3}{a^2}\right)$$

Tratto BC

$$\alpha = -\frac{F}{EJ_2}\frac{z_b^2}{2} + \frac{F}{EJ_2} b z_b + \frac{Fba}{3EJ_1} = \frac{F}{EJ_2}\left(-\frac{z_b^2}{2} + z_b b + \frac{baJ_2}{3J_1}\right)$$

$$v = -\int \alpha dz_b = +\frac{F}{EJ_2}\frac{z_b^3}{6} - \frac{Fb}{EJ_2}\frac{z_b^2}{2} - \frac{Fba}{3EJ_1} z_b = \frac{F}{6EJ_2}\left(z_b^3 - 3bz_b^2 - \frac{2baJ_2}{J_1} z_b\right)$$

I momenti di inerzia flessionale delle sezioni valgono:

$$J_1 = \frac{\pi D_1^4}{64} = 636173 \text{ mm}^4 \quad J_2 = \frac{\pi D_2^4}{64} = 306796 \text{ mm}^4$$

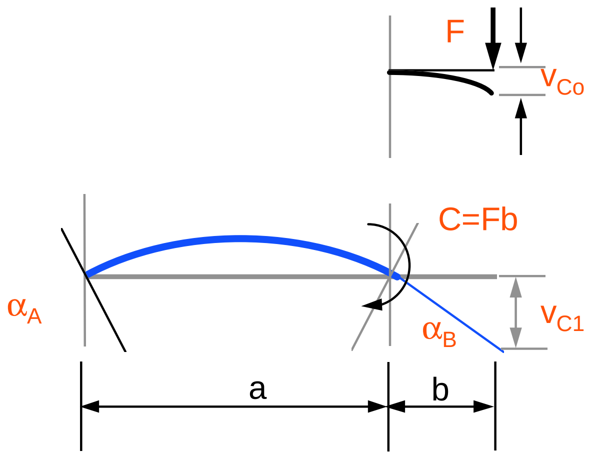
Utilizzando le formule ricavate si ottengono quindi gli spostamenti cercati:
Nella sezione di mezzeria del tratto AB:

$$z_a = 200 \text{ mm} \Rightarrow \alpha = -1.31 \cdot 10^{-4} \text{ rad}; \quad v = +0.079 \text{ mm}$$

Nel punto di applicazione della forza (C):

$$z_b = 200 \text{ mm} \Rightarrow \alpha = 2.68 \cdot 10^{-3} \text{ rad}; \quad v = -0.427 \text{ mm}$$

La freccia nel punto C può essere ricavata semplicemente utilizzando le formule presenti nei manuali.
Infatti il tratto BC può essere visto come una mensola incastrata in B, in cui la sezione di incastro è ruotata di un angolo α_b pari a quello di un elemento analogo a AB caricato con un momento C=Fb. La freccia totale si trova sommando alla freccia dovuta alla deformabilità dell'elemento BC (v_{c0}) quella dovuta alla rotazione rigida dello stesso elemento ($v_{c1} = -\alpha_b\, b$).
Nei manuali si trova facilmente:



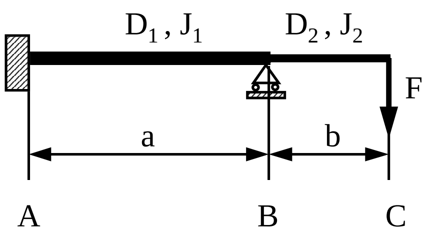
$$v_{C0} = -\frac{Fb^3}{3EJ_2} \qquad \alpha_B = \frac{Ca}{3EJ_1} \Rightarrow v_{C1} = -\frac{Fba}{3EJ_1} b$$

$$v_C = v_{C0} + v_{C1} = -\frac{Fb^3}{3EJ_2} - \frac{Fba}{3EJ_1} b$$

Svolgendo i calcoli risulta v_C=-0.427 mm, risultato analogo a quello ottenuto in precedenza

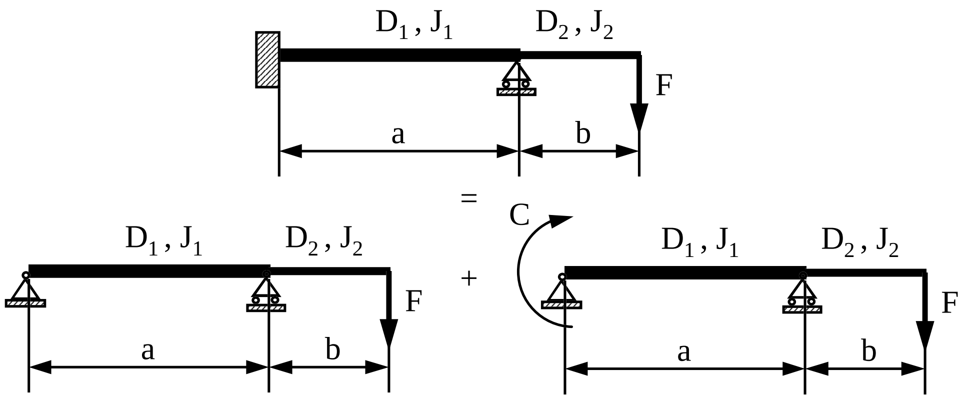
Esercizio 5-5

Si consideri la struttura iperstatica ottenuta sostituendo all'appoggio sinistro dell'albero presentato nell'esercizio 5-4 un incastro (ad esempio perché è stato utilizzato un cuscinetto a rulli o due cuscinetti a sfere affiancati): il tratto AB ha una lunghezza a = 400 mm con sezione di diametro D_1=60 mm, il tratto BC ha una lunghezza b = 200 mm con sezione di diametro D_2=50 mm. Il materiale è acciaio (E = 200000 MPa), e la forza applicata è F = 5000 N. Si ricavino le reazioni vincolari e gli spostamenti sotto al carico e nella mezzeria del tratto AB.



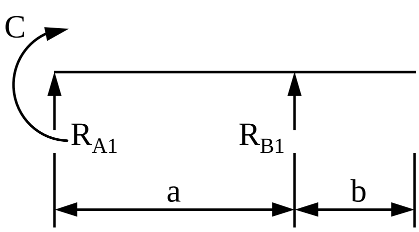
Soluzione

Definiamo il sistema ridotto e il sistema supplementare: per comodità conviene assumere come sistema ridotto quello già risolto nell'esercizio 4, in cui non è presente il vincolo alla rotazione. Tale vincolo viene sostituito nel sistema siupplementare con una coppia C.



Risolviamo quindi il sistema supplementare (le cui grandezze sono indicate con il pedice 1)

Reazioni vincolari:

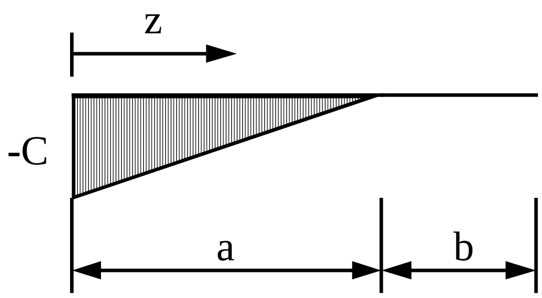


$$A \supset \quad R_{B1}a - C = 0 \Rightarrow R_{B1} = \frac{C}{a}$$

$$B \supset \quad R_{A1}a + C = 0 \Rightarrow R_{A1} = -\frac{C}{a}$$

Equazione del momento e relativo diagramma:

$$M = -C - R_{A1} \cdot z = -C + \frac{C}{a} z$$



Si noti che nel tratto BC il momento è nullo. La variabile z deve essere quindi considerata fra A e B.
Ricaviamo le equazioni degli spostamenti (z variabile fra 0 e a)

$$\frac{d^2 v_1}{dz^2} = -\frac{d\alpha_1}{dz} = -\frac{M_1}{EJ_1} = \frac{C}{EJ_1} - \frac{C}{aEJ_1} z$$

$$\alpha_1 = \int \frac{M_1}{EJ_1} dz = -\frac{C}{EJ_1} z + \frac{C}{aEJ_1}\frac{z^2}{2} + D_1$$

$$v_1 = -\int \alpha dz = \frac{C}{EJ_1}\frac{z^2}{2} - \frac{C}{aEJ_1}\frac{z^3}{6} - D_1 z + D_2$$

Le costanti di integrazione si ricavano imponendo le condizioni al contorno:

$v_1(z=0)=0 \quad \Rightarrow \quad D_2=0$

$v_1(z=a)=0 \quad \Rightarrow \quad D_1 = \frac{Ca}{3EJ_1}$

Le equazioni degli spostamenti risultano quindi:

$$\alpha_1 == -\frac{C}{EJ_1} z + \frac{C}{aEJ_1}\frac{z^2}{2} + \frac{Ca}{3EJ_1} = \frac{C}{EJ_1}\left(-z + \frac{z^2}{2a} + \frac{a}{3}\right)$$

$$v_1 = \frac{C}{EJ_1}\frac{z^2}{2} - \frac{C}{aEJ_1}\frac{z^3}{6} - \frac{Ca}{3EJ_1} z = \frac{C}{EJ_1}\left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6a} - \frac{a \cdot z}{3}\right)$$

Il valore dell'incognita C si ricava imponendo che la rotazione nell'estremo sinistro del sistema supplementare sia uguale e contraria alla rotazione nello stesso punto del sistema ridotto (z=0):

$$\text{Sist. ridotto} \quad \alpha(z=0) = -\frac{Fba}{6EJ_1} \qquad \text{Sist. suppl} \quad \alpha_1(z=0) = \frac{Ca}{3EJ_1}$$

$$\alpha_1 = -\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{Ca}{3EJ_1} = \frac{Fba}{6EJ_1} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{Fb}{2}$$

Ricavato il valore dell'incognita iperstatica, utilizzando la sovrapposizione degli effetti, si ricavano facilmente le reazioni vincolari e gli spostamenti voluti:
Reazioni vincolari:

Vincolo a $\quad R_{At} = R_A + R_{A1} = -F\frac{b}{a} - \frac{C}{a} = -F\frac{b}{a} - F\frac{b}{2a} = -\frac{3Fb}{a} \Rightarrow \qquad R_{At} = -7500\ \text{N}$

Vincolo b $\quad R_{Bt} = R_B + R_{B1} = F\left(1+\frac{b}{a}\right) + \frac{C}{a} = F\left(1+\frac{b}{a}\right) + F\frac{b}{2a} = F\left(1+\frac{3b}{2a}\right) \qquad R_{Bt} = 12500\ \text{N}$

Ovviamente la reazione vincolare alla rotazione è pari a C=50.000 Nmm
Analogamente per lo spostamento in mezzeria, dove svolgendo i calcoli per il sistema supplementare si ottiene α_1=-6.5·10^{-5} e v_1=-0.039 mm:

rotazione $\quad \alpha_t(z=200) = \alpha(z=200) + \alpha_1(z=200) = -1.96 \cdot 10^{-4}\ \text{rad}$

freccia $\quad v_t(z=200) = v(z=200) + v_1(z=200) = 0.040\ \text{mm}$

Per quanto riguarda lo spostamento all'estremità C, il contributo del sistema supplementare può essere calcolato considerando che l'elemento BC subisce in questo sistema una rotazione rigida e che quindi:

$$\alpha_1(C) = \alpha_1(B) \qquad v_1(C) = -\alpha_1(C) \cdot b = 0.052\ \text{mm}$$

sommando questo valore a quello del sistema ridotto si otiene:

$$\alpha_t(C) = \alpha(C) + \alpha_1(B) = 2.42 \cdot 10^{-3}\text{rad} \qquad v_t(C) = v(C) + v_1(C) = -0.375\ \text{mm}$$

Agli stessi risultati si puo arrivare integrando l'equazione del momento globale che si ottiene una volta risolta l'iperstatica, cioè una volta determinato il valore dell'incognita C. Si lascia al lettore tale verifica.

Torna ad inizio documento

Torna al modulo