Indice

Esercizio 6-1

Data una struttura costituita da una trave in acciaio (E = 200000 MPa), di sezione rettangolare cava 30x40, spessore 3 mm, incastrata ad una estremità e libera all'altra estremità, di lunghezza L = 2 m, calcolare il carico critico e la tensione di compressione in corrispondenza di tale carico.

Soluzione

Date le condizioni di vincolo, la lunghezza libera di inflessione vale l_0 = 2*L = 4000 mm
Il momento di inerzia (minimo) della sezione e l'area della sezione valgono:

$$J_{min} = \frac{40 \cdot 30^3}{12} - \frac{34 \cdot 24^3}{12} = 50832 \text{ mm}^4 \qquad A = 40 \cdot 30 - 34 \cdot 24 = 384 \text{ mm}^2$$

per cui il carico critico risulta:

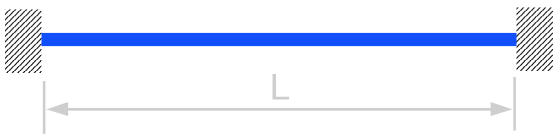
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2} = 6271 \text{ N}$$

La tensione (di compressione) in corrispondenza di tale carico vale:

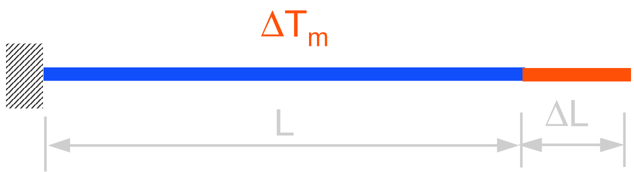
$$\sigma = \frac{P_{cr}}{A} \cong 16 \text{ MPa}$$

Esercizio 6-2

Si consideri un'asta in acciaio (E=200.000 MPa, α= 12 10^{-6} 1/°C) di sezione quadrata con A=100 mm^2 e lunghezza 1000 mm (a 20°) incastrata fra due pareti indeformabili. Si calcolino le tensioni nella barra se questa viene portata alla temperatura uniforme di 100°.

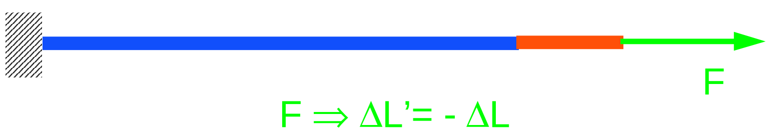


La differenza di temperatura fra il montaggio e il funzionamento è ΔT_m = 100°-20° = + 80°
Si consideri l'asta libera di dilatarsi (togliendo uno degli incastri):



L'allungamento della barra è $\Delta L = \alpha L \Delta T_m = 12 \bullet 10^{-6} \bullet 1000 \bullet 80 = 0.96$ mm

Tale allungamento è in realtà impedito da una forza F tale da provocare un allungamento $\Delta L' = -\Delta L$ dal quale si ricava facilmente il valore della forza:



$$\Delta L' = -\Delta L = \frac{FL}{EA} \Rightarrow F = -\frac{EA\Delta L}{L}$$

Calcolata la forza si ottengono le tensioni con le usuali formule:

$$F = -\frac{EA\Delta L}{L} = -19200 \ \ \mathrm{N} \qquad \sigma = \frac{F}{A} = -192 \ \ \mathrm{MPa}$$

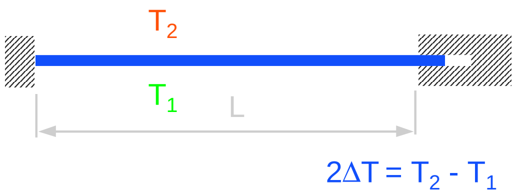
Allo stesso risultato si giunge utilizzando la legge di Hooke, ricordando che i vincoli impediscono gli spostamenti e quindi le deformazioni:

$$E\varepsilon_{zz}=s_{zz}+\alpha E\Delta T_m; \qquad \varepsilon_{zz}=0 \qquad \sigma_{zz}=-\alpha E\Delta T_m=-192 \text{ MPa}$$

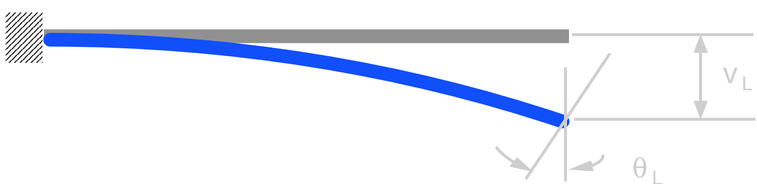
Si noti che le tensioni calcolate sono piuttosto elevate e aste particolarmente snelle potrebbero essere soggette, a causa delle variazioni di temperatura, a instabilità di tipo elastico: nel campo delle tubazioni, ad esempio, tali instabilità, pur non portando a collasso, ma solo ad una incurvatura dei tubi (i vincoli sono fissi) possono provocare molti problemi; per tale motivo vengono previsti dei giunti di dilatazione che permettono l'allungamento del tubo senza generare reazioni vincolari lungo l'asse del tubo.

Esercizio 6-3

Si consideri una trave in acciaio (E= 200000 MPa, α = 12 10^{-6} 1/°K) di sezione rettangolare hxb = 30x10 mm, di lunghezza L = 200 mm, incastrata da un lato e vincolata con una coppia prismatica dall'altro soggetta ad una variazione di temperatura fra intradosso ed estradosso 2ΔT= 50°. Calcolare il momento applicato dal vincolo alla trave e le tensioni all'estradosso e all'intradosso



Se viene eliminata la coppia prismatica la trave si inflette.



e la sezione terminale subisce una rotazione che è facilmente calcolabile integrando la linea elastica:

$$k_x = \alpha\frac{2\Delta T}{h} = \cos t.$$

$$\theta_x = \int k_x dz = \alpha\frac{2\Delta T}{h} z + C_1$$

la costante di integrazione si calcola imponendo la condizione al contorno z=0 $\Rightarrow \theta_x=0 \Rightarrow$ C_1 =0

Si ha dunque:

$$\theta_L = \alpha \frac{2\Delta T}{h} L$$

La coppia prismatica impone una reazione vincolare che annulla tale rotazione, cioè il suo valore è tale per cui $\theta_x' = -\theta_x$, e vale quindi:

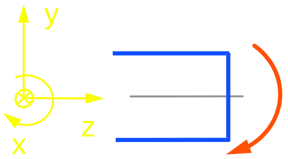
$$\theta'_L = \frac{M_x}{EJ_{xx}} L \Rightarrow M_x = \frac{\theta'_L EJ_{xx}}{L} = -\frac{\theta_L EJ_{xx}}{L}$$

Essendo J_{xx} il momento di inerzia della sezione è possibile calcolare il momento che il vincolo applica alla trave: (vedi anche figura)

$$J_{xx} = \frac{bh^3}{12} = 22500 \text{ mm}^4 \quad M_x = -\frac{2 \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot E \cdot J_{xx}}{h} = -90000 \text{ Nmm}$$

Calcolato tale momento è facile calcolare le tensioni di origine termica con le usuali formule:

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{J_{xx}} y \quad \sigma_{zz}\left(y = \frac{h}{2}\right) = -60 \text{ MPa} \quad \sigma_{zz}\left(y = -\frac{h}{2}\right) = +60 \text{ MPa}$$



$$M_x = -\frac{2 \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot E \cdot J_{xx}}{h}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{J_{xx}} y$$

Alla stessa conclusione si può arrivare con la legge di Hooke, considerando che le fibre esterne sono soggette ad una variazione di temperatura ΔT (25°) ; si ha quindi

$$\sigma_{zz}\left(y = +\frac{h}{2}\right) = -\alpha \cdot \Delta T \cdot E = -60 \text{ MPa} \quad \sigma_{zz}\left(y = -\frac{h}{2}\right) = +\alpha \cdot \Delta T \cdot E = +60 \text{ MPa}$$

Torna ad inizio documento

Torna al modulo